

MATEMÁTICA

décimo grado

MATEMÁTICA

décimo grado

M. Sc. Francisco E. Rodríguez Meneses
Dr. C. Aurelio Quintana Valdés
Dr. C. Emma Mercedes García Enis
M. Sc. Rosa Alicia Cárdenas Puig
M. Sc. Richard Naredo Castellanos
M. Sc. Zulema Cuadrado González
Dr. C. Yenis Cuétara Hernández
M. Sc. Justo Javier Castillo Reyna

EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

Colaboradores:
- Dr. C. Marta Álvarez Pérez ■ Dr. C. Frank Michel Rodríguez Hevia ■ Dr. C. Yaser Martín Guillén

Edición y corrección:
Lic. Amada Díaz Zuazo

Diseño, cubierta, ilustración:
- Instituto Superior de Diseño (ISDi)

Emplane: Adriana Fundora Losada

Instituto Superior de Diseño:
Anelís Simón Sosa ■ María Paula Lista Jorge ■ Sara Sofía Delgado Méndez ■ Isell Rodríguez Guerra ■ Daniela Domínguez Ramírez ■ Amanda Serrano Hernández ■ Rocío de la C. Ruiz Rodríguez ■ Evelio de la Sota Ravelo ■ Ana Laura Seco Abreu ■ Arianna Ruenes Torres ■ Reynier Polanco Somohano ■ Celia Carolina Céspedes Pupo ■ Elizabeth Diana Fajardo Céspedes ■ Laura Rosa Almero Fong ■ Elizabeth Blanco Galbán ■ Laura Reynaldo Jiménez ■ Daniela Arteaga Martínez ■ Daniela Alpízar Céspedes ■ Roberto Pérez Curbelo ■ Ariel Abreu Ulloa ■ M. Sc. Maité Fundora Iglesias ■ Dr. C. Ernesto Fernández Sánchez ■ D.I. Eric Cuesta Machado ■ D.I. Julio Montesino Carmona

© Francisco E. Rodríguez Meneses y coautores, Cuba, 2023
© Editorial Pueblo y Educación, 2023

ISBN 978-959-13-4241-6 (Versión impresa)
ISBN 978-959-13-4353-6 (Versión digital)

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3.ª A No. 4601 entre 46 y 60,
Playa, La Habana, Cuba. CP 11300
epueblo@epe.gemined.cu

ÍNDICE

Preámbulo IX
Estudiante XI

1 Los números reales y el procesamiento estadístico de datos 1

1.1 Relaciones y operaciones con conjuntos y sus propiedades 1
Conjuntos y subconjuntos 2
Notación de conjuntos 9
Operaciones con conjuntos. Propiedades 10
Ejercicios del epígrafe 1.1 16

1.2 El dominio de los números reales 20
Relaciones conjuntistas en el dominio de los números reales. Propiedades 21
Intervalos numéricos. Operaciones conjuntistas con intervalos 28
Ejercicios del epígrafe 1.2 34

1.3 Operaciones de cálculo con números reales. Propiedades 38
Operaciones fundamentales con números reales 39
Potenciación y radicación. Ampliación del concepto de potencia 46
Operaciones con radicales. Propiedades 60
Logaritmación de números reales 69
Ejercicios del epígrafe 1.3 73

1.4 Procesamiento estadístico de datos 81
Variable estadística. Escalas de medición de la variable 85
Distribución de frecuencias 90
Gráfico de frecuencias acumuladas 95
Medidas de tendencia central 99
Medidas de dispersión 106
Medidas de posición 121
Diagrama de caja y bigotes 126
Ejercicios del epígrafe 1.4 132

Ejercicios del capítulo 1 143
Autoevaluación 149

2 Trabajo con variables, ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones 155
2.1 Polinomios, operaciones y descomposición factorial 156
Expresiones algebraicas 156
Operaciones con polinomios 161
Descomposición factorial de polinomios 171
Ejercicios del epígrafe 2.1 180
2.2 Ecuaciones e inecuaciones lineales, modulares y cuadráticas 190
Ecuaciones lineales y modulares 190
Ecuaciones cuadráticas 200
Inecuaciones 211
Ejercicios del epígrafe 2.2 223
2.3 Fracciones algebraicas. Ecuaciones e inecuaciones fraccionarias .. 232
Fracción algebraica. Simplificación de fracciones algebraicas 232
Operaciones con fracciones algebraicas 236
Ecuaciones e inecuaciones fraccionarias 243
Ejercicios del epígrafe 2.3 250
2.4 Sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas 261
Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables 262
Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables 266
Sistemas de ecuaciones cuadráticas 273
Resolución de problemas que se modelan mediante sistemas de ecuaciones 280
Ejercicios del epígrafe 2.4 287
Ejercicios del capítulo 2 295
Autoevaluación 310

3 Funciones modulares y potenciales de exponente entero 313
3.1 El concepto de función. Funciones lineales y cuadráticas 314
Sistematización del concepto de función. Formas de representación de una función 316
Función lineal y función cuadrática 323

Ejercicios del epígrafe 3.1 336
3.2 Función modular 344
Ejercicios del epígrafe 3.2 348
3.3 Funciones potenciales de exponenente entero 350
Función cúbica 351
Función de proporcionalidad inversa 355
Generalización de las funciones potenciales de exponente entero 359
Ejercicios de epígrafe 3.3 363
Ejercicios del capítulo 3 369
Autoevaluación 376

4 Trigonometría y sus aplicaciones 381
4.1 Razones trigonométricas 382
Las razones trigonométricas de ángulos agudos en un triángulo rectángulo 385
Razones trigonométricas de ángulos notables y de ángulos de 0° y 90° 391
Ecuaciones e identidades trigonométricas 396
Ejercicios del epígrafe 4.1 408
4.2 Circunferencia trigonométrica 414
Razones trigonométricas de ángulos mayores de 90° y menores o iguales que 360°. Fórmulas de reducción 414
Generalización del concepto de ángulo. Ángulos coterminales 426
Ejercicios del epígrafe 4.2 431
4.3 Aplicaciones de la trigonometría 435
Resolución de triángulos rectángulos 436
Cálculo de áreas utilizando la trigonometría 444
Ley de los senos y Ley de los cosenos 448
Polígonos regulares 460
Aplicaciones de la trigonometría al cálculo de cuerpos 465
Ejercicios del epígrafe 4.3 468
Ejercicios del capítulo 4 476
Autoevaluación 481

Anexos **483**

Respuestas de los ejercicios **483**

Capítulo 1 ..... **483**

Capítulo 2 ..... **501**

Capítulo 3 ..... **522**

Capítulo 4 ..... **540**

Tablas **551**

Bibliografía **561**

Preámbulo

El presente libro de texto que ponemos en tus manos, elaborado para el Décimo Grado vigente, ha tenido como punto de partida el resultado de muchos años de trabajo de un grupo importante de especialistas en la disciplina y en la metodología para su enseñanza, encabezado en un primer momento por el Dr. C. Luis Campistrous Pérez y la Dr. C. Celia Rizo Cabrera y, posteriormente, por la Dr. C. Marta Álvarez Pérez lo que permitió que sus autores contaran, a lo largo de todo el proceso de elaboración, no solo con valiosos materiales de apoyo, sino con acertadas críticas, reflexiones, valoraciones y sugerencias de ellos, de otros especialistas de las universidades, de la enseñanza preuniversitaria y de profesores que participaron en la etapa experimental dedicados a la enseñanza de la matemática y que siempre realizaron observaciones oportunas y necesarias.

¡A todos nuestro infinito agradecimiento!

Estudiante:

Este libro lo hemos escrito para ti, para que puedas adquirir los conocimientos matemáticos básicos en este grado que estás cursando, los cuales te serán útiles, además, para comprender los contenidos que estudiarás en los grados siguientes. No se trata de presentar contenidos aislados; el libro tiene la intención de reactivar los conocimientos anteriores que representan la base necesaria para introducir los nuevos, que a su vez constituyen su ampliación y profundización.

El contenido de este libro está estructurado en cuatro capítulos que se corresponden con las unidades del programa de estudio que comprende el curso. Para organizar mejor el contenido, los capítulos están divididos en epígrafes y algunos de estos en subepígrafes.

Cada uno de los capítulos comienza con una introducción que revela, de manera breve, el surgimiento y evolución en el tiempo del contenido fundamental que se estudia en el tema, las principales personalidades que propiciaron su desarrollo y la importancia que tiene su estudio para el mejoramiento humano.

En cada epígrafe encontrarás los contenidos del curso, algunos de ellos destacados como es el caso de las definiciones, teoremas y propiedades, los ejemplos resueltos, que contienen además algunas sugerencias que ilustran cómo debes proceder para resolver ejercicios importantes que corresponden a ese contenido.

Al final de cada uno de los epígrafes aparecen ejercicios propuestos para el trabajo independiente, muchos de los cuales requieren del uso de asistentes matemáticos y tienen el propósito de obtener nuevos conocimientos que debes compartir con tu profesor de Matemática y compañeros de grupo. Al final de cada capítulo encontrarás otros ejercicios que integran los contenidos tratados. Los ejercicios que aparecen señalados con un asterisco (*) son los que presentan un mayor grado de dificultad.

Para que puedas comprender mejor el contenido y establecer una comunicación más amena con tu libro, este contiene algunas secciones en los diferentes epígrafes.

De la historia. En esta sección se destacan aspectos de personalidades vinculadas al descubrimiento, surgimiento de nuevos contenidos o al origen y desarrollo de aspectos de la matemática tratados.

Reflexiona. Presenta situaciones problémicas en las que debes pensar porque tiene que ver con un concepto, una relación o un procedimiento.

¿Sabías que…? Es una sección itinerante y variada para expresar brevemente informaciones relevantes en el tema: una noticia, un descubrimiento o una aplicación de la matemática.

Recuerda que... Presenta pequeños resúmenes de contenidos que debes saber para obtener otros nuevos.

¡Atención! Esta sección es una alerta en algunos aspectos para ser cuidadoso y no incurrir en errores. También destaca algunos elementos que se van a considerar en la resolución de las actividades o ejercicios propuestos.

Investiga y aprende. Se proponen tareas para investigar y así enriquecer el conocimiento con el aprendizaje de nuevos contenidos y procederes.

Saber más. Se trata de aspectos relacionados con el contenido que no corresponden al programa, es decir, una breve ampliación del tema, que puedes investigar utilizando los medios de comunicación.

Aplica tus conocimientos. Aparecen tareas para aplicar los conocimientos adquiridos que pueden solucionar nuevas problemáticas intramatemáticas y extramatemáticas.

Reflexiona sobre lo aprendido. Se trata de un grupo de preguntas simples cuyas respuestas sintetizan los contenidos fundamentales del capítulo.

Conéctate. Es el sitio www.cubaeduca.cu donde puedes consultar la teoría y ejercicios resueltos, relacionado con los temas estudiados.

Del software. Remite a la resolución de ejercicios del *software* para comprender la Matemática.

Además, incluye:

Ejemplos. Pueden ser ejercicios resueltos que muestran procedimientos de trabajo.

Preguntas detonantes. Están identificadas con el símbolo ▲, y están dirigidas a activar el razonamiento del tema que se trata.

Ejercicios. Contiene los que se proponen para cada epígrafe.

Ejercicios del capítulo. Agrupa los que integran los contenidos tratados en todo el capítulo.

Autoevaluación. Esta sección aparece al final de cada capítulo estructurada en dos tipos de test.

Respuesta de los ejercicios. Contiene las soluciones de los ejercicios de cada capítulo al final del libro.

Ponemos en tus manos esta obra y confiamos que sabrás aprovechar el contenido que en ella se recoge, no solo para tu enriquecimiento personal, sino también para compartir los conocimientos que adquieras con todos los que te rodean.

Los autores

CAPÍTULO 1

Los números reales y el procesamiento estadístico de datos

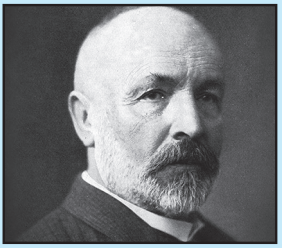
La Matemática, tan antigua como el propio hombre, lo acompaña desde entonces dotándolo de recursos, de formas de razonar y de analizar la realidad para dar solución a diversos problemas que penetran en casi todos los aspectos de la vida en el mundo moderno. Al respecto, **¿qué vas a aprender en este capítulo?**

Profundizarás sobre la teoría de conjuntos, sus operaciones y relaciones; comprenderás por qué el concepto de conjunto permite formular y fundamentar cualquier teoría matemática, cobrando gran interés para todas sus ramas. Ampliarás tus conocimientos sobre las operaciones, relaciones conjuntistas y de orden definidas en el dominio de los números reales ($\mathbb{R}$). Modelarás situaciones de la vida y problemas matemáticos para adquirir nuevos conocimientos que aplicarás en la interpretación, análisis y valoración de situaciones que se resuelven mediante recursos aritméticos y estadísticos.

1.1 Relaciones y operaciones con conjuntos y sus propiedades

Desde grados anteriores te has familiarizado con algunas nociones básicas de la Teoría de Conjuntos, rama de la Matemática que manifiesta la relación entre *conjuntos, números* y *magnitudes*, con una importante contribución a su comprensión y aplicación en otras áreas del saber, sobre las que puedes orientar tu proyecto de vida profesional.

De la historia



Georg Cantor

(1845–1918)

Fig.1.1

La Teoría de Conjuntos es reconocida como tal, a finales del siglo XIX gracias a la perseverancia del genio matemático ruso-alemán **G. Cantor** (figura 1.1), y el apoyo de otros científicos. En el Congreso Internacional de Matemáticas de 1987, celebrado en la ciudad alemana de Zurich, se mostró a la comunidad matemática toda la contundencia de la nueva teoría. Su poder fue reconocido en la riqueza conceptual y técnica que ofrecía para los trabajos en Álgebra y Análisis, cautivando a una buena parte de los matemáticos más importantes de comienzos del siglo XX.

Sorprende saber que un concepto tan antiguo, como el de conjunto, se aplica en descubrimientos tan actuales como la navegación en Internet. Esta se organiza por dominios (entiéndase conjuntos), tales como: .com, .es, .cu, .mx, etc. De manera que cualquier sitio terminado en .cu pertenece al dominio Cuba, en el cual se encuentran subconjuntos como: .rimed.cu y .cubaeduca.cu, que pertenecen al Ministerio de Educación; .sld.cu, del Ministerio de Salud Pública; .uci.cu, de la Universidad de Ciencias Informáticas; entre otros. Esta organización también se utiliza en el servicio de correo electrónico.

Sería interesante saber ¿qué otros conceptos, relaciones y operaciones de la Teoría de conjuntos, se aplican a las Ciencias de la Información y en otras ciencias?, ¿cómo se aplican en los conceptos básicos de la estadística?

Conjuntos y subconjuntos

Durante el desarrollo de la humanidad, ciertos conceptos matemáticos se han considerado primarios o indefinibles, entre ellos el concepto de *conjunto*, tal vez uno de los más valiosos, del conocimiento matemático en general y del cual aceptaremos la noción primaria de pluralidad de objetos que nos sugiere la palabra.

Intuitivamente un conjunto es una lista, colección o clases de objetos materiales o mentales, donde cada objeto que lo integra se denomina *elemento*. Se pueden apreciar conjuntos en infinidad de ejemplos de la cotidianidad, tales como:

El conjunto de especies de la fauna cubana que están en amenaza de extinción (figura 1.2)



Fig.1.2

El conjunto de todas las figuras geométricas que se aprecian en el tapiz de la figura 1.3.

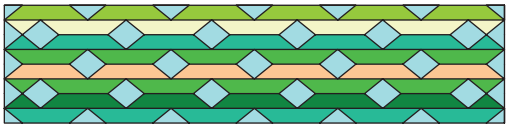


Fig.1.3

En Matemática los conjuntos se estudian como entidades abstractas, que cumplen dos reglas fijas que permiten obtener una noción clara de su significado, estas son:

I. Los objetos o elementos que integran un conjunto deben estar bien *individualizados*.
II. El conjunto debe estar *perfectamente determinado*.

Significa que conocemos bien todos sus elementos o las propiedades que cada uno de ellos debe cumplir, para que podamos decidir si pertenecen o no al conjunto.

Ejemplo 1.1

¿Cómo se cumplen las reglas I y II en el caso de los conjuntos *B* y *C* que te proponemos a continuación?

B: conjunto de órganos que conforman el sistema digestivo.
C: conjunto de todos los elementos químicos de la tabla periódica de 18 columnas.

Resolución:

– En el conjunto *B*, cada órgano del sistema digestivo está diferenciado por su forma, ubicación en el sistema y sus funciones, es decir, están bien individualizados (regla I); además, tienen una estructura y organización para realizar su función principal: transformar los alimentos en sustancias absorbibles. Luego está perfectamente determinado (regla II), diferenciándose de cualquier otro sistema del cuerpo humano.

– En el conjunto *C*, la posición de los 18 elementos de la tabla periódica la determina la cantidad de protones en el núcleo de sus átomos, lo que permite distinguir por ejemplo al oxígeno del hidrógeno; es decir, están bien individualizados (regla I); además, por la estructura y organización que tiene, permite clasificar sus elementos en metales y no metales (regla II). ♦

Investiga y aprende

Las áreas protegidas de recursos manejados en Cuba, reserva de la biosfera hasta 2019, están integradas por la Península de Guanahacabibes, la Sierra del Rosario, la Ciénaga de Zapata, Buenavista, Baconao y las Cuchillas del Toa.
Utiliza las reglas I y II para argumentar por qué se pueden considerar un conjunto.

Recuerda que...

- Existen conjuntos **finitos** e **infinitos**. Entre los conjuntos finitos se distinguen los conjuntos **unitarios**, conformados por un solo elemento.
- Si un conjunto no tiene ningún elemento se dice que es "**vacío**" y se puede representar de dos formas { } o Ø.
- La relación de pertenencia entre elementos y conjuntos se expresa con el símbolo $\in$ que se lee, "**pertenece**" y su negación es $\notin$, se lee "**no pertenece**"
- La relación de inclusión entre conjuntos se expresa con el símbolo $\subset$ que se lee "**es subconjunto**" y su negación $\not\subset$ se lee "**no es subconjunto**".

En la práctica, todos los conjuntos que determines probablemente sean subconjuntos de otro conjunto, es decir, entre las propiedades que lo determinan, siempre hay una que te remitirá a identificar sus elementos en otro conjunto más amplio.

El conjunto que contiene a un subconjunto A determinado por la propiedad que lo caracteriza, se denomina conjunto ***universo*** *de A. Se denota por* ***U****.*

Por lo general, al determinar conjuntos prefijamos el conjunto universo ***U***, en el cual tienen sentido los subconjuntos determinados, para la discusión o solución de los diversos problemas que debemos resolver.

Ejemplo 1.2

Identificar el conjunto universo de los conjuntos dados en las situaciones siguientes:

a) Los estudios sobre la incidencia de la pandemia Covid-19 en determinado grupo *poblacional*.
b) Al determinar que el conjunto $H = \{x \in \mathbb{N}: x^3 < 200\}$.

Resolución:

a) La población del país al cual pertenece el grupo poblacional en estudio es el conjunto universo; según sea el caso también se puede considerar como conjunto universo a la población de una región del planeta, o la población mundial.
b) La propiedad característica atribuida al conjunto H ha determinado un subconjunto del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, que posee la propiedad en cuestión. Es decir, se ha identificado al conjunto de los números naturales como conjunto universo. Significa entonces que $H \subset \mathbb{N}$. ♦

Reflexiona

Considera A, como el conjunto de todos los grupos de décimo grado de tu escuela. ¿Cuál es el conjunto universo?, ¿cuántos elementos tiene el conjunto A?

El número que se corresponde con la cantidad de elementos que conforman un conjunto A se denomina **cardinal del conjunto *A***. Se denota por ***#A***.

Ejemplo 1.3

Sean los conjuntos siguientes:

D: conjunto de palabras agudas terminadas en ***z*** *que se acentúan.*
F: conjunto de puntos de la recta real.
G: conjunto de los números racionales que son solución de la ecuación $3x - 7 = 28$.

Clasificar los conjuntos dados según la posibilidad de nombrar o numerar la totalidad de sus elementos y determinar su cardinal.

Resolución:

- El conjunto *D* es vacío, es decir, $D = \emptyset$, porque las palabras agudas terminadas en ***z*** no se acentúan, por ejemplo bisectriz, *mediatriz* y *generatriz*. Luego $\#D = 0$.
- El conjunto *F* es *infinito*, porque la recta real tiene infinitos puntos. Luego, $\#F$ no se puede determinar.
- El conjunto *G*, es *unitario*, porque el conjunto solución de la ecuación $3x - 7 = 28$ tiene un solo elemento, $x = 11,\overline{6}$. Luego $\#G = 1$

Aplica tus conocimientos

¿Qué pasaría si el conjunto G se define como el conjunto de los números enteros que son solución de la ecuación 3x – 7 = 28?

Ejemplo 1.4

Considerar el conjunto *H*: de los números naturales cuyo cubo es menor que 200.

a) ¿Qué relación se puede establecer entre los números 3 y 9 con respecto al conjunto *H*?
b) Representar la relación, mediante un diagrama de Venn.

Resolución:

a) Se puede establecer que $3 \in H$; porque $3^3 = 27 < 200$ y $9 \notin H$ porque $9^3 = 729 > 200$.

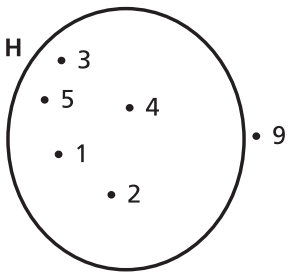
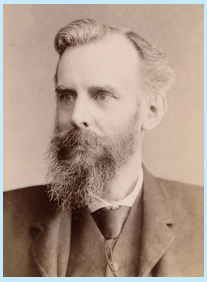


Fig. 1.4

b) La representación de la relación en un diagrama de Venn, se muestra en la figura 1.4. Observa que se obtiene ubicando todos los elementos: 1; 2; 3; 4 y 5 del conjunto finito *H*, en la región interior de la curva

cerrada. En cambio, el elemento 9 que no pertenece a dicho conjunto, se representa por un punto de la región exterior.♦

De la historia



John Venn
(1834 – 1923)

Fig.1.5

Los diagramas de Venn deben su nombre a su creador J. Venn (figura 1.5), matemático británico, miembro de la Real Sociedad de Londres, que se destacó por sus investigaciones en lógica inductiva y por su método de representación gráfica.

Los diagramas que hoy conocemos se presentaron en 1880 en el trabajo titulado *De la representación mecánica y diagramática de proposiciones y razonamientos*, con gran repercusión en el mundo de la lógica formal. Posteriormente fueron utilizados para mostrar visualmente las operaciones más elementales de la Teoría de conjuntos.

Ejemplo 1.5

Analizar y representar en un diagrama de Venn, la relación de inclusión entre el conjunto *P* de todos los triángulos equiláteros, con respecto al conjunto *T* de todos los triángulos isósceles del plano.

Resolución:

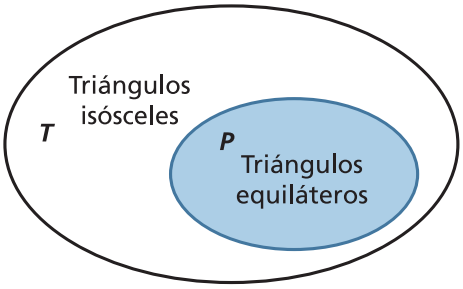


Fig. 1.6

Como los triángulos equiláteros cumplen las propiedades de los triángulos isósceles, se tiene que *P* es un subconjunto del conjunto *T* de todos los triángulos isósceles del plano. Se denota: $P \subset T$. La relación se representa en el diagrama de Venn de la figura 1.6.♦

Recuerda que...

En **Estadística Descriptiva** se entiende como **población**, al conjunto de todos los elementos en que interesa estudiar u observar una o varias características. Cada uno de los elementos del conjunto se llama **individuo** y la **muestra**, es un subconjunto de la población que se quiere estudiar.

Aplica tus conocimientos

1. *En una escuela de 970 estudiantes se han elegido, de manera aleatoria 200 de ellos, para realizar un estudio relacionado con la cantidad de hermanos.*

Tabla 1.1

Cantidad de hermanos	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*+6*
Cantidad de estudiantes	*9*	*53*	*63*	*46*	*21*	*0*	*7*	*1*

Utiliza la información de la tabla para identificar:

a) ¿Cuántos conjuntos forman los valores que toma la variable?

b) ¿Qué significado tiene para el estudio, el cardinal de los conjuntos identificados?

c) ¿Cómo se interpretan en esta situación, los casos del conjunto unitario y del conjunto vacío?

2. *Considera que participas en un estudio estadístico que procesa la información que recibe la Organización Mundial de la Salud (OMS) o el Instituto de Epidemiología (provincial o municipal), sobre el comportamiento de la enfermedad Covid-19 u otra de interés actual, para el mundo, para Cuba o para tu provincia o municipio.*

2.1 *Selecciona uno de los contextos mencionados y modela una situación en la cual apliques:*

a) Los conceptos de conjunto, subconjunto asociados al estudio de una variable estadística relacionado con el estudio de la enfermedad.

b) El concepto de cardinal de un conjunto, asociado al concepto de elementos.

c) La interpretación de la clasificación de los conjuntos determinados contextualizados a la situación modelada.

Notación de conjuntos

Al trabajar con conjuntos has utilizado dos formas para determinarlos: por **extensión** (enunciando los elementos que lo integran) y por **descripción** (estableciendo las propiedades o características de todos sus elementos, así como por fórmulas).

▲ ¿Cómo se denotan los conjuntos que se determinan por extensión?

Considera del ejemplo 1.1, que al escribir por extensión el conjunto B de los órganos que conforman el sistema digestivo, se puede representar:

B = {boca, faringe, esófago, estómago, intestino delgado, intestino grueso, recto, ano, glándulas anexas (salivales, páncreas e hígado)}.

Esta forma de escribir el conjunto se denomina **notación tabular**.

Recuerda que...

En la notación tabular de un conjunto no es preciso escribir los elementos en un orden determinado, así como escribir más de una vez el mismo elemento. Por ejemplo, en los conjuntos $M = \{m, m, p, q, q, n, n, n\}$ y $N = \{m, n, p, q\}$ se aprecia que todo elemento de M pertenece a N y recíprocamente, todo elemento de N pertenece a M. Tenemos por tanto que $M = N$.

▲ ¿Cómo se denotan los conjuntos que se determinan por descripción?

Observa del ejemplo 1.4, que al escribir por descripción el conjunto H: *conjunto de todos los números naturales cuyo cubo es menor que 200*, se han dado las propiedades o características de sus elementos, es decir, que está perfectamente determinado. Al escribirlo simbólicamente se tiene que: $H = \{n \in \mathbb{N}: n^3 < 200\}$.

Se lee: son todos los elementos n que pertenecen al conjunto de los números naturales, tales que n al cubo es menor que 200.

Esta forma de escribir el conjunto se denomina notación constructiva.

Ejemplo 1.6

Escribir en notación tabular y en notación constructiva el conjunto T de los números enteros cuyo cuadrado es mayor que 25 y menor o igual que 2 500.

Resolución:

Puede denotarse así: $T = \{6; -6; 7; -7; 8; -8; ...; 49; -49; 50, -50\}$ **notación tabular**

$T = \{x \in \mathbb{Z}: 25 < x^2 \leq 2\ 500\}$ **notación constructiva** ♦

Tanto la notación tabular, como la constructiva revelan las propiedades de los elementos del conjunto en cuestión y permiten conocer si estos pertenecen o no al conjunto dado.

Aplica tus conocimientos

¿Qué pasaría si tomamos al conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$*, como conjunto universo* U *del conjunto* T*, definido por la propiedad,* $25 < x^2 \leq 2\,500$*?*

¿Será el mismo conjunto dado en el ejemplo 1.6?

¿Existen conjuntos infinitos que se pueden escribir en notación tabular?

¿Un conjunto finito determinado por descripción, se puede escribir en notación tabular?

Utiliza el GeoGebra para representar al conjunto de todos los puntos de un plano α*, que están a la misma distancia de los lados de un* $\angle$AOB*. ¿Cómo se expresa ese conjunto en notación constructiva?*

Operaciones con conjuntos. Propiedades

De grados anteriores conoces que las operaciones con conjuntos son las que permiten obtener un nuevo subconjunto de un conjunto universo *U* formado por elementos de cualquier naturaleza, a partir de dos o más conjuntos dados o determinados en ese universo. Son diversas las situaciones en las que estas operaciones tienen aplicación.

> *Imagina que eres un informático que desarrollas un* software *para controlar las ventas de un producto de tipo* m *y otro de tipo* s*, en una red de tiendas* U*.*

El *software* debe cumplir los siguientes requisitos funcionales:

- Generar un reporte que devuelva la lista *Z* de tiendas que deben disponer de *m* y *s* para la venta.
- Generar un reporte que devuelva la lista *M* de tiendas que solo deben vender el producto *m*.
- Generar un reporte que devuelva la lista *S* de tiendas que solo deben vender el producto *s*.

Considerando que Z, M y *S son subconjuntos de tiendas del conjunto universo U de tiendas de la red,* ¿qué conocimientos *de la Teoría de conjuntos debes aplicar al trabajo con bases de datos, para satisfacer los requisitos funcionales del* software*?*

En la situación planteada, las tiendas *M* y *S* son caracterizadas respectivamente por la venta exclusiva de productos del tipo *m y s,* mientras que las tiendas *Z* por la venta de ambos productos. Se requiere controlar sus ventas mediante lo que se conoce en Informática como consultas. En este caso los requerimientos funcionales que generan dichas consultas se obtienen de aplicar las operaciones *unión* e *intersección* de conjuntos, al trabajo con bases de datos, es decir:

- $Z \cup M \cup S$, devuelve la lista *G* de tiendas que deben vender productos de tipo *m*, *s* o ambos.
- $Z \cap S$, devuelve la lista de todas las tiendas que tienen el producto del tipo *s*.
- $Z \cap M$, devuelve la lista de todas las tiendas que tienen el producto del tipo *m*.

Recuerda que...

La **unión** de los conjuntos *A* y *B* es el conjunto de todos los elementos que pertenecen al conjunto *A* o al conjunto *B* o a ambos, sin repetir ninguno de los elementos (figura 1.7).

Se denota por $A \cup B$ y se lee "*A* unión *B*".

En símbolos: $A \cup B = \{x: x \in A \text{ o } x \in B\}$

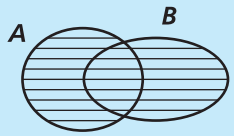


Fig. 1.7

La **intersección** de los conjuntos *A* y *B* es el conjunto de los elementos que son comunes tanto para *A* como para *B* (figura 1.8).

Se denota por $A \cap B$ y se lee "*A* intersección *B*".

En símbolos: $A \cap B = \{x: x \in A \text{ y } x \in B\}$

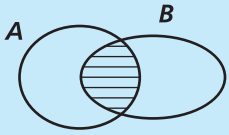


Fig. 1.8

Reflexiona

¿Qué relación de inclusión se puede establecer entre la unión y la intersección de dos conjuntos *A* y *B* de un universo *U*?

Puede ocurrir que dos conjuntos no tengan elementos comunes. En ese caso la intersección entre ambos conjuntos es el conjunto vacío Ø y decimos que los conjuntos son **disjuntos** (figura 1.9).

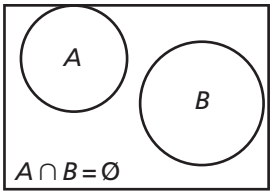


Fig. 1.9

¿? ¿Sabías que...?

En el mundo informático, al trabajar con bases de datos las operaciones unión e intersección, se indican con los términos en inglés: **or** y **and** llamados comandos.
El comando **or**, que significa **o**, representa la **unión**.
El comando **and**, que significa **y**, representa la **intersección**.
Por ejemplo, la operación $M \cup S$ se expresa con la siguiente consulta de base de datos: **select*from U where U.tipo s or U.tipo m**.

Supongamos que para el desarrollo del *software* se hace un nuevo requerimiento:

– Generar reporte que devuelva la lista *E*, que selecciona de la lista *G*, las tiendas que deben vender solo uno de los productos de los tipos *m* o *s*.

Observa que se resolvería aplicando a la base de datos una consulta que devuelva la lista de tiendas que aparecen en la lista *G*, y que, a la vez, no aparecen en la lista *Z*.

Se trata de una operación que representa la **diferencia** de los conjuntos *G* y *Z*.

Por tanto, la consulta a la base de datos, se obtiene de la operación: $G \setminus Z = E$.

Definición 1.1

La **diferencia** de los conjuntos *A* y *B* es el conjunto de elementos que pertenecen a *A*, pero no a *B*.
Se denota: $A \setminus B$ y se lee, "*A* diferencia *B*"
En símbolos:
$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$ (figura 1.10)
Análogamente:
$B \setminus A = \{x : x \in B \text{ y } x \notin A\}$ (figura 1.11)

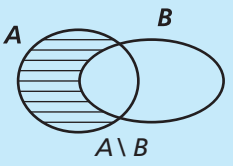


Fig. 1.10

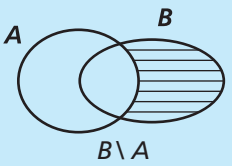


Fig. 1.11

Para el desarrollo del mismo *software*, se puede especificar otro requisito funcional que requiere la aplicación de la operación diferencia de conjuntos y es el siguiente:

– Generar reporte que devuelva la lista de tiendas de la red *U*, que no disponen de ninguno de los productos del tipo *m* y *s*.

Observa, que esta consulta devuelve la lista de tiendas que se obtiene de la diferencia entre el conjunto universo *U* y el conjunto *G* de tiendas que venden productos de cualquiera de los tipos *m* y *s* o de ambos.

El resultado de la operación es el **complemento** del conjunto *G*.

Luego, la consulta a la base de datos se obtiene de aplicar la operación $U \setminus G = G^c$.

Definición 1.2

El **complemento** de un conjunto *A* en relación con el universo *U* es el conjunto cuyos elementos pertenecen al conjunto *U*, y que no pertenecen al conjunto *A*.
Es decir, es la diferencia del conjunto universo *U* con respecto al conjunto *A* (figura 1.12). Se denota por A^c y se lee "complemento de *A*".
En símbolos: $A^c = \{x : x \in U \text{ y } x \notin A\}$.

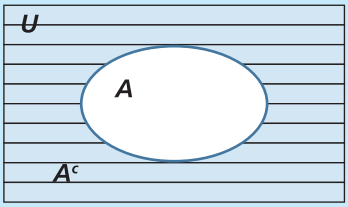


Fig. 1.12

Ejemplo 1.7

En la competencia deportiva de la Copa FEEM municipal participan 60 estudiantes de un Consejo Popular. Compiten en natación 25 estudiantes, en atletismo 20, y hay 30 que solo compiten en deportes de mesa.

a) ¿Cuál es el cardinal del conjunto *D*, determinado por los estudiantes que practican dos deportes y de su complemento D^c?
b) Representar en un diagrama de Venn las relaciones entre los conjuntos determinados.

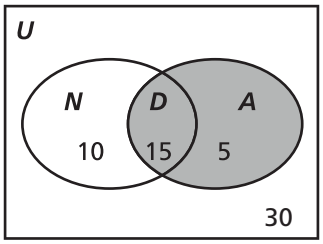
Resolución:

a) Como hay 30 estudiantes que compiten solo en deportes de mesa, entonces los otros 30 practican solo natación (*N*), solo

atletismo (A) o ambos deportes (D), pero 25 + 20 = 45, por tanto hay 15 que participaron en ambos deportes, luego el conjunto $D = (N \cap A)$ y $\#D = 15$.

D es un subconjunto de U, entonces $U \setminus D = D^c$ y $\#D^c = 45$.

b) La relación se representa en el diagrama de Venn de la figura 1.13.



♦

Fig. 1.13

Reflexiona

¿Qué consideraciones pudieran hacerse en relación con el conjunto universo del ejemplo 1.7?

En general, las operaciones entre conjuntos cumplen determinadas propiedades y relaciones:

Tabla 1.2

Operación	Propiedades y relaciones
Unión $A \cup B$	▪ $A \cup B = B \cup A$, son el mismo conjunto (propiedad conmutativa) ▪ Si A, B y C son conjuntos cualesquiera, entonces: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (propiedad asociativa) ▪ A y B son ambos subconjuntos de $A \cup B$, es decir: $A \subset (A \cup B)$ y $B \subset (A \cup B)$
Intersección $A \cap B$	▪ $A \cap B = B \cap A$ son el mismo conjunto (propiedad conmutativa) ▪ Si A, B y C son conjuntos cualesquiera, entonces: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (propiedad asociativa) ▪ Cada uno de los conjuntos A y B contiene como subconjunto a $A \cap B$, es decir: $(A \cap B) \subset A$ y $(A \cap B) \subset B$ ▪ Si A y B son conjuntos disjuntos, entonces $A \cap B = \emptyset$

Diferencia $A \setminus B$	■ El conjunto A contiene como subconjunto a la diferencia $A \setminus B$, es decir: $A \setminus B \subset A$ ■ Los conjuntos , $A \setminus B$, $A \cap B$ y $B \setminus A$, son mutuamente disjuntos, luego la intersección de dos cualesquiera es vacía, es decir: $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = (A \setminus B) \cap (B \setminus A) = (A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$
Complemento $U \setminus A = A^c$	■ La unión de cualquier conjunto A y su complemento A^c es el conjunto universo U, es decir: $A \cup A^c = U$. ■ El complemento del conjunto universo U, es el conjunto vacío $\emptyset$, y viceversa, es decir: $U^c = \emptyset$ y $\emptyset^c = U$. ■ El complemento del complemento de un conjunto A, es el conjunto A mismo, es dcir: $(A^c)^c = A$. ■ La diferencia de A y B es igual a la intersección de A y el complemento de B, es decir: $A \setminus B = A \cap B^c$.

La demostración de las relaciones presentadas en la tabla 1.2 se pueden realizar a partir de las definiciones de las operaciones conjuntistas estudiadas.

Ejemplo 1.8

Demostrar que el conjunto $A \cap B$ es un subconjunto de los conjuntos A y B.

Resolución:

Sea x un elemento cualquiera de $A \cap B$, significa que $x \in A$ y $x \in B$ por definición de intersección. Luego $A \cap B \subset A$ e igualmente $A \cap B \subset B$.♦

Reflexiona sobre lo aprendido

1. Sea M el conjunto formado por las consonantes de la palabra "**restauración**". Determina cuál de las afirmaciones es incorrecta y argumenta tu decisión.

   a) $r \in M$ b) $r \subset M$ c) $\{r\} \in M$ d) $\{r\} \subset M$ e) $\#M = 6$ f) $M^c = \{a,e,i,o,u\}$.

2. ¿De cuántas formas diferentes se puede escribir en notación constructiva, el conjunto $P = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$?
3. En una entrevista a un grupo de médicos cubanos, estos manifestaron que cada uno de ellos había participado al menos en una misión internacionalista en el continente africano o en América Latina. En los países de África cumplieron misión 26 de ellos, mientras que 23 cumplieron misión en América Latina. Si 19 de ellos participaron en ambos

continentes, determina el total de médicos y el número de ellos que solo ha participado en uno de los dos continentes.

3.1 Modela una situación similar en la cual reflejes la participación de médicos de la brigada internacionalista Henry Reeve, en el mundo.

4. En general para dos conjuntos *A* y *B* cualesquieras de un universo *U*, se presenta una de las situaciones representadas en los diagramas de Venn de la figura 1.14:

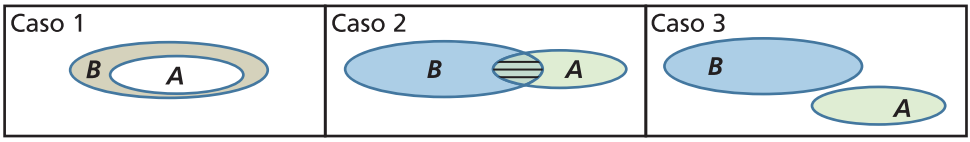


Fig. 1.14

4.1 Escribe para cada caso, tres proposiciones verdaderas, que expresen la relación, que se puede establecer entre los conjuntos *A* y *B* representados en los diagramas de Venn o el resultado de realizar alguna operación con ellos.

4.2 Decide con tus compañeros sobre la veracidad de las proposiciones elaboradas, que permitan concluir el tema estudiado.

4.3 ¿Cómo demostrar para el caso 3, que si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \subset B^c$?

5. ¿Cómo expresarías la propiedad distributiva de la unión con respecto a la intersección, de tres conjuntos *A, B* y *C* cualesquiera, contenidos en un universo *U* para el caso de que no sean disjuntos?

Conéctate

Informate sobre:

- los principales aportes de Georg Cantor a la Teoría de Conjuntos;
- la historia de los diagramas de Venn y su presencia en el arte y la arquitectura.

Ejercicios del epígrafe 1.1

Conjuntos y subconjuntos

1. Argumenta la veracidad o falsedad de las proposiciones siguientes.

a) Los conjuntos se pueden presentar declarando todos sus elementos o enunciando las propiedades que estos cumplen para pertenecer al conjunto.

b) Un conjunto es infinito si el proceso de contar todos sus elementos es finito.
c) El conjunto de todos los ríos del planeta Tierra es finito.
d) El conjunto de todos los números enteros positivos menores que –1 es el conjunto {0}.

2. Clasifica los conjuntos siguientes en *finito, infinito* o *vacío.* Argumenta tu decisión.

a) Conjunto de consonantes del alfabeto español.
b) Conjunto de todos los Joven Club de tu provincia.
c) Conjunto de los números naturales primos.
d) Conjunto de todos los números enteros cuyo módulo o valor absoluto sea 99.
e) Conjunto de miembros de la FEEM de tu escuela que son mayores de 20 años.

2.1 Plantea ejemplos de conjuntos que sean finitos, infinitos y vacíos. Determina el cardinal en los casos en que sea posible.

3. Sea S: el conjunto de todos los números naturales que son cuadrados perfectos. Utiliza los símbolos $\in$ y $\notin$ para obtener proposiciones verdaderas, que relacionen al conjunto S, con los números siguientes:

a) 2 b) 25 c) – 64 d) 0,008 1 e) 121 f) 624

3.1 Plantea una proposición verdadera en la que tengas que utilizar el símbolo $\in$, para los casos en que utilizaste el símbolo $\notin$.

4. Sean los conjuntos $M = \{1;2;3;4;5\}$, $A = \{1;4;5\}$, $B = \{2\}$ y $D = \{2;5;6\}$ Selecciona uno de los símbolos $\subset$ y $\not\subset$, para expresar una proposición verdadera en cuanto a las relaciones de inclusión entre:

a) El conjunto M y el conjunto P de los números primos
b) El conjunto A y el conjunto M
c) El conjunto B y el conjunto A
d) El conjunto D y el conjunto T de todos los divisores del número 30
e) El conjunto $A \cup B$ y el conjunto M
f) El conjunto $A \cap D$ y el conjunto M
g) El conjunto $D \setminus B$ y el conjunto M

4.1 Plantea una proposición verdadera en la que tengas que utilizar el símbolo $\subset$, para los casos en que utilizaste el símbolo $\not\subset$.

5. Demuestra que:

a) $A \not\subset B$, si $A = \{2;3;4;5\}$ y $B = \{x: x \text{ es par}\}$.
b) $(A \setminus B) \subset A$.

Notación de conjuntos

6. Sea el conjunto $M = \{2;4;6;8;10;12;14;16\}$

a) Indica en qué notación está expresado el conjunto M.
b) Escribe dicho conjunto en notación constructiva.

7. Escribe en notación constructiva los siguientes conjuntos:

a) El conjunto de los números enteros comprendidos entre –5 y 43 ambos inclusive.
b) El conjunto de los números enteros comprendidos entre –205 y 178.
c) El conjunto de los números naturales impares mayores que 121.

8. Sea el conjunto universo U, formado por todas las letras del alfabeto. Si el conjunto $T = \{a,b,c,d,e\}$ ¿cuál es el complemento del conjunto T? Exprésalo en notación tabular.

9. Sea $V = \{0;2;4;6;8;10;12;14;...\}$, el conjunto de todos los números pares. Si se considera como conjunto universo al conjunto de los números naturales.

a) ¿Cuál es el complemento del conjunto V?
b) Exprésalo en notación tabular y en notación constructiva.

10. Sea $U = \left\{\sqrt{5}; -4,2; -6; 15; \frac{4}{9}; 17\right\}$ el conjunto universo. Escribe no menos de 4 proposiciones verdaderas o falsas, en las que utilices los símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$ y $\not\subset$. Verifica con tus compañeros la veracidad de las proposiciones.

Operaciones con conjuntos. Propiedades

11. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ es primo}; x < 20\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N}: 2 \leq x \leq 8\}$

a) ¿Cuál es el $\#(A \cap B)$? Fundamenta.
b) Representa la operación en un diagrama de Venn.
c) ¿Qué inferencias puedes hacer sobre otras relaciones y operaciones que se pueden realizar entre los conjuntos A y B a partir del diagrama de Venn obtenido en el inciso b?

12. En el diagrama de Venn de la figura 1.15, se representan las notas de Matemática de una muestra de estudiantes seleccionada de tres grupos de una escuela. La selección de la muestra cumple la siguiente condición: *los seleccionados de un mismo grupo tienen notas diferentes*.

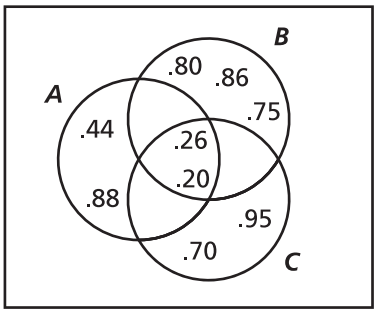


Fig. 1.15

12.1 Escribe la operación que permite obtener:

a) El conjunto de notas alcanzadas por los estudiantes de la muestra seleccionada.

b) El conjunto de notas de los estudiantes del grupo *C*, que no se repiten en otros grupos.

12.2 Selecciona la respuesta correcta:

a) La operación que permite obtener el conjunto de notas de los estudiantes que están por debajo de 30 puntos es:

$A \cap C$; $B \cup A$; $A \cap B \cap C$; $C \setminus (A \cap B)$

12.3 Escribe al menos dos proposiciones verdaderas, a partir de la información estadística que ofrecen los datos de la muestra, en el diagrama de Venn.

13. El diagrama de la figura 1.16 representa la distribución de 24 de los 36 estudiantes del grupo décimo *A* en cuanto a su participación en los concursos de Matemática (Mat), Física (Fís) e Informática (Inf) a nivel de grupo. Los números colocados en cada región del diagrama informan sobre la cantidad de elementos de los conjuntos representados.

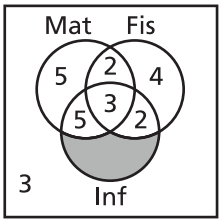


Fig. 1.16

a) ¿Qué cantidad de estudiantes solo participaron en el concurso de Matemática?

b) ¿Cuántos estudiantes solo participaron en el concurso de Informática?

c) ¿Cuántos estudiantes se presentaron solo a dos concursos en estas asignaturas?

d) ¿Cuántos estudiantes se presentaron en los tres concursos?

e) ¿Cuántos estudiantes del grupo participan al menos en un concurso?

14. En un grupo de 22 jóvenes se realizó una encuesta sobre sus preferencias para emplear el tiempo libre. Se obtuvo que a nueve de ellos les gusta el teatro, a 13 la televisión y a 10 el cine. Sin embargo, solo gustan de la televisión cinco jóvenes, mientras que, a tres de ellos, les gustan las tres opciones; cuatro gustan del teatro y la TV, y solo a dos les gusta el teatro y el cine.

a) ¿A cuántos de estos jóvenes solo les gusta el teatro?
b) ¿A cuántos les gusta solamente la TV y el cine?
c) ¿A cuántos jóvenes del grupo seleccionado no les gustan estas opciones recreativas?

1.2 El dominio de los números reales

La evolución de la noción de número que hoy tenemos es el resultado de la necesidad de explicar o solucionar, desde la Matemática, determinadas situaciones de la vida práctica. En consecuencia, durante el desarrollo histórico de la humanidad, los hombres han creado nuevas teorías cada vez más abstractas y completas, que han dado lugar a sucesivas ampliaciones de los conjuntos y dominios numéricos.

De la historia

Las primeras nociones de "número" tienen su origen en la prehistoria. Contribuyeron a su evolución los chinos, egipcios, romanos, griegos, y los pueblos de la antigua babilonia, así como las civilizaciones de mesoamérica. Por ejemplo, de esta última se conoce que los pueblos de la civilización maya fueron los primeros en utilizar el cero, en el principio posicional de base 20.

Existen evidencias que para representar números utilizaban solo tres símbolos: la concha que representaba el cero, el punto equivalente al 1 y la barra equivalente a cinco puntos (figura1.17).

Sin embargo, en la actualidad se utiliza el sistema de posción decimal (base 10), que fue introducido en Europa a partir de las primeras traducciones al latín de las obras del matemático árabe Al Jwarizmi, de quien se conoce el término algoritmo. Este sistema de posición fue generalizado después de la Revolución francesa.

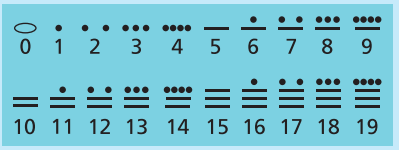


Fig. 1.17

Cuando necesitas indicar cantidades de objetos, contar u ordenar, utilizas al conjunto de los números naturales {0; 1; 2; 3; …}; a esas cualidades te refieres al hablar de número cardinal y número ordinal. Cuando lees que la mortalidad infantil es de –1 punto porcentual con respecto al año anterior, identificas la utilidad del conjunto de los números enteros. Si lo que quieres es expresar una medida (de diversas magnitudes: longitud, superficie o volumen) como cociente o razón, parte o todo, como cuando dices que $\frac{3}{5}$ de la población de un territorio son mujeres, utilizas números racionales y en otros casos, números irracionales como $\pi = 3{,}141\ 5\ldots$, que expresa la inconmensurabilidad de la medida de la longitud de una circunferencia con respecto a su diámetro. Estos conjuntos, son subconjunto del dominio de los números reales. Sin embargo, sería interesante saber si:

▲ ¿Todos los conjuntos numéricos constituyen dominios numéricos? ¿qué condiciones lo determinan?, ¿cuáles relaciones y operaciones conjuntistas se pueden realizar con subconjuntos o intervalos de números reales?, ¿qué otras operaciones de cálculo se pueden realizar con números reales?

Relaciones conjuntistas en el dominio de los números reales. Propiedades

En los grados anteriores conociste que la existencia de distintos tipos de números adquiere sentido por su utilidad para explicar situaciones, tales como: los resultados de un censo de población; los índices de natalidad infantil en su relación con el envejecimiento poblacional; los índices de morbilidad de pandemias como el Ébola o la Covid-19 en un país determinado, los efectos del deterioro del medio ambiente, los fenómenos sísmicos, el rendimiento de un atleta durante el ciclo olímpico, el cumplimiento de los planes económicos y los resultados de investigaciones científicas, entre otros estudios que requieren del procesamiento de datos.

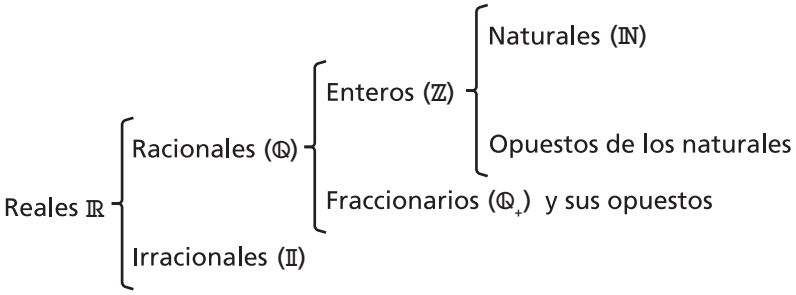


Fig. 1.18

Los conjuntos numéricos, de los cuales son elementos los tipos de números que utilizas, se resumen en la figura 1.18.

Como se aprecia en el resumen, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ está formado por la unión del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ y el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$. De manera que un número real, o bien es racional o bien irracional y no ambas cosas a la vez, es decir, se cumple que: $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

Recuerda que...

- El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ está formado por expresiones decimales cuyo desarrollo es finito o infinito periódico. En símbolos:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z};\ q \neq 0 \right\}$$

- El conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ está formado por expresiones decimales infinitas no periódicas. No se puede representar por fracciones de la forma $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

Saber más

Se conoce mediante el papiro de Ahmés (o de Rhind) (figura 1.19) que hace casi cuatro mil años, se usaban fracciones numéricas. Por ejemplo, para representar fracciones unitarias, como $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{5} \ldots$, se escribía en el lugar del numerador un punto o un círculo.

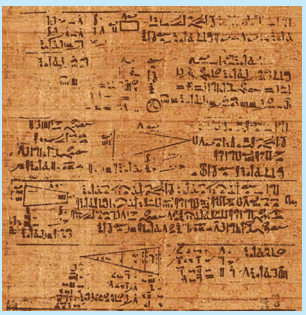


Fig. 1.19

Ejemplo 1.9

Determinar cuáles de los números siguientes son racionales o irracionales. Argumentar en cada caso.

a) 3 b) $5,57\overline{89}$ c) $-\sqrt{5}$ d) $-\frac{5}{3}$ e) $1,41$

Resolución:

a) $3 \in \mathbb{Q}$, porque $3 \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

b) $5,57\overline{89} \in \mathbb{Q}$, porque es una expresión decimal infinita periódica.

c) $-\sqrt{5} \in \mathbb{I}$, porque $-\sqrt{5} = -2,23606797\ldots$ es una expresión decimal infinita no periódica.

d) $-\frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$, porque es una fracción negativa.

e) $1,41 \in \mathbb{Q}$, porque se puede expresar como fracción cuyo numerador y denominador son números enteros positivos, por ejemplo $1,41 = \frac{141}{100}, \frac{1410}{1000}, \frac{14100}{10000}$ y así sucesivamente. ♦

Reflexiona

¿De qué otra forma definirías a un número real?

▲ ¿Todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ son dominios numéricos?

En Matemática, cuando se habla de conjunto numérico se alude a un conjunto de números, pero cuando se hace referencia a un *dominio numérico*, se está aludiendo tanto a un conjunto numérico como a las operaciones y relaciones que se pueden establecer entre sus elementos, pues son estas y sus propiedades las que permiten dotarlos de cierta "estructura".

En los dominios numéricos conocidos, la adición y la multiplicación se realizan sin restricciones y al adicionar o multiplicar dos cualesquiera de sus elementos, siempre el resultado es otro número que pertenece a dicho conjunto numérico, es decir, son operaciones internas.

Reflexiona

¿La suma o el producto de dos números irracionales es necesariamente un número irracional?

Ejemplo 1.10

Dados los números irracionales $r = \sqrt{2}$; a = 0,1010010001… y b = 0,0101101110… verificar si el producto y la suma indicados son números irracionales:

a) r^2 b) $a + b$

Resolución:

a) $r^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{N}$ y aunque $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, se tiene que $r^2 = 2 \notin \mathbb{I}$.

b) $a + b$ = 0,11111… $\in \mathbb{Q}$ por ser una expresión decimal periódica, de período 1 y aunque a = 0,1010010001… $\in \mathbb{I}$ y b = 0,0101101110… $\in \mathbb{I}$, se puede asegurar que $(a + b) \notin \mathbb{I}$. ♦

El conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$), no constituye un dominio numérico, puesto que en este conjunto la adición y la multiplicación no son operaciones internas.

Ejemplo 1.11

Sea el conjunto $F = \left\{-17; 10^2; 0{,}13; -1{,}4; \sqrt{5}\right\}$. Ubicar en un diagrama de Venn, los elementos de F, según el dominio numérico más restringido al cual pertenecen.

Resolución:

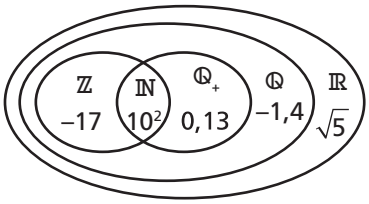


Fig. 1.20

Observar (figura1.20) que aun cuando $\sqrt{5} \in \mathbb{I}$, este conjunto no se identifica con su símbolo en este diagrama de Venn, puesto que solo se han representado dominios numéricos ♦

Reflexiona

¿Qué relaciones conjuntistas se pueden expresar entre los dominios numéricos, según lo observado en el diagrama de Venn de la figura 1.21?

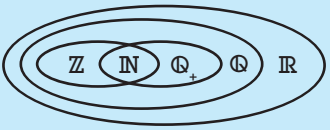


Fig. 1.21

Saber más

Aunque el conjunto de los números irracionales no constituye un dominio numérico, a él pertenecen números interesantes muy conocidos como $\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 56\ldots$ y la constante $\pi = 3,141\ 592\ 653\ldots$; este último suele emplearse en ciencias e ingeniería con una aproximación de hasta 12 cifras decimales, y con cincuenta se podría describir con precisión la curvatura del universo con un error menor que el tamaño de un protón. Además, son muy conocidos por su presencia en situaciones de la realidad:

- El número Phi (fi) $\Phi = 1,618$ que representa la razón entre dos cantidades y es llamado así en honor al escultor griego Fidias, también es conocido como el **número de oro**. Una aproximación de este número se puede obtener del cociente entre el largo y el ancho de un huevo de gallina (figura 1.22).

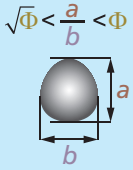


Fig. 1.22

- La constante e = 2,718 281 828 4..., conocido como **número de Euler** o **constante de Napier**, es el valor aproximado de la expresión $(1 + 1/n)^n$. Es destacable su utilidad en problemas de cálculo y su presencia en los modelos matemáticos aplicados a diversas ciencias, algunos de los cuales encontrarás en este libro.

La creación del dominio de los números reales $\mathbb{R}$, y en particular el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$, tiene gran importancia, por cuanto contribuyó a resolver el problema de la *medida*. Además, desde el punto de vista geométrico, se logra explicar que existe una correspondencia biunívoca entre $\mathbb{R}$ y los puntos de una recta, es decir, a cada número real se le hace corresponder un punto de la recta nuérica y viceversa, por cuanto se dice que es un conjunto denso (figura 1.23).

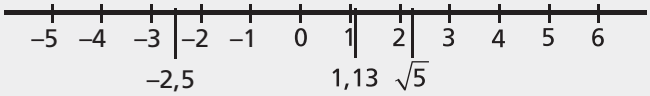


Fig. 1.23

Recuerda que...

- Son positivos los números reales mayores que cero y los negativos, son sus opuestos.
- El cero no es ni positivo ni negativo, luego el opuesto del cero es el propio cero.

Reflexiona

Al referirte al conjunto de los números reales a los que pertenecen los números positivos y el cero lo debes nombrar como **conjunto de números reales no negativos**.
¿Cómo denominarías al conjunto de números reales a los que pertenecen los números negativos y el cero?

El dominio de los números reales es un conjunto ordenado que satisface las propiedades siguientes:

Para los números reales a, b y c cualesquiera se cumple que:

a) $a < b$, o $a = b$ o $b < a$. Tricotomía
b) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. Transitividad
c) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$. Monotonía de la adición
d) Si $a < b$ y c es positivo entonces $ac < bc$
e) Si $a < b$ y c es negativo $ac > bc$

} Monotonía de la multiplicación

Ejemplo 1.12

Ordenar de manera ascendente los números reales $\frac{9}{26}; \frac{3}{10}; \sqrt{2}; 1,\overline{6}; \frac{1}{4}; 1\frac{1}{2}$.

Resolución:

Al expresar los números dados en la misma notación se tiene que:

$$\frac{9}{26} = 0,346\ldots; \frac{3}{10} = 0,\overline{3}\ ;\ \sqrt{2} = 1,414\ldots; 1,\overline{6} = 1,66\ldots;\ \frac{1}{4} = 0,25;\ 1\frac{1}{2} = 1,5\,.$$

Por tanto: $\frac{1}{4} < \frac{3}{10} < \frac{9}{26} < \sqrt{2} < 1\frac{1}{2} < 1,\overline{6}$ ♦

Reflexiona

¿Cuál es el procedimiento para comparar dos números fraccionarios?

Ejemplo 1.13

Del subconjunto de números reales:

$$\left\{-4;\ 0,6;\ 320;\ 0,1;\ -3,9;\ -\frac{1}{5};\ -4,26;\ 0,0125\ldots\right\}$$

Fundamentar: ¿cuál es el mayor número?,y ¿cuál es el menor?

Resolución:

- 320 es el mayor, porque de los números reales positivos es el que tiene mayor módulo o valor absoluto.
- – 4,26 es el menor, porque de los números reales negativos es el que tiene mayor módulo o valor absoluto. ♦

Recuerda que...

El módulo o valor absoluto de un número real x, denotado por $|x|=\begin{cases} x; x \geq 0 \\ -x; x < 0 \end{cases}$

- Desde el punto de vista geométrico, el valor absoluto de x es la distancia del punto que corresponde a x en la recta real al punto que corresponde al 0.
- La distancia entre dos puntos de la recta numérica que les corresponden los valores a y b es $|a - b| = |b - a|$.

Investiga y aprende

Plantea ejemplos de situaciones cotidianas donde se manifiesten limitaciones de las operaciones de cálculo en un dominio numérico y que requieran su solución en un dominio más amplio $\mathbb{R}$.

Es decir, de $\mathbb{N}$ $\rightarrow$ $\mathbb{Z}$ $\rightarrow$ $\mathbb{Q}$ $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ $\rightarrow$ $\mathbb{Q}_+$ $\rightarrow$ $\mathbb{R}$

Aplica tus conocimientos

1. *Utiliza el GeoGebra para explicar la relación entre los números irracionales $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ y la Geometría. ¿Se puede obtener una relación para $\sqrt{6}$?*

2. *La figura 1.24 representa los números cuyas distancias desde cero es una de las opciones siguientes:*

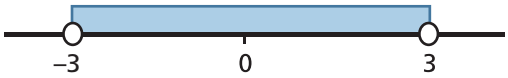


Fig. 1.24

a) mayor que –3

b) igual a 3 o menor o igual a –3

c) menor que 3

d) mayor que –3 y menor que 3

3. *En la recta de la figura 1.25 están representados los números 0,* a, b, c *y* d (todas las subdivisiones son iguales).

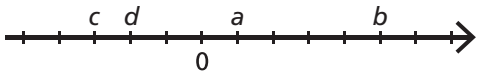


Fig. 1.25

Decide si se cumple que:

a) $3c > -b$ *b)* $4a < b$

c) $-d > a$ *d)* $b = 2a + c$

e) $d = c + a$ *f)* $b \neq a - 3$

g) $-c - d = 2a + b$ *e)* $|c + d| = a + b$

3.1 Modifica las condiciones de los casos que consideras imposibles, de manera que se cumplan las relaciones indicadas.

Conéctate

Ver en Paqueteduques:

Videos matemáticos

- ¿Podemos encontrar al Quijote en los decimales del número Pi?
- Einsten, los ríos y el número Pi
- El número Fi

Investigativa sobre El hombre de Vitruvio.

Intervalos numéricos. Operaciones conjuntistas con intervalos

Para realizar un estudio sobre el rendimiento deportivo de un grupo de atletas, se requiere registrar entre otras variables, sus estaturas en metros. La información se puede observar en la tabla de frecuencia de datos agrupados en clases (tabla1.3), donde Fi representa las frecuencias absolutas. Entre los atletas hay uno que mide justamente 1,95 m. ¿Dónde se ubica este dato si hay dos clases cuyos límites (superior e inferior) coinciden con ese valor numérico?

Tabla 1.3

Clases	Fi
$1{,}75 \leq x < 1{,}85$	
$1{,}85 \leq x < 1{,}95$	
$1{,}95 \leq x < 2{,}00$	
$2{,}00 \leq x < 2{,}05$	
$2{,}05 \leq x < 2{,}10$	
$2{,}10 \leq x < 2{,}15$	

Si las clases representan subconjuntos de números reales, por ser la estatura una variable continua:

▲ ¿Se podrá nombrar y escribir las clases de otra forma?

Los intervalos numéricos son subconjuntos de números reales, cuyos extremos pueden pertenecer o no al subconjunto numérico que describen.

En general para dos números reales a y b cualesquiera se tiene que:

a) Un **intervalo cerrado** $[a; b]$ de extremos a y b es un segmento en el que se incluyen estos extremos (figura 1.26):

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$



Fig. 1.26

b) Un **intervalo abierto** $(a; b)$ de extremos a y b en el que se excluyen estos extremos (figura 1.27):

$(a; b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$



Fig. 1.27

c) Un **intervalo semiabierto** $(a;b]$ o $[a;b)$ de extremos a y b es un segmento con un extremo incluido y el otro excluído, pueden ser:

$(a;b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$
(se excluye a y se incluye b)

$[a;b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
(se incluye a y se excluye b)

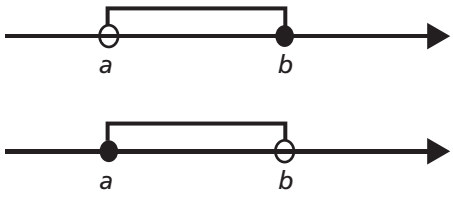


Fig. 1.28

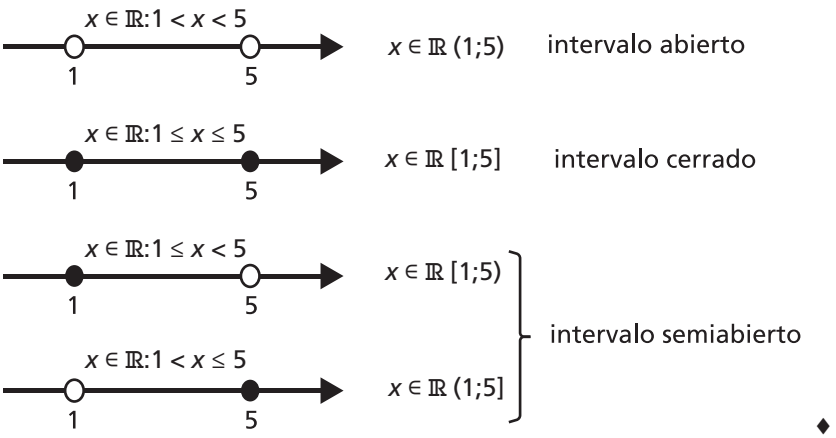
¡Atención!

Observa la correspondencia entre los círculos sin relleno y con relleno de la representación gráfica, con respecto al uso de paréntesis "( )" y corchetes "[ ]" para indicar si se incluyen o no los extremos del intervalo.

Ejemplo 1.14

Dados los números reales 1 y 5, representar gráficamente y en notación constructiva los intervalos abierto, cerrado y semiabierto, que determinan.

Resolución:



♦

Fig. 1.29

Reflexiona

Para el estudio del rendimiento deportivo de los atletas, presentado en la situación inicial de este epígrafe, ¿en qué clase se debe ubicar el dato 1,95? ¿De qué otra forma se puede nombrar o denotar las clases en la tabla de frecuencias? Socializa tu criterio con tus compañeros de grupo.

En general, el intervalo:

a) $(-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$ es el conjunto formado por todos los números reales menores o iguales que b.
b) $(-\infty;b) = \{x \in \mathbb{R}: x < b\}$ es el conjunto formado por todos los números reales menores que b.
c) $(a;\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$ es el conjunto de todos los números reales mayores que a.
d) $[a;\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$ es el conjunto formado por todos los números reales mayores o iguales que a.

Ejemplo 1.15

Representar los intervalos numéricos siguientes en notación de intervalos y en notación constructiva.

a) El intervalo que comprende los valores reales, mayores que –3 y menores que 9.
b) El conjunto de valores mayores o iguales a – 7 y menores que cero.
c) Los valores reales **no negativos**.

Resolución:

	Notación de intervalo	Notación constructiva	Observaciones
a)	$(-3;9)$	$\{x \in \mathbb{R}: -3 < x < 9\}$	Para el intervalo abierto también se puede utilizar el corchete hacia fuera: $]-3;9[$
b)	$[-7;0)$	$\{x \in \mathbb{R}: -7 \leq x < 0\}$	Para el intervalo semiabierto se combinan los paréntesis y corchetes
c)	$[0;\infty)$	$\{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$	Son todos los números reales positivos y el cero. En este caso también se utiliza la expresión son todos los números reales **no negativos**. Además, ese conjunto es infinito hacia la derecha. ♦

La utilidad de los intervalos numéricos es significativa por su aplicación en la elaboración de tablas de frecuencias de datos agrupados en

clases, así como en otras situaciones matemáticas y de la vida cotidiana, en las que tiene sentido realizar operaciones conjuntistas con intervalos numéricos.

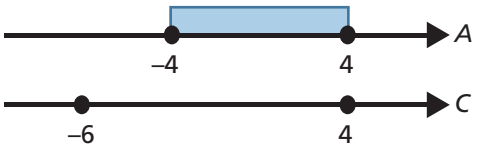
▲ ¿Cómo realizar las operaciones conjuntistas con intervalos numéricos?

Ejemplo 1.16

Dados los conjuntos de números reales: $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| \leq 4\}$, $B = (0;\infty)$ y $C = \{-6;4\}$; determinar: a) $A \cup C$ b) $A \cap B$ c) $A \setminus B$

Resolución:

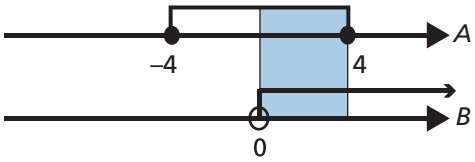
a)



$A \cup C = \{x \in \mathbb{R}: |x| \leq 4 \text{ o } x = -6\} = [-4;4] \cup \{-6\}$

Fig. 1.30

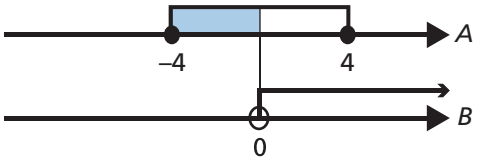
b)



$A \cap B = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x \leq 4\} = (0;4]$

Fig. 1.31

c)



$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R}: -4 \leq x \leq 0\} = [-4;0]$ ♦

Fig. 1.32

¡Atención!

Observa que en todos los casos se partió de la representación gráfica de los intervalos y de la operación conjuntista que se desea determinar.

Ejemplo 1.17

Para la filmación de una serie juvenil se realiza una convocatoria a estudiantes de la FEEM y la FEU, con las siguientes condiciones:

– las muchachas deben tener de 15 años a 18 años de edad y medir entre 1,25 m a 1,55 m.
– los muchachos deben tener de 16 años a 19 años y medir de 1,45 m a 1,60 m.

a) Representar gráficamente la operación que indica el intervalo numérico que comprende las edades de todos los estudiantes que asistan a la convocatoria.
b) ¿Cuál es el intervalo númerico que muestra la coincidencia de las estaturas de muchachas y muchachos? Representar gráficamente la operación conjuntista.

Resolución:

a) La operación que indica el intervalo numérico en que se encuentran las edades de todos los que asistan a la convocatoria es la **unión**. La figura 1.33 ilustra la representación gráfica

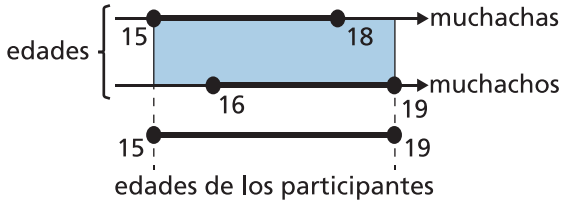


Fig. 1.33

b) El intervalo en que coinciden las estaturas de las muchachas y muchachos es [1,45;1,55]. El gráfico de la figura 1.34 representa la operación de **intersección** de los intervalos correspondientes a las estaturas exigidas en la convocatoria a muchachas y muchachos. ♦

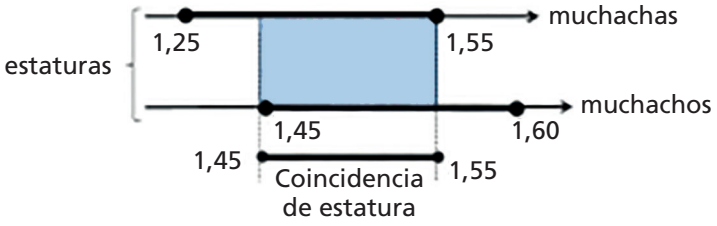


Fig. 1.34

Las operaciones de *unión*, *intersección* y *diferencia* de conjuntos, aplicadas a los intervalos numéricos, te serán de gran utilidad para la resolución de inecuaciones, la determinación de dominio de expresiones algebraicas y de funciones, que conocerás posteriormente en otros capítulos de este libro.

Investiga y aprende

¿En cuáles situaciones de la medicina o de otras áreas de tu interés tienen utilidad y significado los intervalos numéricos? Socializa algunos ejemplos con tus compañeros.

Reflexiona sobre lo aprendido

- Sea $A=\left\{\frac{a}{b};a,b\in\mathbb{N}\text{ y }b\neq 0\right\}$ y B el conjunto de los números enteros.

  Escribe una proposición verdadera con cada una de las condiciones siguientes:
  - Un conjunto de números que sea un subconjunto de A.
  - Un conjunto C determinado por dos números que pertenecen al conjunto $A\cap B$.
  - Un conjunto C determinado por los números que pertenecen al conjunto $A\cup B$.
  - Un conjunto C determinado por dos números que pertenecen al conjunto $A\backslash B$.

  Expresar en notación constructiva el resultado de las operaciones con intervalos indicados: a) $[2;7]\cup[3;8)$ b) $\left\{[0;1]\cap\left(-\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)\right\}\setminus\left(1;\sqrt{2}\right)$

Ejercicios del epígrafe 1.2

Relaciones conjuntistas en el dominio de los números reales. Propiedades

1. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Justifica las que consideres falsas.

a) $2\notin\mathbb{Z}$ b) $\{-2\}\not\subset\mathbb{Q}_+$ c) $2\in\{x\in\mathbb{Q}_+ : x\geq 2\}$

d) $\frac{4}{5}\in\mathbb{N}$ e) $2{,}236067\notin\mathbb{R}$ f) $\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}_+$

g) $\mathbb{Q}_+\subset\mathbb{Z}$ h) $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ i) $\sqrt{5}\in\mathbb{R}$

2. Utiliza los símbolos $(\in,\notin,\subset,\not\subset)$ para obtener una proposición verdadera, donde se relacione a:

a) $-9\frac{9}{5}$ y $\mathbb{N}$ b) $0,33\overline{33}$ y $\mathbb{R}$ c) $\frac{6}{3}$ y $\mathbb{N}$ d) $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$

e) $\sqrt{2}$ y $\mathbb{Q}$ f) $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ g) $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ h) π y $\mathbb{Q}$

i) 3,14 y $\mathbb{Q}$ j) $\mathbb{Q}_+$ y $\mathbb{Q}$ k) $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}_+$ l) 1,41 y $\mathbb{Q}_+$

3. Clasifica en racionales o irracionales a los números indicados. Explica por qué.

a) $7\,875\frac{1}{4}$ b) $\sqrt{4}$ c) $2+\sqrt{2}$ d) $-3\frac{1}{3}$ e) $6,\overline{25}$ f) $-\sqrt{9}+2$

3.1 Representa los números dados en un diagrama de Venn, atendiendo al conjunto numérico más restrigido al cual pertenecen.

4. Plantea para cada una de las relaciones (<, =, >) tres pares de números reales en diferentes formas de representación, que cumplan la relación de orden indicada.

5. Dadas las siguientes listas de números:

L_1: $-1,75; -8; \frac{1}{10}; 1; |0,5|; -1,6$ y L_2: $-3; -2,8; 0,2; -2\frac{1}{4}; \left|-\frac{3}{2}\right|; -\frac{\pi}{\pi}$

5.1 Ordena los números de la lista L_1 de forma ascedente y los de la lista L_2 de forma descendente.

5.2 Representa en una recta numérica 5 números reales expresados en diferentes notaciones, que cumplan la siguiente condición: - que sean mayores que el número mayor de la lista L_1 y menor que el número menor de la lista L_2.

6. En el siguiente acróstico se enumeran horizontalmente palabras que identifican operaciones y relaciones que se pueden establecer entre los conjuntos y los elementos que los conforman.

1 D I F E R E N C I A

2 O R D E N

3 I N C L U S I Ó N

S U B C O N J U N T O S

4 4 U N I Ó N

5 P E R T E N E N C I A

6 I N T E R S E C C I Ó N

7 C O M P L E M E N T O

8 S U M A

a) ¿Cuáles de las palabras enumeradas horizontalmente se corresponden con operaciones entre los conjuntos numéricos? Plantea un ejemplo.

b) ¿Cuáles de las palabras enumeradas horizontalmente se corresponden con relaciones entre los números que conforman los conjuntos numéricos? Plantea un ejemplo.

Intervalos numéricos. Operaciones conjuntistas con intervalos

7. Escribe en notación constructiva el intervalo de números reales representado en los gráficos de la figura 1.35.

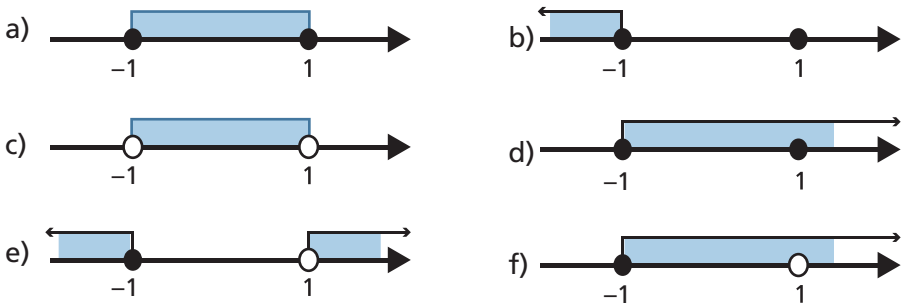


Fig.1.35

8. Utiliza los símbolos ($\in$, $\notin$) para obtener una proposición verdadera, donde se relacione a:

a) -3 y $(-3;4]$ b) $3{,}14$ y $[0{,}2\,\pi]$ c) $0,\overline{3}$ y $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$

d) $\sqrt[3]{9}$ y $[0;3)$ e) $1{,}41$ y $(\sqrt{2};\sqrt{3}]$ f) $\sqrt[3]{-29}$ y $(-\infty;3)$

8.1 Representa gráficamente las relaciones obtenidas entre los números reales y los intervalos numéricos anteriores.

9. Sean los conjuntos: $A = \{-3;0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R}: x > -3\}$

Selecciona las proposiciones verdaderas y argumenta las falsas.

a) Todos los elementos del conjunto A están incluidos en el conjunto B.

b) Entre los conjuntos A y B existen elementos comunes.

c) El conjunto B gráficamente puede representarse como:



Fig. 1.36

d) El primer elemento del conjunto B es $-2{,}9$.
e) Los elementos del conjunto A están ordenados descendentemente.
f) El conjunto unión de los conjuntos A y B es un conjunto infinito.
g) La intersección entre los conjuntos A y B es un conjunto finito.
h) $-3 \in A \cup B$
i) $0 \in A \cap B$

10. Dados los conjuntos: $P = \{x \in \mathbb{R}: |x| = 5\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R}: -5 \leq x < 5\}$.

10.1 Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. De las que consideres falsas, justifica por qué lo son.

a) 5 es un elemento del conjunto unión de los conjuntos P y B.
b) El último elemento del conjunto B es 4,9.
c) El menor número natural que pertenece a $P \cap B$ es 4.
d) $\sqrt[3]{-125} \in P$

10.2 Determina:

a) $P \cap B$ b) $P \cup B$ c) $P \setminus B$ d) $B \setminus P$

11. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R}: x \leq \sqrt{2} \text{ y } x \neq -1\}$ y $B = [0;2)$.
Indentifica la operación entre los conjuntos A y B, que corresponde a cada uno de los gráficos siguientes:

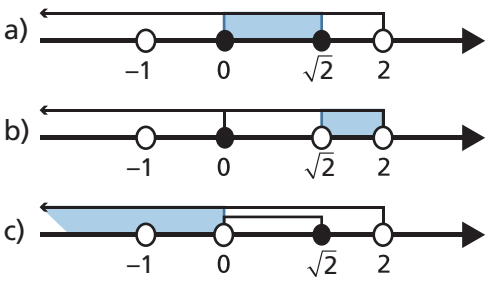


Fig.1.37

12. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. De las que consideres falsas, justifica por qué lo son en tu cuaderno.

a) $\{x \in \mathbb{R}: x \leq 3\} \subset \{x \in \mathbb{R}: x \leq \sqrt{20}\}$
b) $\{x \in \mathbb{N}: x \leq 3\} \subset \{x \in \mathbb{R}: x \leq \pi\}$
c) $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 2{,}\overline{2}\} \not\subset \{x \in \mathbb{R}: x \geq 2{,}2\}$
d) Para dos conjuntos C y D tales que: $C = \{x \in \mathbb{N}: 0 < x < 2\}$ y $D \subset \mathbb{N}$. Si $D \subset C$, entonces $D = \{1\}$.

13. Selecciona la respuesta correcta.

13.1 Si para dos conjuntos de números reales diferentes P y Q se cumple que: $P \cup Q = P$, entonces:

a) $P \subset Q$ b) $P \setminus Q = P$ c) $Q \subset P$ d) $P \cap Q = \varnothing$

13.2 Si el conjunto $A = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}_+$ entonces:

a) A es el conjunto de los números naturales.
b) $0 \in A$ c) $-1{,}5 \in A$ d) $-10 \in A$

13.3 Si el conjunto $A \cap B = \{4; -4; 5; -5; 6; -6\}$ entonces:

a) $A \subset \mathbb{N}$ b) $A \subset \mathbb{Q}_+$
c) El conjunto B contiene exactamente 3 elementos.
d) Al conjunto A pertenecen 6 elementos o más.

13.4 Si el conjunto $A \cap B = \{1; -1; \sqrt{2}; -2; \sqrt{3}; -3\}$ entonces:

a) $B \subset \mathbb{N}$
b) $B \cap A = \{-1; 1; -2; \sqrt{2}; -3; \sqrt{3}\}$
c) El conjunto A contiene exactamente 3 elementos.
d) $B \subset \mathbb{Q}$

13.5 Si el conjunto $A = [-2;2]$ y $B = \{x \in \mathbb{R}: x < 0\}$ entonces:

a) $A \subset B$ b) $B \setminus A = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -2\}$ c) $0 \in A$
d) $B \cap A = \{x \in \mathbb{R}: -2 \leq x \leq 0\}$

13.6 Si $A \subset \mathbb{R}$ y A^c es el conjunto vacío entonces:

a) $A = \mathbb{N}$ b) $A = \mathbb{Z}$ c) $A = \mathbb{Q}$ d) $A = \mathbb{R}$

1.3 Operaciones de cálculo con números reales. Propiedades

Las sucesivas ampliaciones de los dominios numéricos, por lo general, parten de la necesidad de resolver ciertas insuficiencias del dominio anterior, aunque mantienen las operaciones de cálculo y relaciones definidas anteriormente (principio de permanencia). Estas han resuelto las limitaciones de las operaciones de sustracción y división, así como la imposibilidad de resolver ecuaciones de la forma $x^2 - 2 = 0$ en el dominio de los números racionales, lo que permitió identificar la existencia de los números irracionales.

De la historia

Sobre el origen del signo de división se cuenta que las formas a / b y $\frac{a}{b}$, indicando la división de *a* por *b*, se le atribuyen a los árabes, y que la razón entre dos cantidades indicadas por el signo ":" apareció en 1657, en una obra de Oughtred. El signo "÷", que puedes encontrar en algunos textos, se considera como el resultado de combinar los dos signos existentes, "–" y ": ".

Generalmente la mayoría de las personas asocian la acción de calcular a las operaciones aritméticas fundamentales: adición, sustracción, multiplicación y división, así como a la potenciación de exponente entero y su operación inversa, la radicación.

Sin embargo, te has preguntado:

¿Cómo se resuelve una potencia de exponente real (racional o irracional)? ¿qué propiedades cumplen?,

¿Si la potenciación no es conmutativa, es posible que tenga otra operación inversa?

¿Qué operaciones de cálculo indican las teclas ***log*** *y* ***ln*** *de una calculadora científica?*

Sobre estas y otras interrogantes aprenderás en este epígrafe.

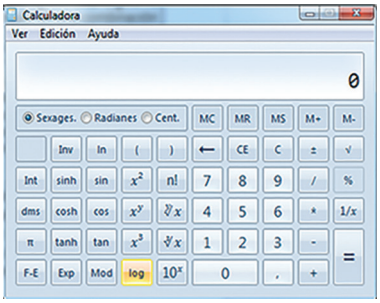


Fig. 1.38

En la actualidad, el uso de calculadoras, hojas electrónicas y otros medios auxiliares de cálculo, optimizan ese proceso, en cuanto a rapidez y seguridad, independientemente de la complejidad de las operaciones y el volumen de datos. Sin embargo, debes reconocer que para hacer un uso adecuado y racional de las bondades que ofrecen estos recursos o para participar en futuras innovaciones que emergen del desarrollo tecnológico y científico, se requiere tener conocimientos sólidos acerca de los conceptos, propiedades y procedimientos matemáticos de las operaciones de cálculo con números reales.

Operaciones fundamentales con números reales

Los procedimientos para calcular con números reales, se realizan de forma análoga a como se calcula con números racionales. En particular, para el caso de los números irracionales, es suficiente tomar las

aproximaciones racionales con igual número de cifras decimales. Por ejemplo, para hallar la suma de $\sqrt{2}$ y π hasta dos cifras decimales, se tiene que: $\sqrt{2} + \pi = 1{,}414... + 3{,}141... \approx 4{,}55$

En consecuencia las propiedades que cumplen las operaciones (adición, sustracción, multiplicación y división) en $\mathbb{Q}$, se transfieren a las operaciones en $\mathbb{R}$.

Recuerda que...

Tabla 1.4

Operaciones con números reales

Propiedades	Adición	Multiplicación
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
Distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	
Elemento neutro	El cero es el elemento neutro de la adición: $a + 0 = 0 + a = a$, para cualquier valor de a.	El uno es el elemento neutro de la multiplicación: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, para cualquier valor de a.
Elemento inverso	Para todo número existe un único número *opuesto* de a que se denota por $-a$, tal que: $a + (-a) = 0$	Para todo número $a \neq 0$ existe un único número $\frac{1}{a}$ (recíproco de a) tal que: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.
Operación inversa	La **sustracción** es la operación inversa de la adición.	La **división** es la operación inversa de la multiplicación.

Ejemplo 1.18

Identificar entre qué números enteros consecutivos se encuentra la solución de la operación siguiente: $\left[0{,}75 - \left(\frac{1}{a}\right)^2\right] : \left(\frac{3}{8} - \frac{5}{6}\right)$

Resolución:

Siguiendo el orden de las operaciones indicadas se tiene que:

$$\left[0{,}75-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]:\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{11}{24}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{24}{11}\right)=-\frac{12}{11}=-1\frac{1}{11}$$

La solución se encuentra entre los números enteros –2 y –1. ♦

Reflexiona

¿Qué debes tener en cuenta para efectuar operaciones combinadas con números reales?
¿Qué pasaría si cambian las condiciones de las operaciones indicadas en el ejemplo 1.18?
¿Qué significa hallar el valor numérico de una expresión?

Ejemplo 1.19

Justificar la validez de las siguientes expresiones si $a = 2$, $b = -1$ y $c = 1$:

a) $2a + bc = 4$ b) $a + b + c = 2$ c) $4a - b + c = 8$ d) $2a + 2bc = 4$

Resolución:

Al hallar el valor numérico de cada expresión se tiene que:

a) $2a + bc = 4$ es falsa, porque $2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3$
b) $a + b + c = 2$ es verdadera, porque $2 - 1 + 1 = 2 + 0 = 2$
c) $4a - b + c = 10$ es verdadera, porque $4 \cdot 2 - (-1) + 1 = 8 + 2 = 10$
d) $2a + 2bc = 4$ es falsa, porque $2 \cdot 2 + 2(-1) \cdot 1 = 4 - 2 = 2$ ♦

Las operaciones racionales con números reales y sus propiedades se aplican en la resolución de problemas, de la vida cotidiana y de la propia matemática.

Ejemplo 1.20

Un especialista de Endocrinología, atiende a un paciente que tiene un sobrepeso para su edad (212 lb) al que le indica realizar una dieta durante cuatro semanas. En la primera semana el paciente perdió 12,0 lb, en la segunda $3\frac{1}{2}$ lb más, pero la tercera semana coincidió con las fiestas de fin de año, por lo que aumentó 8,75 lb. Si en la cuarta semana hace un esfuerzo y pierde 6,0 lb y 8,0 oz.

a) ¿Cuál sería su peso en kilogramos, al terminar la dieta? Expresa el resultado con la mayor exactitud posible.

b) ¿Qué tanto por ciento del peso inicial representan los kilogramos rebajados?

c) ¿Cuántos kilogramos debió rebajar por semana, si consideras que siempre fuera la misma cantidad?

Recuerda que...

1 lb ≈ 16 oz 1 kg ≈ 2,2 lb

Resolución:

a) Como 6,0 lb y 8,0 oz se puede expresar como 6,5 lb, luego la operación sería la siguiente:

212 –12– 3,5 + 8,75 – 6,5 (propiedad asociativa)
= (212 + 8,75) + (–12 –3,5 – 6,5)
= 220,75 – 22 = 198,75

Como la respuesta debe ser en kilogramos, se tiene que: 198,75 : 2,2 ≈ 90,34 kg

Respuesta: Al terminar la dieta el peso del paciente sería aproximadamente 90 kg.

¡Atención!

Observa que como las cantidades de magnitudes están expresadas en unidades de medidas diferentes, es necesario convertir en una única unidad.

b) Para calcular el tanto por ciento del peso inicial que representan los kilogramos rebajados por el paciente se tiene que:
212 : 2,2 ≈ 96,4

96,4 – 90,3 = 6,1; luego $\frac{6,1}{96,4} \cdot 100 \approx 6,3$

Respuesta: el paciente rebajó 6,1 kg que representan aproximadamente el 6,3 % del peso inicial.

c) Al considerar que cada semana debía rebajar la misma cantidad de kilogramos se debe calcular el promedio (la media aritmética): 6,1 : 4 ≈ 1,5

Respuesta: por cada semana, el paciente debió rebajar un promedio de 1,5 kg.♦

Recuerda que...

El **tanto por ciento** significa cuántos tantos se toman de cada cien. Así por ejemplo el 1 % significa que se toma 1 de cada cien; al calcular el 1 % de 700 se obtiene 7, y si la cantidad total es 90, el 1% es 0,9.
Para los casos en que se requiere comparar un número, en su relación con cantidades muy grandes o muy pequeñas, se utiliza el **tanto por mil**; significa que se toma 1 de cada 1 000. Para denotar su significado se utiliza el símbolo ‰. Por ejemplo, si se busca el 3 ‰ de 5 000 se tomarán 15, y si la cantidad total es 2 500, el 3 ‰ es 7,5.

Ejemplo 1.21

Una provincia, que aplica con eficiencia el Programa de atención materno infantil, logró concluir el año pasado con una tasa de mortalidad infantil de 2,5 ‰ nacidos vivos. ¿Qué significado tiene ese dato, si se conoce que hubo en ese año 4 536 nacimientos?

Resolución:

Significa, en primer lugar, que sucedieron entre 2 y 3 fallecidos por cada mil nacidos vivos y, en segundo lugar, como se conoce la cantidad de nacidos en ese año y la tasa de mortalidad entonces se puede calcular la cantidad de fallecidos (F), antes del año de vida que sería: $2{,}5 = \dfrac{F}{4\,536} \cdot 1\,000$, de donde $F = \dfrac{2{,}5 \cdot 4\,536}{1\,000} \approx 11$

Respuesta: significa que de 4 536 nacidos vivos, fallecieron aproximadamente 11, antes del año de vida.♦

Investiga y aprende

1. ¿Cómo se ha comportado la taza de mortalidad infantil en tu municipio o provincia en los últimos cinco años? Haz una comparación con respecto a los datos de Cuba, así como con países del área o del mundo.
2. Elabora una tabla de frecuencia, con las causas que han incidido en los resultados alcanzados en Cuba.
3. Decide con tus compañeros sobre las causas que aún requieren ser tratadas por los promotores de salud de tu grupo, para continuar exhibiendo los índices de mortalidad infantil, por debajo de 4 ‰.
4. ¿Por qué durante los 100 primeros días de seguimiento a la evolución de la pandemia Covid-19 en Cuba, se notificaba que el índice de casos positivos en la Isla de la Juventud era mayor que el de La Habana, si

esta última tenía mayor cantidad de casos confirmados?, ¿por qué para calcular este indicador se utiliza el tanto por cada 100 000?

4.1 ¿En qué otras situaciones de la vida cotidiana o de las ciencias se utilizan comparaciones diferentes al tanto por ciento y al tanto por cada mil?

Ejemplo 1.22

Un técnico medio en construcción civil, al ejecutar en una obra la construcción de un muro de 6,0 m de longitud y 2,5 m de altura que contiene una ventana de 1,5 m de largo por 1,0 m de alto, verifica que el índice de consumo, por metros cuadrados es 12,5 unidades (bloques). ¿Cuántos bloques debe trasladar hacia el área de ejecución?

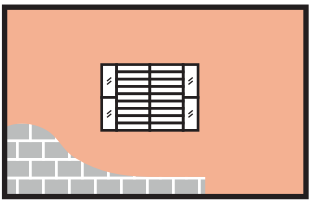


Fig. 1.39

Resolución:

- Calculamos los metros cuadrados del muro, menos los que ocupa la ventana.

  $6{,}0\text{ m} \cdot 2{,}75\text{ m} - (1{,}5\text{ m} \cdot 1{,}0\text{ m}) = 16{,}5\text{ m}^2 - 1{,}5\text{ m}^2 = 15\text{ m}^2$

- Como el índice de consumo es 12,5 unidades por metro cuadrado de pared, se tiene que $12{,}5 \cdot 15 = 187{,}5$.

  Respuesta: el técnico tiene que trasladar 188 bloques hacia el área de ejecución. ♦

Ejemplo 1.23

Los estudiantes de un grupo en 10.° grado constituyeron tres sociedades científicas con temas vinculados a la Tarea vida, que atiende el CITMA desde un proyecto comunitario. $\frac{1}{9}$ de la cantidad de estudiantes del grupo integran una con el tema: *ecosistema costero*; en otra que se orienta al tema: *cobertura boscosa* se agruparon $\frac{5}{8}$ del resto, y los restantes seleccionan el tema: *recursos hídricos*. Si entre las Sociedades Científicas que investigan los temas: *ecosistema costero* y *cobertura boscosa*, se agruparon 18 estudiantes, ¿qué parte del grupo investiga sobre los *recursos hídricos*?, ¿cuántos estudiantes del grupo participan con el CITMA en la Tarea vida?

Resolución:

Primera vía: hacer el análisis gráfico de la situación.

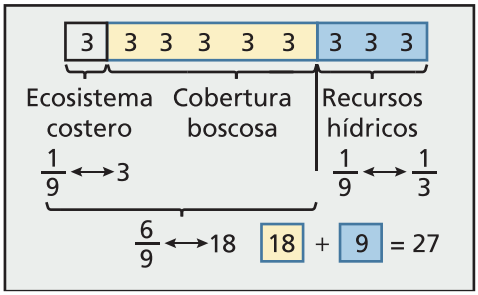


Fig.1.40

Observa en la figura 1.40 que el grupo, considerado como unidad se divide en nueve partes de las cuales se toma $\frac{1}{9}$, que representa a la cantidad de estudiantes que escogieron el tema: ecosistema costero. De las 8 partes restantes, se toman $\frac{5}{8}$ que representan a los que seleccionaron el tema: cobertura boscosa. Entre ambas partes suman $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ partes del total, que equivalen a 18 estudiantes. Entonces seleccionan el tema: recursos hídricos, $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ del total de estudiantes que equivalen a 9 estudiantes.

Como cada novena parte la integran tres estudiantes, y 9 investigan sobre los recursos hídricos, entonces 27 estudiantes participan con el CITMA en la Tarea vida.

Segunda vía: Razonamiento aritmético

$\frac{1}{9}+\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{9}=\frac{1}{9}+\frac{5}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ luego $\frac{1}{3}$ de los estudiantes seleccionaron el tema: recursos hídricos.

Como las $\frac{2}{3}$ partes del total representa 18 estudiantes, entonces para calcular el total de los que participan con el CITMA en la Tarea vida, se calcula, $18:\frac{2}{3}=18\cdot\frac{3}{2}=27$ ♦

Ejemplo 1.24

En la escala de un mapa se observa que la razón de la distancia en centímetros a la distancia real en kilómetros es 1: 5 000 000 (1 cm equivale a

50 kilómetros), si en el mapa la distancia entre dos puntos cualesquiera es de 9,0 cm (figura 1.41). ¿Cuál será la distancia real entre ellos?



Fig. 1.41

Resolución: $\frac{1}{50} = \frac{9}{x}$ entonces $x = 50 \cdot 9 = 450$

Respuesta: la distancia real entre los dos puntos cualesquiera es 450 km. ♦

Aplica tus conocimientos

1. *Si* $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, *entonces ¿a qué es igual* $\frac{a}{b} : \frac{b}{a}$ *?*
2. *¿Qué pasaría si en las condiciones del ejemplo 1.22 se decide sustituir los bloques, por ladrillos? ¿Qué implicación tiene el cambio de materiales en el tiempo de ejecución de la obra?, ¿y para el costo de la obra? ¿Qué tipo de proporcionalidad se manifiesta en cada una de estas situaciones?*
3. *El resultado de una encuesta revela que 5 de cada 11 estudiantes prefieren estudiar de día. Si se encuestó a una muestra de 400 estudiantes, ¿cuántos prefieren estudiar de noche?, ¿qué tanto por ciento representan con respecto al tamaño la muestra?*
4. *¿Cuáles operaciones intervienen en el cálculo del área sombreada de la figura 1.42? Si encuentras diferentes vías de solución, explica cuál consideras más óptima.*

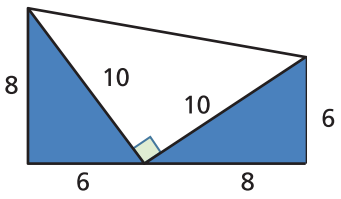


Fig. 1.42

Potenciación y radicación. Ampliación del concepto de potencia

Son diversas las situaciones de las ciencias naturales y sociales, que utilizan modelos matemáticos en los que aparecen operaciones combinadas

con números reales, y no son pocas aquellas en las que intervienen las operaciones de potenciación y radicación. Sin embargo, en algunos de esos modelos se evidencia que no es suficiente el conocimiento que tenemos sobre las potencias de exponente entero y la radicación, para resolver las operaciones que en estos intervienen.

En Astronomía se utiliza la ecuación $d = \left(\frac{GM}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot T^{\frac{2}{3}}$, *que se infiere de la Tercera Ley de Kepler para calcular la distancia promedio de un planeta al Sol en metros. Sería interesante saber:*

¿Cómo resolver potencias de exponentes de la forma $\frac{m}{n}$ *?*

¿Qué relación tiene con las operaciones de cálculo conocidas?, ¿qué propiedades cumplen?

Potenciación de números reales de exponente entero

Conoces que una multiplicación es una forma abreviada de presentar la suma de sumandos iguales, por ejemplo: $2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$; y que el producto de dos números reales cualesquiera se obtiene multiplicando respectivamente las aproximaciones racionales de ambos números. Como es asociativa, se pueden calcular los productos de cualquier número finito de factores.

En particular, la posibilidad de calcular el producto de un número finito de factores repetidos, como por ejemplo $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \left(\frac{3}{7}\right)^2$, permitió definir en grados anteriores las potencias de base real diferente de cero y exponente entero, con sus propiedades.

La potenciación es una operación racional con números reales, que no tiene limitaciones en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.25

Las igualdades siguientes son falsas.

a) $a^3 \cdot a^5 = a^{15}$ b) $x^8 : x^2 = x^4$

c) $\left(\frac{a^2}{4}\right)^3 = \frac{a^6}{4}$ d) $4^2 \cdot 2^2 = 8^4$

e) $\left(\frac{2a^3}{3}\right)^0 = \frac{2}{3}$ f) $\left(\frac{b}{5}\right)^{-2} = -\frac{b^2}{25}$

Transformar en igualdades verdaderas y enunciar la propiedad que se aplicó en cada caso.

Resolución:

Tabla 1.5

	Resultado correcto	**Propiedades aplicadas** **Para: $a,b \in \mathbb{R}^*$ (m,n y $k \in \mathbb{Z}$)**
a)	$a^3 \cdot a^5 = a^8$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
b)	$x^8 : x^2 = x^6 \ldots x \neq 0$	$a^m : a^n = a^{m-n}$
c)	$\left(\frac{a^2}{4}\right)^3 = \frac{a^6}{64}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
d)	$4^2 \cdot 2^2 = 8^2 = 64$	$a^m \cdot b^m = (ab)^m$
e)	$\left(\frac{2a^3}{3}\right)^0 = 1$	$a^0 = 1$
f)	$\left(\frac{b}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{b^2} \quad (b \neq 0)$	$a^{-k} = \frac{1}{a^k} \quad (k \neq 0)$ ♦
¡Atención! El símbolo (*) indica la exclusión del cero.		

De la historia

Se han encontrado tablillas de arcilla (figura 1.43) con escrituras en jeroglíficos, en las que se puede leer la relación siguiente: "el producto de dos números es siempre igual al cuadrado de su promedio menos el cuadrado de su semidiferencia". Significa que:



Fig. 1.43

$$a \cdot b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

El ojo de Horus (figura 1.44) es un jeroglífico que representa las fracciones unitarias cuyo denominador es una potencia de 2.

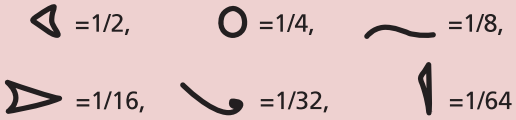


Fig. 1.44

La operación de potenciación tiene diversas aplicaciones, por ejemplo se utiliza para expresar relaciones o abreviar expresiones numéricas extremadamente grandes o pequeñas. Una de sus aplicaciones es la llamada **notación científica**.

Recuerda que...

Para expresar un número en notación científica se escribe como:

$$a \cdot 10^n \text{ con } 1 \leq a < 10;\ n \in \mathbb{Z}$$

a) $3\,580\,000\,000 = 3{,}58 \cdot 10^9$, se corre la coma nueve lugares hacia la izquierda, y el exponente es positivo.
b) $0{,}000\,034 = 3{,}4 \cdot 10^{-5}$, se corre la coma cinco lugares hacia la derecha, y el exponente es negativo.

Ejemplo 1.26

Expresar en notación científica las cantidades de magnitud siguientes:

a) La distancia que recorre la luz en un año (año luz): 9 460 800 000 000 km.
b) La masa de una molécula de oxígeno: 0,000 000 000 000 000 000 000 053 g.

Resolución:

a) $9\,460\,800\,000\,000 \text{ km} = 9,4\,608 \cdot 10^{12} \text{ km}$
b) $0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,053 \text{ g} = 5{,}3 \cdot 10^{-23} \text{ g}$ ♦

Ejemplo 1.27

Escribir en notación decimal cada una de las cantidades de magnitud siguientes:

a) El diámetro promedio de un glóbulo rojo de la sangre: $8 \cdot 10^{-5}$ cm
b) La masa del Sol: $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg

Resolución:

a) $8 \cdot 10^{-5}$ cm = 0,000 08 cm

b) $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg = 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kg ♦

Saber más

El desarrollo de las ciencias y la tecnología ha propiciado el uso de otras formas o símbolos que expresan cantidades de magnitudes muy grandes o muy pequeñas; son comunes entre otras, las siguientes:

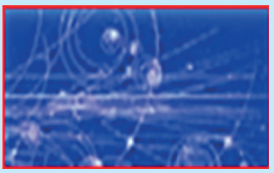


Fig. 1.45

Para números muy grandes:

Tera (T) 10^{12}; Giga (G) 10^{9}; Mega (M) 10^{6}; Kilo (K) 10^{3}.

Generalmente estos pueden expresar las cantidades de elementos muy pequeños que existen en abundancia como, por ejemplo, las gotas del mar, los granos de arena de las playas, el número de estrellas o de partículas elementales del Universo.

De números muy pequeños:

mili (m) 10^{-3}; micro (μ) 10^{-6}; nano (n) 10^{-9}; pico (p) 10^{-12}.

Por ejemplo, el nano es la unidad utilizada para medir la longitud de ondas de las radiaciones infrarroja y ultravioleta (figura 1.45). La nanotecnología, es un área científica que estudia la aplicación de materiales que poseen dimensiones de unos pocos nanómetros, en multitud de procesos de fabricación.

Ejemplo 1.28

Calcular y escribir el resultado sin utilizar la notación científica.

a) $2{,}3 \cdot 10^{5} + 2{,}38 \cdot 10^{5}$

b) $4{,}75 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{6}$

c) $(7 \cdot 10^{8} + 4 \cdot 10^{5}) \cdot 10^{-9}$

d) $\dfrac{2{,}7 \cdot 10}{1{,}8 \cdot 10^{4}}$

Resolución:

a) $2{,}3 \cdot 10^{5} + 2{,}38 \cdot 10^{5}$
$= (2{,}3 + 2{,}38) \cdot 10^{5}$
$= 4{,}68 \cdot 10^{5}$
$= 468\,000$

b) $4{,}75 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{6}$
$= 4{,}75 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{6}$

$= 14{,}25 \cdot 10^2$

$= 1\ 425$

c) $(7 \cdot 10^8 + 4 \cdot 10^5) \cdot 10^{-9}$

$= (7\ 000 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5) \cdot 10^{-9}$

$= 7\ 004 \cdot 10^5 \cdot 10^{-9}$

$= 7\ 004 \cdot 10^{-4} = 0{,}700\ 4$

d) $\dfrac{2{,}7 \cdot 10}{1{,}8 \cdot 10^4} = 1{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}001\ 5$ ♦

¡Atención!

Observa que:

- se conmutan los factores 3 y 10^{-4} para agrupar las potencias. Esto es posible por las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación.
- se aplica la propiedad para descomponer $10^8 = 10^3 \cdot 10^5$, por lo que 7 000 se obtiene de multiplicar $7 \cdot 10^3$.

Aplica tus conocimientos

En informática las unidades de medida que expresan cantidad de información son el bits (unidad básica de información), y el byte que es también la unidad de medida básica para memoria almacenada, el kilobyte (Kb), el megabyte (Mb), gigabyte (Gb) y el terabyte (Tb), entre otras.

Se conoce que: $Byte = 2^8$ *bits*
$Kb = 2^{10}$ *bytes*
$Mg = 2^{10}$ *Kb*
$Gb = 2^{10}$ *Mg*
$Tb = 2^{10}$ *Gb*

Expresa en notación científica la cantidad de información en bits y bytes de:

a) Disco duro de 120 Gb
b) Tarjeta de memoria de 512 Mb
c) CD Rom de 550 Mb

La radicación como operación inversa de la potenciación. Raíz n-ésima de números reales.

Al igual que la adición y la multiplicación, también la potenciación tiene su operación inversa: *la radicación*. Incluso, en grados anteriores calculaste raíces cuadradas y cúbicas de números reales, como operaciones inversas de la elevación al cuadrado y al cubo respectivamente, por ejemplo:

$\sqrt{9} = 3$, porque $3^2 = 9$,

$\sqrt[3]{\left(-\frac{27}{8}\right)} = -\frac{3}{2}$, porque $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$.

Recuerda que...

- El símbolo $\sqrt{\ }$, es el signo de raíz y se llama **radical**.
- El número a al cual se le calcula la raíz n-ésima se llama **radicando** o **cantidad subradical**.
- El número natural n, se llama **índice** del radical e indica el exponente al que hay que elevar la raíz para obtener la cantidad subradical. Cuando $n = 2$ no se escribe y se sobreentiende que se trata de la raíz cuadrada.
- Se llama **raíz aritmética** de a, a la raíz positiva, en el caso de n par y es la única que existe en el caso de n impar.

Definición 1.3

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, se llama raíz n-ésima de a, en símbolo $\sqrt[n]{a}$ a todo número real x que satisface la ecuación $x^n = a$. Si la ecuación no tiene solución, a no tiene raíz n-ésima.

Ejemplo 1.29

Determinar las raíces indicadas de los números reales siguientes:

a) $\sqrt[7]{128}$ b) $\sqrt[4]{625}$

c) $\sqrt[5]{-\frac{1}{243}}$ d) $\sqrt[8]{-7}$

Resolución:

a) $\sqrt[7]{128} = 2$, porque $2^7 = 128$

b) $\sqrt[4]{625} = \pm 5$, porque $5^4 = 625$ y $(-5)^4 = 625$

c) $\sqrt[5]{-\frac{1}{243}} = -\frac{1}{3}$, porque $\left(-\frac{1}{3}\right)^5 -\frac{1}{243}$

d) -7 no tiene raíz octava, por ser la cantidad subradical un número real negativo y el índice del radical (8) un número par. ♦

De la historia



Herón de Alejandría (200 a.n.e)

Fig. 1.46

La noción que hoy tenemos de la operación de radicación es bastante antigua. Las primeras evidencias se encontraron en Grecia, y tienen como ejemplo la famosa fórmula de Herón (figura 1.46) para calcular el área de triángulos, conocidos sus tres lados.

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

La intención de asignar un símbolo a los radicales, aparece en las obras hindúes. Por ejemplo, en su escritura algebraica sincopada, Brahmagupta (siglo VII) y después BhasKara (siglo XII), utilizan para representar $\sqrt{10}$ el símbolo **ka10**, donde **ka** es la abreviatura de la palabra **karana** que equivale a irracional.

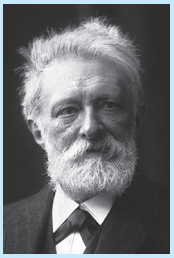


Fig. 1.47

También incursionaron en ese empeño Nicolás Oresme (1328-1382), profesor de la universidad de París quien introduce las raíces como potencias de exponentes y Rafael Bombelli (1530-1579), en su obra *Álgebra*, representa por **Rq** a la raíz cuadrada y por **Rc** a los radicales cúbicos.

El símbolo actual $\sqrt{\ }$ fue introducido en 1525 por Christoff Rudolf (figura 1.47) en su libro *Die Coss*, se supone que lo adoptó por su semejanza con la **r** minúscula, inicial de la palabra raíz.

En general se cumple que:

Teorema 1.1

a) Si n es par, todo número real positivo tiene dos raíces n-ésimas, una positiva y otra negativa. Los números reales negativos no tienen raíz n-ésima cuando n es par.

b) Si n es impar, todo número real a tiene una raíz n-ésima del mismo signo que a.

Para cualquier número real en que la raíz n-ésima $\sqrt[n]{a}$ tiene sentido, se obtiene la siguiente *identidad fundamental* $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a.$.

Observa que para $\sqrt[n]{a} \geq 0$ si n es par.

Se tiene que $\sqrt{2^2} = 2$ y $\sqrt{(-2)^2} = 2$ $\quad \sqrt[4]{3^4} = 3$ y $\sqrt[4]{(-3)^4} = 3$

¡Atención!

Los radicandos que son potencias de base negativa y exponente par, siempre van a ser positivos.

En general se cumple que para cualquier número real $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$ con $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 1$.

De manera particular: $\sqrt{a^2} = |a|$

Ejemplo 1.30

Calcular los radicales siguientes:

a) $\sqrt[5]{243}$ b) $\sqrt{(-9)^2}$ c) $\sqrt[3]{(-17)^3}$

Resolución:

a) $\sqrt[5]{243} = 3$, porque $3^5 = 243$

b) $\sqrt{(-9)^2} = |-9| = 9$, porque $9^2 = (-9)^2$

c) $\sqrt[3]{(-17)^3} = -17$ ♦

Resumen

La raíz n-ésima de a para $a \geq 0$ tiene sentido para cualquiera sea el índice n par o impar.
La raíz n-ésima de a para $a < 0$ tiene sentido solo cuando el índice n es impar.

Potencias de exponente racional. Ampliación del concepto de potencia

Consideremos la ecuación $d = \left(\frac{GM}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot T^{\frac{2}{3}}$, *a la cual nos referimos anteriormente, y la interrogante: ¿cómo resolver potencias de exponete racional?, ¿qué relación tienen con otras operaciones de cálculo conocidas?*

Para dar significado a los exponentes racionales, necesitamos encontrar su relación con los radicales, lo que se puede realizar mediante el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.31

Sea $5 = \sqrt[n]{a}$, con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$; $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$.

a) Despejar a

b) Elevar ambos miembros del resultado anterior a $\frac{1}{n}$

Resolución:

a) $5^n = a$, por definición de raíz n-ésima

b) $\left(5^n\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$

$(5)^{n\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$, por propiedades de potencia

$5 = a^{\frac{1}{n}}$ ♦

Del resultado anterior se obtiene que $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, por lo cual se puede inferir que las potencias de **exponente racional** pueden ser resueltas a partir de su relación con la **radicación**, lo que constituye una ampliación del concepto de potencia.

Definición 1.4

Si $a \in \mathbb{R}$: $a > 0$ se tiene que $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ para $m, n \in \mathbb{Z}$; $n > 1$

Si $a = 0$ se tiene $0^{\frac{m}{n}} = 0$ para $m, n \in \mathbb{Z}$; $m > 0$ y $n > 1$

En particular si $m = 1$ se tiene que $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Reflexiona

¿Por qué tienen restricciones los valores de m y n en la definición 1.4?

Ejemplo 1.32

Expresar las potencias siguientes como radicales:

a) $9^{\frac{3}{5}}$ b) $\left(\frac{1}{15}\right)^{-\frac{1}{4}}$ c) $\left(\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$ d) $\left(b^{2n}\right)^{\frac{1}{3}}$

Resolución:

a) $9^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{9^3}$ b) $\left(\frac{1}{15}\right)^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{15}$ c) $\left(\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2}{27}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$

d) $\left(b^{2n}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{b^{2n}}$ ♦

¡Atención!

Las propiedades de potencias de exponente entero son válidas para las potencias de exponente racional.

Observa que en el caso del exponente $-\frac{1}{4}$ se trata como el caso de a^{-k} (inciso b).

Ejemplo 1.33

Escribir las siguientes raíces como una potencia:

a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt{11^{-3}}$ c) $\sqrt[4]{8}$ d) $\sqrt[3]{5^2}$ e) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{4}\right)^4}$ f) $\sqrt[6]{(ab)^3}$ $(ab \geq 0)$

Resolución:

a) $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ b) $\sqrt{11^{-3}} = 11^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{11}\right)^{\frac{3}{2}}$ c) $\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$ d) $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$

e) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{5}}$ f) $\sqrt[6]{(ab)^3} = (ab)^{\frac{3}{6}} = (ab)^{\frac{1}{2}}$ ♦

¡Atención!

La potencia $a^{\frac{m}{n}}$ de exponente racional con base negativa puede definirse de igual forma que la de base positiva, excepto en los casos en que n sea par.

Por ejemplo $(-7)^{\frac{1}{2}}, (-3)^{\frac{5}{4}}, (-6)^{\frac{7}{6}}$, no están definidas.

Si en la fracción $\frac{m}{n}$, n es par y se amplia o simplifica, de modo que se obtiene la fracción $\frac{m'}{n'}$, n' es impar, entonces también se puede definir estableciendo que: $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n']{a^{m'}}$.

Por ejemplo $(-8)^{\frac{2}{6}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$

Ejemplo 1.34

Calcular las siguientes potencias:

a) $7^{\frac{4}{2}}$ b) $8^{\frac{2}{3}}$ c) $27^{\frac{3}{9}}$

Resolución:

a) $7^{\frac{4}{2}} = 7^2 = 49$ b) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$ c) $27^{\frac{3}{9}} = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$ ♦

¡Atención!

Observa que es una exigencia simplificar, antes de pasar al radical.

Hasta aquí se han definido las potencias de exponente racional $a^{\frac{m}{n}}$, para toda $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$.

Las potencias de exponente racional cumplen las mismas propiedades de las potencias de exponente entero a partir de aplicar las definiciones y relaciones estudiadas como se ilustran en la tabla 1.6 (primera columna).

Ejemplo 1.35

a) Aplicar las propiedades de las potencias de exponente racional

$5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$ $8^{\frac{1}{3}} : (-2)^{\frac{1}{3}}$ $\left(4^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$ Compara: $7^{\frac{1}{3}}$ y $7^{\frac{1}{2}}$

b) Demostrar que:

Para todos los números reales $a > 0$ y m, n, p, q ($n > 1$, $q > 1$) se cumple que: $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

Resolución:

a) $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{5}{6}}$ $8^{\frac{1}{3}} : (-2)^{\frac{1}{3}} = (-4)^{\frac{1}{3}}$ $\left(4^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = (4)^{\frac{3}{8}}$ $7^{\frac{1}{3}} < 7^{\frac{1}{2}}$ porque $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

b) Por definición de adición de fracciones $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$, consideremos $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mq}{nq}} = u$ y $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{np}{nq}} = v$, según la definición 1.4

$\sqrt[nq]{a^{mq}} = u$ y $\sqrt[nq]{a^{np}} = v$, elevando, ambos miembros a *nq* se tiene que

$a^{mq} = u^{nq}$ y $a^{np} = v^{nq}$, según la identidad fundamental.

Multiplicando ambas igualdades miembro a miembro tenemos:

$a^{mq} \cdot a^{np} = u^{nq} \cdot v^{nq}$ aplicando las propiedades de la multiplicación de potencia de exponente entero se obtiene que:

$a^{mq+np} = (u \cdot v)^{nq}$, extrayendo la raíz de índice *nq*

$\sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{(mq+np)/nq} = u \cdot v$, según la propiedad distributiva de la división con respecto a la adición obtenemos que:

$a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = u \cdot v$, luego sustituyendo $u = a^{\frac{m}{n}}$ y $v = a^{\frac{p}{q}}$

se cumple que $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ ♦

Aplica tus conocimientos

¿Cómo se expresan las demás propiedades de la potencia de exponente entero como potencias de exponente racional? Escríbelas en tu cuaderno.

Luego se tiene que si $a > 0$, para todos los números reales *a* y *r,* existe un único número real *b* tal que $a^r = b$.

¡Atención!

Significa que se pueden calcular valores aproximados de potencias de exponente irracional.

Saber más

Un procedimiento para calcular valores aproximados de potencias de exponente irracional, consiste en buscar las aproximaciones racionales de los números irracionales.

Se puede ejemplificar, al calcular cierta cantidad de cifras correctas de la potencia $b = 3^{\sqrt{2}}$.

Tabla 1.5

Aproximaciones de $\sqrt{2}$	Para la potencia de $b = 3^{\sqrt{2}}$
$1 < \sqrt{2} < 2$	$3 = 3^1 < b < 3^2 = 9$
$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$	$4,655\,54 \approx 3^{1,4} < b < 3^{1,5} \approx 5,196\,15$
$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$	$4,706\,97 \approx 3^{1,41} < b < 3^{1,42} \approx 4,758\,96$
$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$	$4,727\,70 \approx 3^{1,414} < b < 3^{1,415} \approx 4,732\,89$
$1,414\,2 < \sqrt{2} < 1,414\,3$	$4,728\,74 \approx 3^{1,4142} < b < 3^{1,414\,3} \approx 4,729\,26$
$1,414\,21 < \sqrt{2} < 1,414\,22$	$4,728\,78 \approx 3^{1,414\,21} < b < 3^{1,414\,22} \approx 4,728\,84$
$1,414\,213 < \sqrt{2} < 1,414\,214$	$4,728\,80 \approx 3^{1,414\,213} < b < 3^{1,414\,214} \approx 4,728\,81$

Observa que en las desigualdades correspondientes a las potencias de b, el miembro derecho va disminuyendo y el miembro izquierdo va aumentando, esto hace que nos vayamos acercando cada vez más al valor de la potencia, luego $3^{\sqrt{2}} = 4,728\,80\ldots$

Para representar las potencias con todas las cifras correctas, debemos tomar solamente las cifras que coinciden en ambos miembros, por ejemplo:

- con dos cifras correctas: $3^{\sqrt{2}} \approx 4,7$
- con tres cifras correctas: $3^{\sqrt{2}} \approx 4,72$
- con cinco cifras correctas: $3^{\sqrt{2}} \approx 4,728\,8$

- Esta idea puede ser la base para elaborar un programa de computación que permita calcular aproximaciones decimales de cualquier potencia de exponente irracional. **Inténtalo**.

En general se tiene que para las potencias de exponente real se cumplen las propiedades conocidas de la potencias de exponente racional.

Teorema 1.2

Sean a, b, r, s $(a > 0; b > 0)$ números reales cualesquiera, entonces se cumple:

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
2. $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$
3. $a^r : a^s = a^{r-s}$
4. $a^r : b^r = (a : b)^r$
5. $(a^r)^s = a^{rs}$
6. Si $r < s$ entonces $a^r < a^s$ si $a > 1$ y $a^r > a^s$ si $a < 1$ (monotonía de la potenciación)

Aplica tus conocimientos

1. *¿Cómo expresarías los radicales siguientes, como potencias:* $\sqrt{7}$; $\sqrt[5]{11^2}$; $\sqrt{81^{-3}}$?
   Plantea tres ejemplos de radicales y explica cómo lo expresas como potencias.
2. *Expresa con radical la ecuación* $d = \left(\frac{GM}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot T^{\frac{2}{3}}$ *que se deduce de la tercera Ley de Kepler del movimiento de los planetas, para calcular la distancia promedio en metros, de un planeta al Sol (donde* $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ *kg es la masa del Sol.* $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 / kg$ *es la constante gravitacional y* T *es el periodo de la órbita del planeta en segundos).*
   Si el periodo de la órbita de la tierra es aproximadamente de 365,25 días ¿Cuál es la distancia de la Tierra al Sol?
3. *Selecciona una de las propiedades de las potencias de exponente racional y demuéstrala.*

Operaciones con radicales. Propiedades

A partir de que las potencias de exponente racional, se pueden expresar como radicales, es importante profundizar acerca de las operaciones y relaciones de orden con los radicales.

Son diversas las problemáticas que se plantean en las ciencias, que se explican o resuelven mediante modelos matemáticos en los que intervienen las operaciones con radicales. Por ejemplo, la ecuación $R(x) = \sqrt{\frac{13 + 7x^{0,4}}{1 + 4x^{0.4}}}$ *, se utiliza para calcular la disminución de la pupila a la reacción R del ojo, ante un estímulo luminoso x, también la ecuación* $D(h) = \sqrt{2rh + h^2}$ *, es utilizada para calcular la mayor distancia que alcanzamos a ver desde una altura h determinada, al considerar la curvatura de la Tierra. Estos y otros modelos son ejemplos de aplicaciones de los radicales en funciones que estudiaras en onceno grado, por cuanto es necesario que aprendas sobre:*
¿Qué propiedades cumplen los radicales?
¿Cuál es su relación con las propiedades de las potencias de exponente racional?

¿Qué condiciones se deben cumplir para calcular y comparar radicales?

Consideremos que como $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ para $a > 0$, los radicales cumplen propiedades similares a las propiedades de las potencias de exponente racional.

Tabla 1.6

Para todos los números $a, b \in \mathbb{R}$ ($a > 0$; $b > 0$) y m, $n \in \mathbb{Z}$ ($n > 1$) se cumple que:		
Propiedades de las potencias de exponente racional	**Propiedades de los radicales**	**Ejemplos de operaciones con radicales**
1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(ab)^m}$	$\sqrt[3]{(-4)^2} \cdot \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{(-4 \cdot 2)^2} = \sqrt[3]{64} = 4$
2) $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = (a : b)^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(a : b)^m}$	$\sqrt{30^3} : \sqrt{5^3} = \sqrt{(30 : 5)^3} = \sqrt{6^3} = \sqrt{36 \cdot 6} = 6\sqrt{6}$
3) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	$\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}$
4) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
5) $a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ $k \in \mathbb{N}; k > 0$	$\sqrt[6]{1024} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

Ejemplo 1.36

Demostrar que se cumple que $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$, para todo $a \in \mathbb{R}$ ($a > 0$) y $m, n \in \mathbb{Z}$ ($n > 1$) y $k \in \mathbb{N}$; $k > 0$ (propiedad 5, de la tabla 1.6)

Resolución:

Para la demostración consideremos $r = \sqrt[n]{a^m}$ (1)
entonces $r^n = a^m$ por definición 1.3.
$(r^n)^k = (a^m)^k$, elevando ambos miembros al exponente $k > 0$
$r^{kn} = a^{km}$ por propiedades de las potencias. De donde $r = \sqrt[kn]{a^{km}}$ (2)
Luego de (1) y (2) se tiene que: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$. ♦

Las propiedades de los radicales se utilizan al realizar operaciones de cálculos, para las cuales es conveniente tener los radicales completamente simplificados.

Simplificación de radicales

Un radical está simplificado cuando:

1) Su índice no tiene factores comunes con el exponente del radicando.
2) Se han extraído del radical todos los factores que son raíces exactas.
3) El radicando no es una fracción.

Son radicales simplificados $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$ y $d^2p^3\sqrt[5]{p}$. .

No están simplificados: $\sqrt[6]{a^4}$, $\sqrt[3]{a^6b}$ y $\sqrt{\dfrac{x+y}{x}}$ $(x>0)$

Para simplificar un radical es frecuente realizar las transformaciones siguientes:

a) Reducir el índice del radical
b) Extraer factores del radical

¡Atención!

Vamos a considerar en lo adelante que en los ejemplos de expresiones que presentaremos las variables siempre toman valores numéricos para los cuales dichas expresiones están definidas.

▲ ¿Cómo se reduce el índice de un radical?

Ejemplo 1.37

Simplificar los radicales siguientes:

a) $\sqrt[n]{a^{2n}}$ b) $\sqrt[4]{a^2}$ c) $\sqrt[6]{8}$ d) $\sqrt[4]{4x^2y^2}$

Resolución:

a) $\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2$

b) $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[2\cdot 2]{a^{1\cdot 2}} = \sqrt{a}$

c) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[2\cdot 3]{2^3} = \sqrt{2}$

d) $\sqrt[4]{4x^2y^2} = \sqrt[4]{(2xy)^2} = \sqrt{(2xy)}$ ♦

¡Atención!

Cuando el radicando es una potencia de base real no negativa cuyo exponente tiene factores comunes con el índice del radical se aplica la propiedad 5.
Observa que en estos casos el índice del radical y el exponente del radicando son divisibles por un mismo número entero positivo y el resultado no se altera.

Reflexiona

¿Qué condiciones deben cumplir n y kn, para que se cumpla el teorema 1.2, si existen $\sqrt[n]{a^m}$ y $\sqrt[kn]{a^{km}}$ con $a < 0$?
¿Existen radicales a los que no se les puede reducir el índice del radical?

▲ ¿Cómo extraer factores de un radical?

Ejemplo 1.38

Extraer todos los factores posibles del radical

a) $\sqrt[3]{a^6b^2}$ b) $\sqrt[3]{250}$ c) $\sqrt[4]{\frac{x^4b^3}{16}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}x^3y}$ e) $\sqrt[5]{a^{13}}$

Resolución:

a) $\sqrt[3]{a^6b^2} = \sqrt[3]{a^6}\cdot\sqrt[3]{b^2} = a^2\sqrt[3]{b^2}$

b) $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5^3\cdot 2} = 5\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[4]{\frac{x^4b^3}{16}} = \frac{x\sqrt[4]{b^3}}{2}$

d) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}x^3y} = \frac{2x}{3}\sqrt[3]{y}$

e) $\sqrt[5]{a^{13}} = \sqrt[5]{a^{2\cdot 5+3}} = \sqrt[5]{a^{2\cdot 5}\cdot a^3} = a^2\sqrt[5]{a^3}$ ♦

¡Atención!

Observa que:

- se aplican las propiedades 1 y 2 y que en la práctica se eliminan los pasos intermedios para escribir directamente los resultados (incisos c y d).
- el exponente del radicando es mayor que el índice del radical, pero no es múltiplo de este. Se descompone en $13 = 2 \cdot 5 + 3$ (inciso e).

Aplica tus conocimientos

Explica cómo procederías para introducir bajo el signo radical los factores que están fuera de él: a) $7\sqrt{a}$ *b)* $a^2b\sqrt[3]{5}$ *c)* $2\sqrt[5]{3x^2y^2}$ *d)* $\frac{1}{3}x\sqrt{6a}$

Radicales semejantes. Adición y sustracción de radicales

En ocasiones, se requiere simplificar una expresión, en la cual hay que adicionar o sustraer radicales, por ejemplo, ¿cómo proceder para resolver $4\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[6]{1\,600}$ *?*

Para adicionar o sustraer radicales es una condición necesaria que estos sean semejantes.

Dos radicales que tienen igual índice e igual radicando se llaman radicales semejantes.

a) Son radicales semejantes los términos, $\sqrt{a}$, $5\sqrt{a}$, $\frac{1}{3}x\sqrt{a}$ así como $\frac{1}{x}\sqrt[5]{x-y}$ y $2xy\sqrt[5]{x-y}$.

b) No son semejantes $-\sqrt[5]{x}$ y $\sqrt[5]{2x}$ porque sus radicandos son diferentes, o en los casos de $\sqrt[3]{a^2b}$ y $\sqrt[5]{a^2b}$ porque sus índices son diferentes.

Al calcular la suma o diferencia de dos o más radicales, se procede igual a cuando reduces términos semejantes.

Ejemplo 1.39

Calcular a) $4\sqrt[3]{3} + 7\sqrt[3]{3}$ b) $\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 8\sqrt{a}$

c) $\sqrt[5]{2ab} - \sqrt{2ab} + 3\sqrt[5]{2ab}$ d) $2\sqrt{27} - 4\sqrt{12} + \sqrt[4]{9} + \sqrt{75}$

Resolución:

a) $4\sqrt[3]{3} + 7\sqrt[3]{3} = (4+7)\sqrt[3]{3} = 11\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 8\sqrt{a} = -2\sqrt{a}$

c) $\sqrt[5]{2ab} - \sqrt{2ab} + 3\sqrt[5]{2ab} = 4\sqrt[5]{2ab} - \sqrt{2ab}$

d) $2\sqrt{27} - 4\sqrt{12} + \sqrt[4]{9} + \sqrt{75}$

$= 6\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + \sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

$= 4\sqrt{3}$ ♦

cálculo auxiliar

$2\sqrt{27} = 2\sqrt{9 \cdot 3} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$-4\sqrt{12} = -4\sqrt{4 \cdot 3} = -4 \cdot 2\sqrt{3} = -8\sqrt{3}$

$\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$

$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$

¡Atención!

Observa que en todos los casos se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

En el caso del inciso c) solo dos de los radicales son semejantes, luego se realiza la suma parcial y se deja indicada la operación que no puede realizarse.

En el inciso d) como es preciso simplificar previamente cada sumando, para luego identificar los radicales semejantes, se sugiere realizar un cálculo auxiliar.

Aplica tus conocimientos

¿Cómo procederías para calcular $4\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[6]{1\,600}$ *?*

Comparación, multiplicación y división de radicales

En la práctica se hace necesario comparar o realizar operaciones con radicales que tienen índices diferentes.

Al comparar los radicales $\sqrt{2a}, \sqrt[6]{7a}$ *y* $\sqrt[4]{5a}$ *o al calcular el producto de* $\sqrt{x}\left(3x\sqrt{x} - \sqrt[3]{y}\right)$, *así como el cociente de* $\left(\sqrt{80} - \sqrt{45} + 3\sqrt{20}\right) : \sqrt{5}$

¿Qué condiciones se deben garantizar para resolver en cada caso, estas situaciones?

Al comparar, multiplicar y dividir con radicales con índices diferentes, se requiere reducirlos a un índice común. Puesto que los radicales se pueden escribir como potencias de exponente racional, se realiza de manera análoga a como se reducen fracciones a un denominador común.

Es decir, debes aplicar la propiedad 5, para reducir varios radicales de índices diferentes, a radicales equivalentes que tengan entre ellos un índice común.

Para reducir dos o más radicales a un índice común:

a) Se busca el mínimo común múltiplo (mcm) de los índices.

b) En cada radical, se multiplica el índice y el exponente del ra dicando por el factor necesario para que el índice sea el mcm hallado.

Ejemplo 1.40

Ordenar de manera ascendente los radicales siguientes: $\sqrt[4]{a^3}, \sqrt[6]{a^5}, \sqrt{a}$ para $a > 0; a \neq 1$

Resolución:

Al tener índices diferentes se requiere reducirlos a un índice común, por lo que:

– Como el mcm (4; 6 y 2)= 12 se tiene que de 12 : 4 = 3; 12 : 6 = 2 y 12 : 2 = 6, se obtienen los exponentes a los que se elevan cada uno de los radicandos, por lo que:

$$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4\cdot 3]{\left(a^3\right)^3} = \sqrt[12]{a^9}\ ;\ \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6\cdot 2]{\left(a^5\right)^2} = \sqrt[12]{a^{10}} \text{ y } \sqrt{a} = \sqrt[2\cdot 6]{a^6} = \sqrt[12]{a^6}$$

– Ahora se procede a comparar los radicandos, es decir, se tiene que $a^6 < a^9 < a^{10}$, luego:

$$\sqrt{a} < \sqrt[4]{a^3} < \sqrt[6]{a^5}\ \blacklozenge$$

¡Atención!

Aunque se puede elegir como índice común de todos los radicales a cualquier múltiplo de sus índices respectivos, es conveniente escoger el mínimo común múltiplo.

Reflexiona

¿Qué pasaría si $a \in \mathbb{R}$?, ¿ y si $a \in \mathbb{Z}$?

▲ ¿Cuáles son las condiciones necesarias para multiplicar y dividir radicales?

Para multiplicar y dividir radicales se pueden diferenciar dos casos:

1. *Los radicales tienen igual índice (en este caso se aplican directamente las propiedades de los radicales)*
2. *Los radicales tienen índices diferentes (en este caso se reducen primeramente a un índice común y después se aplican las propiedades de los radicales)*

En la multiplicación y división de radicales se aplican las propiedades

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$ con $a, b > 0$; $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$

Ejemplo 1.41

Efectuar las multipicaciones siguientes. Considera que son positivas todas las variables que aparecen en las expresiones

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{10}$ b) $2\sqrt{6} \cdot 6\sqrt{3}$ c) $\sqrt{2a} \cdot \sqrt[3]{b}$ d) $\sqrt[3]{a^2} . \sqrt[9]{a^5}$

Resolución:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{30}$

b) $2\sqrt{6} \cdot 6\sqrt{3} = 12\sqrt{18} = 12\sqrt{9 \cdot 2} = 12 \cdot 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{(2a)^3} \cdot \sqrt[6]{b^2} = \sqrt[6]{8a^3b^2}$

d) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[9]{a^5} = \sqrt[9]{a^6} \cdot \sqrt[9]{a^5} = \sqrt[9]{a^{11}} = a\sqrt[9]{a^2}$ ♦

Ejemplo 1.42

Efectuar las divisiones siguientes:

a) $\sqrt{40} : \sqrt{10}$ b) $\sqrt{18} : \sqrt{6}$ c) $6\sqrt[3]{x^2} : \sqrt[6]{x}$ d) $\sqrt[4]{\frac{5}{4}} : \sqrt[8]{\frac{25}{48}}$

Resolución:

a) $\sqrt{40} : \sqrt{10} = \sqrt{4} = 2$

b) $\sqrt{18} : \sqrt{6} = \sqrt{3}$

c) $6\sqrt[3]{x^2} : \sqrt[6]{x} = 6\sqrt[6]{x^4} : \sqrt[6]{x} = 6\sqrt[6]{x^3} = 6\sqrt{x}$

d) $\sqrt[4]{\frac{5}{4}} : \sqrt[8]{\frac{25}{48}} = \sqrt[8]{3}$ ♦

Reflexiona

Explica cómo se procede para obtener el resultado del inciso d) del ejemplo 1.42.

En la división, se pueden presentar casos, en los cuales el divisor es un número irracional, por ejemplo, para efectuar $\frac{5}{\sqrt{3}}$ seguramente procedes así: $\frac{5}{\sqrt{3}} \approx \frac{5}{1{,}73} \approx \frac{500}{173}$; es decir, el método seguido en este caso, es encontrar un valor aproximado del divisor para obtener un valor aproximado del cociente. Sin embargo, se obtendría una aproximación mejor, si se pudiera dividir por un número entero, eliminando la raíz del denominador. Este procedimiento se conoce como racionalización del denominador.

▲ ¿Cómo se realiza la racionalización de denominadores?

Ejemplo 1.43

Racionalizar las expresiones siguientes:

a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{12}{4\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{6}{2+\sqrt{2}}$ d) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Resolución:

a) $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

Para *eliminar el radical del denominador*, se multiplica por $\sqrt{3}$ al numerador y al denominador

b) $\frac{12}{4\sqrt[3]{3}} = \frac{12\cdot\sqrt[3]{3^2}}{4\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}} = \frac{12\cdot\sqrt[3]{9}}{4\sqrt[3]{3^3}} = \sqrt[3]{9}$

Se multiplican numerador y denominador por $\sqrt[3]{3^2}$, para obtener en el denominador, un exponente que sea múltiplo del índice para eliminar el radical.

c) Como $(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) = 2^2 - (\sqrt{2})^2 = 4-2 = 2$, se muliplica el numerador y el denominador por $2-\sqrt{2}$.

$$\frac{6}{2+\sqrt{2}} = \frac{6(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{6(2-\sqrt{2})}{2} = 6-3\sqrt{2}$$

d) Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=5\sqrt{3}+5\sqrt{2}\blacklozenge$$

En c) y en d) se aplica el producto notable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

En general cuando se presentan denominadores binomios del tipo $\sqrt{a}+\sqrt{b}, \sqrt{a}-\sqrt{b}$, el numerador y el denominador se deben multiplicar por $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ o $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ respectivamente para eliminar los radicales.

Las expresiones $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ y $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ($a, b > 0$) se llaman **conjugadas**.

Aplica tus conocimientos

¿Cómo se procede para ordenar de forma descendente los siguientes radicales $\sqrt{3}, \sqrt[4]{5}, \sqrt{10}$ *?, ¿y para comparar los radicales* $\sqrt{2a}, \sqrt[6]{7a}$ *y* $\sqrt[4]{5a}$ *?*

¿Cómo se calcula $\sqrt{x}\left(3x\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}\right)$ *y* $\left(\sqrt{80}-\sqrt{45}+3\sqrt{20}\right):\sqrt{5}$ *?*

Explica el procedimiento que seguirías para racionalizar la expresión $\frac{3}{\sqrt{a}+b}$.

Logaritmación de números reales

Imagina que participas en un equipo multidisciplinario de científicos (especialistas en medicina, microbiología, biología, bioquímica, entre otras ramas de las ciencias), que estudian el nivel de acidez que tiene una sustancia. Para el estudio aplican la fórmula pH= -log c (H_3O^+) ¿Qué significado tiene el término "log" en las operaciones de cálculo que intervienen en la fórmula?

Conoces que la potenciación es una operación en la cual interviene tres elementos: la base, el exponente y la potencia, de la cual la radicación es una de las operaciones inversas (figura 1.48).

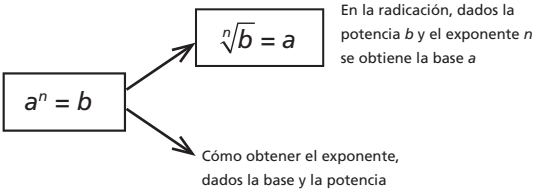


Fig. 1.48

Como la potenciación **no es conmutativa**, si se quiere determinar el exponente, conocidas la potencia y la base, no se puede utilizar la radicación, en este caso se realiza la logaritmación, como otra operación inversa de la potenciación.

Definición 1.5

Dados los números reales a y b ($a > 0$, $a \neq 1$ y $b > 0$) se llama logaritmo de b en base a y se denota $\log_a b$, al número n que satisface la igualdad $a^n = b$.

Simbólicamente la definición anterior se resume como: $\log_a b = n$, si y solo si $a^n = b$.

Por lo que podemos plantear la igualdad: $a^{\log_a b} = b$ que se conoce como *Identidad fundamental logarítmica*

Ejemplo 1.44

Calcular los siguientes logaritmos y fundamentar en cada caso.

a) $\log_8 64$ b) $\log_3 243$ c) $\log_{36} 6$ d) $\log_{45} 1$ e) $\log_{10} 1\,000$

f) $\log_5(-5)$ g) $\log_{-2} 2$

Resolución:

a) $\log_8 64 = 2$ porque $8^2 = 64$
b) $\log_3 243 = 5$, porque $3^5 = 243$
c) $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$, porque $36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$
d) $\log_{45} 1 = 0$, porque $45^0 = 1$
e) $\log_{10} 1\,000 = 3$; porque $10^3 = 1\,000$
f) $\log_5(-5)a$ no existe, porque $-5 < 0$ (el argumento tiene que ser positivo)
g) $\log_{-2} 2$ no existe, porque $-2 < 0$ (la base tiene que ser positiva y diferente de 1) ♦

¡Atención!

En lo adelante a los logaritmos de base 10, como en el caso del inciso e), no se les indicará la base.

De la historia

La notación **log** es una abreviatura de la palabra *logarithmus* del latín, así como del griego *logós*, "razón" y *arithmós*, "números".

El invento de los logaritmos se conoce por medio de la obra *Description of the Marvelous Rule of Logarithmus* (Una descripción de la regla maravillosa de los logaritmos). Publicada en 1614 por al escocés J. Nepier (figura 1.49).

En su época los logaritmos se usaron para simplificar cálculos con números muy grandes, para lo cual Nepier elaboró la tabla de los logaritmos decimales (exponentes) de base 10.



John Nepier (1550-1617)

Fig.1.49

En la actualidad para el cálculo de logaritmos se puede prescindir del uso de tablas, debido a que en cualquier calculadora u hoja electrónica de cálculo se encuentra disponible esta operación. Por ejemplo en las calculadoras científicas tienen dos funciones logarítmicas:

log	que son los logaritmos decimales o de base10.
ln	que son los logaritmos neperianos o natural de base e.

Por ejemplo (figura 1.50), para calcular el log 9

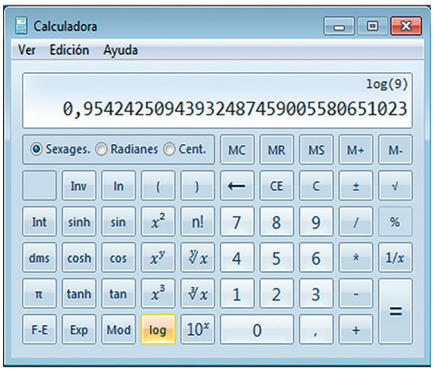


Fig.1.50

1. Se marca la tecla "9"
2. Se marca la tecla "log".
3. Se toma el valor aproximado con cuatro cifras significativas.

Luego, log 9 ≈ 0,954 2.

Para calcular el logaritmo natural, se procede de manera similar.

Ejemplo 1.45

Calcular con ayuda de una calculadora científica el resultado de las siguientes operaciones, hasta 4 lugares decimales.

a) log 25 b) ln 3 c) ln 5 + log 4,8

Resolución:

a) Luego, log 25 ≈ 1,397 9

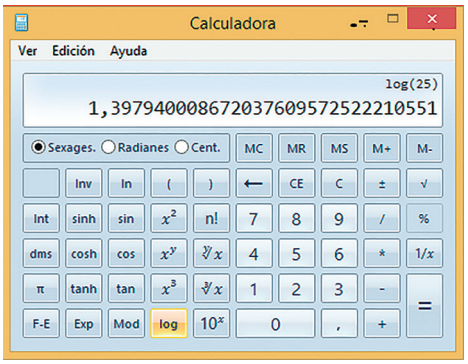


Fig. 1.51

b) Luego, ln 3 ≈ 1,098 6

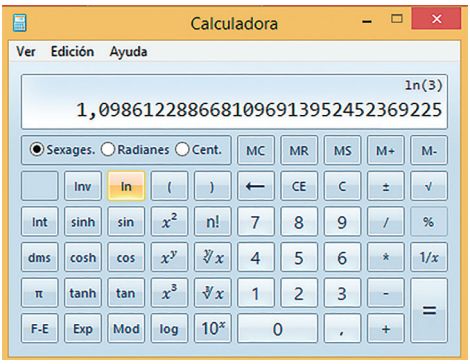


Fig. 1.52

c) ln 5 ≈ 1,609 43 y log 4,8 ≈ 0,681 24
luego, ln 5 + log 48 ≈ 2,404 0 ♦

¿? ¿Sabías que...?

En general los logaritmos tienen amplias aplicaciones en la vida y en las ciencias. En Química los aplicas para calcular el llamado pH, indicador del nivel de acidez de una disolución, que es igual al valor opuesto del logaritmo de la concentración de los iones de hidronio de la disolución. También se aplican en la modelación de la respuesta humana a diversos estímulos como al de la luz, la presión y al sonido. Permiten calcular el envejecimiento o edad de objetos fósiles, el incremento de inversiones financieras según las tasas de interés, el crecimiento o decrecimiento acelerado de una población, dígase la de una colonia de bacterias, como en el caso de la situación inicial del tema, así como la intensidad de los terremotos. Sobre estas y otras aplicaciones profundizarás en onceno grado.

Ejemplo 1.46

El nivel de acidez (pH) de una sustancia es compatible para la vida, si se encuentra en el intervalo numérico [6,8; 7,8]. Se sabe que cuando el pH es menor que 7 la sustancia es ácida, si es mayor que 7 es básica y si es igual a 7 es neutra. Para calcularlo se utiliza la fórmula: $pH = -\log c\,(H_3O^+)$

a) Calcular el pH de una disolución en la cual la concentración de los iones de hidronio es $c\,(H_3O^+) = 10^{-3} mol \cdot L^{-1}$.

b) Según el valor del pH encontrado, ¿la sustancia es básica, ácida o neutra?

Resolución:

a) $pH = -\log c\,(H_3O^+) = -\log 10^{-3} = -(-3) = 3$

b) La disolución es ácida pues el pH es menor que 7 ♦

Reflexiona sobre lo aprendido

1. Sea $M = 2x + 3y - \frac{4}{5}z$. Sustituye *x*, *y*, *z* de modo que *M* sea un número:

a) natural b) entero negativo c) racional d) irracional

2. ¿Por qué, $\sqrt{a^2} = |a|$?

3. Explica cómo procederías para:

a) Ordenar de forma creciente las siguientes potencias $(2a)^{\frac{1}{2}}, (7a)^{\frac{1}{6}}$ y $(5a)^{\frac{1}{4}}$

b) Efectuar $\sqrt{x}\left(3x\sqrt{x} - \sqrt[3]{y}\right)$

c) Calcular $\left(80 - \sqrt{45} + 2\sqrt{20}\right) : \left(\sqrt{5} + 2\right)$

4. Aplica la definición de logaritmo para calcular:

a) $\log_2 \sqrt{2} + \log_3 \sqrt[3]{3^4} - \log 0{,}001$ b) $\log_3 27 + \log_{\frac{1}{2}} 4 - \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$

Ejercicios del epígrafe 1.3

Operaciones fundamentales con números reales

1. Dados $a = -2$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = 16$ y $d = 3$, calcula el valor numérico de las expresiones indicadas.

a) $\frac{a - b \cdot c}{d}$ b) $(a - b) \cdot c + d$ c) $-(a + b) : \frac{d}{c}$

1.1 Plantea al menos tres operaciones combinadas en las que intervengan los valores de *a*, *b*, *c* y *d*, dados.

2. En la expresión $q = 4a + 3b + \frac{7}{4}c$, sustituye los valores de las variables *a*, *b* y *c* de manera que el valor numérico de *q*, sea un número:

a) Natural b) Entero negativo c) Fracionario

d) Racional e) Irracional

3. Para la estimación del peso de un niño entre 3 y 12 meses se utiliza la siguiente fórmula: peso (kg) = [*edad* (*meses*) + 11] : 2,2.

a) ¿Cuántas libras pesa un niño de 7 meses?

b) ¿Cuántos meses debe tener un niño que pesa 22 lb?

4. Para determinar la estatura de niños y adolescentes existen modelos mátemáticos, como la fórmula de Weech; estatura (cm) = [2,5 (edad en años) + 30] · 2,54, utilizada para los que se encuentran en el intervalo de 2 a 14 años de edad:

a) ¿Qué estatura aproximada debe tener un niño de 7 años de edad?

b) Un adolescente de 12 años mide 1,45 m, ¿tiene la estatura acorde con su edad?

5. ¿Cuáles son las dimensiones de un terreno que tiene forma rectangular, que se puede cercar exactamente con 112 m de malla metálica como mínimo, si el largo del terreno excede en 4,80 m al ancho?

6. Un terreno dedicado a la siembra de verduras mide 20 m de ancho y 30 m de largo. Si se decide ampliar el terreno como muestra la figura 1.53.

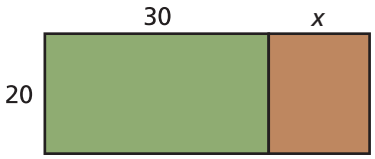


Fig.1.53

a) ¿Cuánto más debe medir el largo para que el terreno sea de 850 m^2?

b) ¿Cuál es la propiedad de los números reales que permite expresar la nueva área también como $A = 600 + 20x$?

7. El radio de las ruedas de una locomotora mide 0,43 m. ¿Cuántas vueltas habrán dado al recorrer una distancia de 547 km?

8. Selecciona la respuesta correcta

8.1 Para ir de un pueblo a otro distante a 120 km, un ómnibus ha recorrido 50 km en 40 min. Si la velocidad se mantiene constante entonces el tiempo total para su recorrido en minutos es :

a) 40 b) 56 c) 70 d) 96

8.2 Un automóvil consume 4 L de gasolina por 55 km recorridos. Entonces con 20 L de gasolina la distancia en km que puede recorrer es:

a) 275 b) 220 c) 110 d) 80

8.3 Un pelotero que logra 7 *hits* de 15 veces al bate tiene un *average* de:

a) 47 b) 0,47 c) 467 d) 7/15

8.4 Si 100 g de un alimento aportan 300 calorías, entonces la cantidad de calorías que aportan 30 g del mismo alimento es de:

a) 90 b) 100 c) 900 d) 1 000

8.5 Se tiene una placa metálica con un área de 3 240 mm^2. Su área expresada en centímetros cuadrados equivale a:

a) 324,0 cm^2 b) 32 400 cm^2 c) 324 000 cm^2 d) 32,40 cm^2

9. En tres cooperativas agropecuarias de una provincia se cosecharon en una semana las siguientes cantidades de hortalizas: en la primera cooperativa, 500 kg; en la segunda, 76 kg más que en la primera y en la tercera tanto como en las dos primeras, más 5 kg. ¿Qué tanto por ciento del total representa lo recolectado por la tercera cooperativa?

10. Según transcurre el embarazo, el aumento de peso de la mujer es el resultado del crecimiento del feto, de la placenta, del líquido amniótico y de los tejidos maternos. El feto representa el 25 % del aumento total, la placenta alrededor del 5 % y el líquido amniótico el 6 %. ¿Qué aumento total de peso habrá tenido una embarazada que por concepto de tejido materno ha aumentado durante la etapa pregestacional 10,5 kg?

11. Los accidentes del tránsito son una de las causas principales de muerte en nuestro país. Suponiendo que el año pasado perdieron la vida por esta causa 8 223 personas de 19 354 personas lesionadas, ¿qué tanto porciento del total de personas lesionadas murieron por accidente de tránsito?

11.1 Investiga sobre las cinco causas de muerte que más han incidido en tu provincia, en los últimos 10 años.

a) Representa gráficamente el porcentaje de fallecidos en esos 10 años por diferentes causas (puedes utilizar cualquier tipo de gráfico, apropiado para representar la información)

b) Representa mediante una gráfica poligonal el porcentaje de fallecidos por año, con respecto a los lesionados por accidentes.

12. Todos los estudiantes del décimo grado de una escuela se comprometieron a participar en la escuela al campo. Del total de estudiantes, los $\frac{2}{7}$ trabajaron en una industria local, el 80 % del resto en un organopónico y los 19 restantes en la cosecha de café. ¿Qué matrícula tiene el 10.º grado en este centro de estudios?

Potenciación y radicación. Ampliación del concepto de potencia

13. Calcula las potencias siguientes tomando aproximaciones de tres cifras decimales en el resultado final.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$ b) $\left(-\frac{8}{3}\right)^2$ c) $\left(-\sqrt{2}\right)^3$ d) $\left(\sqrt{3}\right)^3$ e) $\left(\frac{7}{2}\right)^3$

14. Sustituye los asteriscos (*) en el lugar del exponente con el valor o valores que corresponden, de modo que, en cada caso, siempre obtengas una proposición verdadera.

a) $a^7 \cdot a^* = a^{16}$ b) $a^* \cdot a^3 = a^{11}$ c) $(a^2)^* = a^8$

d) $a^6 : a^* = a$ e) $a^* : a^* = a^* = 1$ f) $a^* : a^* = \frac{1}{a^2}$

g) $a^* \cdot b^* = (ab)^5$ h) $(a^7)^* = \frac{1}{a^7}$ i) $a^3 : b^* = \left(\frac{a}{b}\right)^*$

15. Calcula aplicando propiedades de las potencias.

a) $19 + 3^2 \cdot (-2) - 2^0$ b) $2^{-4} \cdot 10 + 3 \cdot 8^{-1}$

c) $\left(-\frac{1}{4}\right)^0 + 9^2 - 4^{-1} \cdot 32$ d) $\frac{4\,900^2}{140^2}$

16. Selecciona la respuesta correcta.

16.1 El cociente que se obtiene al calcular $\left(-\frac{8}{3}\right)^3 : \left(\frac{12}{27}\right)^3$ es:

a) $\left(\frac{32}{27}\right)^3$ b) -216 c) $-\frac{18}{3}$ d) 216

16.2 Si $x^{-b} = a^{-2b}$ entonces x es: a) a^2 b) a^{-b} c) a^{-2b} d) a^b

16.3 El mayor embalse del país es el Zaza, en la provincia de Sancti Spíritus con una capacidad de 1 020 000 000 m^3. Luego su capacidad en litros (L) es:

a) $1{,}02 \cdot 10^6$ L b) $1{,}02 \cdot 10^9$ L c) $1{,}02 \cdot 10^{12}$ L d) $1{,}02 \cdot 10^{15}$ L

16.4 El producto de $34 \cdot 100^{48}$ se expresa en notación científica como:

a) $34 \cdot 10^{96}$ b) $3{,}4 \cdot 10^{49}$ c) $3{,}4 \cdot 10^{51}$ d) $3{,}4 \cdot 10^{97}$

17. Un técnico de laboratorio clínico observa en el resultado del análisis de sangre de un paciente, que presenta las siguientes cantidades de eritrocitos y leucocitos:

Eritrocitos: 4 500 000 000 000 por litro.
Leucocitos: 11 000 000 000 por litro.

a) Si la forma habitual de presentar estos resultados es en notación científica, ¿cómo el técnico escribe cada uno de los resultados del análisis?
b) Investiga si los resultados del paciente son normales.

18. Halla el valor de las raíces indicadas.

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[3]{-27}$ c) $-\sqrt{81}$ d) $\sqrt[7]{\frac{1}{128}}$ e) $\sqrt[6]{5^{12}}$ f) $\sqrt[4]{-16}$

19. Calcula las potencias indicadas en cada caso. Expresa el resultado de la forma más simplificada posible.

a) $(64)^{\frac{1}{2}}$ b) $(125)^{\frac{1}{3}}$ c) $-(0{,}25)^{\frac{1}{2}}$ d) $(32)^{\frac{1}{5}}$ e) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ f) $(1296)^{\frac{1}{4}}$

g) $-\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$ h) $\left(\frac{4}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$ i) $(-32)^{-\frac{2}{5}}$ j) $1\,024^{-0{,}1}$ k) $\left(-\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ l) $\left(\frac{25}{64}\right)^{-\frac{3}{2}}$

Operaciones con radicales. Propiedades

20. Simplifica los radicales siguientes, considera que las variables satisfacen las condiciones del radical indicado).

a) $\sqrt{27}$ b) $3\sqrt[3]{32}$ c) $\frac{2}{a}\sqrt{16a^5b^3}$ d) $\sqrt[3]{-81a^5}$ e) $\sqrt{\frac{8a^3}{9x^2}}$ f) $\sqrt[3]{64x^4y^5}$

21. Introduce bajo el signo radical (las variables satisfacen las condiciones del radical indicado).

a) $7\sqrt{a}$ b) $3b\sqrt[3]{b}$ c) $2x\sqrt[5]{4y}$

d) $2\sqrt[5]{3x^2y^2}$ e) $\frac{1}{3}x\sqrt[3]{6y}$ f) $(a+b)\sqrt{a-b}$

22. Simplifica los siguientes radicales (considera las variables, números reales positivos).

a) $4\sqrt{3}+16\sqrt{3}$ b) $2{,}3\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{5}$ c) $7\sqrt{7}+\sqrt{7}-8\sqrt{7}-2{,}61\sqrt{7}$

d) $\sqrt[3]{256}-\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{1372}-\sqrt[3]{108}$ e) $2\sqrt{\frac{80}{9}}+\sqrt{\frac{45}{4}}-\frac{3}{25}\sqrt[6]{25}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{5}$

f) $\sqrt{a}+5\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{a}$

g) $5\sqrt{x+1}+7\sqrt{x+1}-4\sqrt{x+1}$ h) $2\sqrt{x}-13\sqrt{y}+8\sqrt{x}+22\sqrt{y}$

23. Ordena en forma decreciente los radicales siguientes:

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[6]{7}$ y $\sqrt[4]{5}$ b) $\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt[6]{11}$ c) $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ y $\sqrt[4]{2}$

24. Compara los radicales siguientes:

a) $\sqrt{5}$ y $\sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt[3]{9}$ y $\sqrt[6]{64}$ c) $\sqrt[12]{125}$ y $\sqrt[8]{25}$ d) $\sqrt{3}$ y $\sqrt[5]{5}$

e) $\sqrt{10}$ y $\sqrt[3]{25}$ f) $\sqrt{0{,}5}$ y $\sqrt[4]{75}$ g) $\sqrt{10}$ y $\sqrt[3]{11}$ h) $\sqrt{3}$ y $\sqrt[6]{7}$

25. Efectúa y simplifica. Considera que las variables son números reales positivos.

a) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{6}$ b) $\sqrt{30}\cdot\sqrt{2a}$ c) $\sqrt[3]{48}\cdot\sqrt[3]{27}$

d) $\sqrt[3]{-2}\cdot\sqrt[4]{2^3}$ e) $\sqrt[3]{ax}\cdot\sqrt[3]{5a^2}$ f) $\sqrt[5]{-5x^2}\cdot\sqrt[5]{3x^3}$

g) $\sqrt[3]{40}:\sqrt[3]{5}$ h) $\sqrt[4]{\frac{5}{4}}:\sqrt[8]{\frac{25}{48}}$ i) $\left(\sqrt{80}-\sqrt{45}+3\sqrt{80}\right):\sqrt{5}$

j) $\left(3-\sqrt{5}\right)^2$ k) $\sqrt{6x^2y^2}:\sqrt{xy^2}$ l) $\sqrt{5ab}\cdot\sqrt{10ac^2}\cdot b^2\sqrt{2c}$

26. Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{2b}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{3}{2\sqrt{18}}$ d) $\sqrt{\frac{4}{7}}$ e) $\frac{3d}{\sqrt[3]{3}}$

f) $\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}$ g) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}+1}$ h) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ i) $\dfrac{14}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ j) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

27. Efectúa las operaciones indicadas siguientes:

a) $\left(5\sqrt{3}-4\sqrt{27}+2\sqrt{81}\right):\sqrt{3}$

b) $\dfrac{12-2\sqrt{3}-\sqrt{48}}{\sqrt{12}}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{128}}+\sqrt{\sqrt[3]{1458}}-\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{54}}$

d) $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+3\sqrt{12}-\sqrt{108}$

e) $\dfrac{9}{7+\sqrt{40}}-\dfrac{6}{4-\sqrt{10}}$

f) $\dfrac{12+11\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

g) $\dfrac{23+10\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$

Logaritmación de números reales

28. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y complétala escribiendo en notación logarítmica las expresiones dadas en notación exponencial y viceversa.

Tabla 1.3

Notación exponencial	Notación logarítmica
a) $6^3 = 216$	
	b) $\log_2 \sqrt{2}=\dfrac{1}{2}$
c) $10^{-2} = 0{,}01$	
d) $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[4]{27}$	
	e) $\log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{1}{125}\right)= 3$
	f) $\log 631 = 2{,}8$
g) $10^{0{,}2553} = 1{,}8$	

29. Calcula aplicando la definición de logaritmo.

a) $\log_2 128$ b) $10^{\log 56}$ c) $\log_a 1$ d) $\log 0{,}00001$ e) $3^{\log_3 32}$

f) $\log_{\sqrt{2}} 2$ g) $\log_5 \sqrt{5}$ h) $\log_7\left(\frac{1}{49}\right)$ i) $\log_{\sqrt[3]{2}} 4$ j) $\log_{0,5} 8$

30. Comprueba si las siguientes igualdades son verdaderas.

a) $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 32$ b) $\log_3 9 + \log_3 27 = \log_3 243$

c) $2\log_3 9 = \log_3 81$ d) $\log_5 125 + \log_5 25 - \log_5 5 = \log_5 5$

31. Calcula

a) $\frac{1}{5} - \log_7 \frac{1}{49} \cdot \frac{3^{2\,000} \cdot 25^{1000}}{15^{2\,001}}$ b) $\sqrt[3]{-8} + \log_2 16 - \frac{5^{2\,006} \cdot 2^{2\,006}}{10^{2\,005}}$

32. Calcula hasta tres cifras decimales correctas, con la ayuda de una calculadora

a) $(\ln 4{,}6)^3 + 3{,}5$ b) $\log 34{,}2 + \sqrt{\log 502}$

c) $\sqrt{\ln 0{,}25 + \ln 327}$ d) $\log \frac{1}{3569} - \log \frac{1}{\sqrt{0{,}00024}}$

33. En un laboratorio de microbiología, que produce vacunas avícolas, se inicia un cultivo con una cepa de 100 bacterias que se dividen cada 3 h. Para calcular el tiempo (t, en horas) que el cultivo demora en crecer a una cantidad N, utilizan el modelo siguiente: $t = 3\frac{\log\left(\frac{N}{100}\right)}{\log 2}$.

¿En qué tiempo la cepa crece a 10 000 bacterias?

34. Para determinar la edad de objetos fósiles, los especialistas calculan la cantidad de carbono 14 radiactivo que permanece en él, utilizando la fórmula $A = -8267 \ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$, donde D_0 es la cantidad original de carbono 14 y D es la cantidad restantes en el fósil investigado. ¿Cuál es la edad de un fósil encontrado en el sitio arqueológico Chorro de Maita, de la provincia Holguín, si la cantidad de carbono 14 es el 94 % de la cantidad original?

1.4 Procesamiento estadístico de datos

Desde la enseñanza primaria adquiriste las nociones básicas de estadística, para el procesamiento de informaciones que implicaban la recogida, organización, representación e interpretación de datos por medio de tablas y gráficos. En la secundaría básica, al formalizar los conceptos básicos sobre Estadística Descriptiva, se ampliaron tus conocimientos para analizar e interpretar distribuciones de frecuencias aplicando las medidas de tendencia central. Aprendiste que, en general, la estadística como otras ramas de la matemática, tiene su origen en el desarrollo histórico de la humanidad.

De la historia

Los primeros censos conocidos fueron elaborados con carácter fiscal o para proceder al reclutamiento militar; el primer censo verdadero fue elaborado en la colonia de Nueva Francia (actual Québec), donde el recuento de individuos comenzó en 1665. El primer censo demográfico de características modernas es el efectuado en 1857 por la Dirección General de Estadísticas. A partir de entonces se realizaría un censo general de población los años terminados en cero, tarea confiada al Instituto Nacional de Estadística (INE) desde su creación en 1945.



Fig.1.54

Cuadro *El censo*, obra realizada por el español Isidoro Martín Gares a finales del siglo XIX o principios del XX.

En la actualidad, la **estadística** se ha convertido en una ciencia que ofrece métodos efectivos para explicar, controlar y predecir la variación de datos de diferentes ramas del saber para actuar en consecuencia. Un ejemplo de ello, se puede encontrar en el papel que esta ciencia jugó en el análisis de diferentes modelos matemáticos en el pronóstico de la cantidad de personas que podían ser contagiadas de Coronavirus Sars-Cov-2 como consecuencia de la pandemia que afectó al mundo durante el año 2020, lo que facilitó conocer y mantener informada a la población mundial de los efectos y el comportamiento de la enfermedad en el mundo.

En el periódico Granma *(Órgano oficial del Partido Comunista de Cuba) se publicó el 3 de enero de 2017 un artículo titulado Desvelo en que se revelaba el esfuerzo del país y de los trabajadores de la salud por alcanzar, por noveno año consecutivo, una tasa de mortalidad infantil por debajo de cinco por cada mil nacidos vivos. En este artículo, se expresaba que:*

"No es un hecho aislado y fortuito. Es, en todo caso, la expresión consumada de lo que puede lograrse cuando un país prioriza, contra viento y marea, el acceso universal a la salud y el desarrollo social inclusivo y humano."[1]

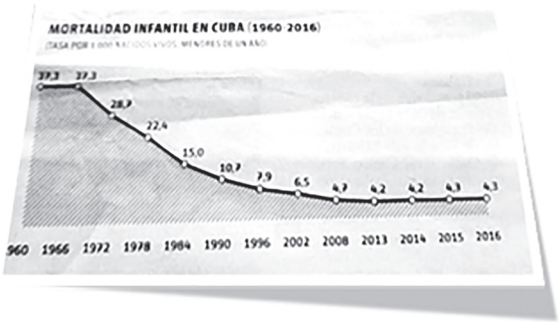


Fig. 1.55 Tasa por cada 1 000 nacidos vivos, menores de un año

Con la ampliación de tus conocimientos en este epígrafe, comprenderás que la Estadística Descriptiva es el conjunto de técnicas y procedimientos estadísticos que ayudan a describir, mostrar y resumir la información de un conjunto de datos y que su objetivo e importancia está direccionado a contribuir al desarrollo de la sociedad. Aprenderás sobre:

- *Cuáles son los métodos que tiene esta rama de la estadística para realizar estudios que expliquen, el por qué es posible obtener estos índices de mortalidad infantil.*
- *Comó utilizar hojas de cálculo y asistentes matemáticos como el GeoGebra, para hacer descripciones, facilitar valoraciones y comunicar las conclusiones.*

[1] Periódico *Granma*, martes 3 de enero de 2017.

– *Cómo organizar un proceso investigativo para el procesamiento estadístico de datos que permitan estudiar acontecimientos como el que acabas de leer.*

El ciclo investigativo para el procesamiento estadístico de datos

No hay dudas de que cada vez es más imprescindible el empleo de la estadística en las investigaciones de acontecimientos, fenómenos o procesos de carácter sociopolítico, económico-laboral, científico-tecnológico y ambiental; como por ejemplo al hacer un pronóstico y tomar decisiones sobre las temperaturas, las lluvias, los períodos de sequías, la erosión o cualquier fenómeno atmosférico o climatológico, lo que implica sin lugar a dudas el estudio profundo y continuado de los resultados históricos, físicos, químicos, biológicos que han influido y que resultan de interés para los especialistas. En cualquier caso, independientemente de su naturaleza, se deben proyectar las acciones para el procesamiento estadístico de los datos.

Imagina que eres parte del colectivo de profesores de Matemática de un Instituto Preuniversitario que desean hacer un estudio acerca de los resultados alcanzados por los estudiantes en el examen de ingreso a la Educación Superior en esa asignatura, con la finalidad de trazar estrategias desde el 10.º grado que permitan garantizar la preparación de los estudiantes para su ingreso a la universidad.

¿Qué procedimientos realizarías, si fueras el profesor encargado de realizar este estudio?

¿Qué acciones se pueden realizar para obtener resultados más objetivos en función de la toma de deciciones o para reorientar una nueva estrategia?

Seguramente recordarás que en Secundaria Básica aprendiste un procedimiento que te permitía realizar el procesamiento de datos. Primeramente realizabas el análisis de la situación inicial, después la obtención de los datos, la simplificación de estos y por último la comunicación de los resultados.

En este nivel de enseñanza ampliarás tus conocimientos de estadística, con el estudio de las acciones del **ciclo investigativo para el procesamiento estadístico de datos**, de otros procedimientos y recursos estadísticos que aplicarás en la realización de tareas vinculadas a problemas de la realidad.

Etapas del ciclo investigativo

Primera etapa: análisis de la situación inicial
Acciones:

- Analizar la situación de partida para precisar interrogantes y determinar la o las variables que se van a estudiar y los datos que se requieren.
- Caracterizar el tipo de las variables que se quieren estudiar e identificar la escala en que se pueden cuantificar.

Segunda etapa: planificación y recolección de los datos
Acciones:

- Programar la recolección de los datos (determinar cómo seleccionar las muestras, aplicando en especial técnicas de muestreo simple aleatorio, precisar cómo cuantificar las observaciones, cómo debe ser la hoja de codificación, qué métodos e instrumentos a utilizar).
- Elaborar instrumentos para la recolección de datos.
- Recopilar, registrar, organizar y clasificar datos.

Tercera etapa: análisis de los datos recopilados
Acciones:

- Determinar las tablas, gráficos y características numéricas más adecuadas para procesar los datos con vista a extraer la mayor información posible.
- Describir los datos, estableciendo relaciones entre las distintas formas de representación, lo que implica:
  - Descripción literal de los datos.
  - Lectura más allá de los datos (que incluye la representación de los datos mediante tablas y gráficos, calcular frecuencias y medidas características, como las medidas de tendencia central y de dispersión).
  - Introducir, modificar, exportar datos en un software y trabajar con este.
- Analizar los datos en cuanto a: forma general de su distribución, rango, regularidad, dispersión, valores atípicos; sentido de los resultados para hacer conjeturas o juzgar una hipótesis previamente planteada y si es más o menos probable cierto comportamiento de una variable en una población.

Cuarta etapa: interpretación y arribo a conclusiones
Acciones:

- Interpretar los resultados obtenidos estableciendo relaciones con el contexto.
- Arribar a conclusiones.
- Valorar los resultados obtenidos, hacer predicciones y plantearse nuevas interrogantes.
- Comunicar los resultados de la investigación realizada.

Las acciones descritas en cada una de las etapas del **ciclo investigativo para el procesamiento estadístico de datos**, constituirán una guía para la resolución de los problemas estadísticos que realizarás en este nivel de enseñanza.

Investiga y aprende

Selecciona con tu equipo de estudio uno o varios temas de interés para iniciar una investigación estadística sobre una de las variables asociada a dicho tema que consideres importante, en la que apliques el ciclo investigativo del procesamiento estadístico de datos y elabora un informe de la investigación realizada.

Para desarrollar el ciclo investigativo debes prestar atención a las acciones que te permiten transitar de una etapa a la otra y que determinan la objetividad de los resultados de la cuarta etapa. Entre estas acciones se destacan:

- determinar y clasificar las variables,
- recopilar los datos según la escala de medición correspondiente,
- determinar el tipo de tabla de frecuencia,
- representar la distribución de frecuencias en gráficos,
- interpretar la información.

Sobre estas y otras acciones continuaremos tratando en el desarrollo del epígrafe.

Variable estadística. Escalas de medición de la variable

Conoces que, entre las acciones del ciclo investigativo, a partir de la definición del problema de investigación, se necesita decidir qué características, atributos o cualidades medibles intervienen en un proceso o fenómeno de la realidad y serán objeto de estudio, es decir, se determinan las variables estadísticas.

Recuerda que...

La variable estadística es una característica de interés que posee cada elemento de una población y que se puede medir de acuerdo con las propiedades de las variables estadísticas, estas se clasifican en **categóricas** (o **cualitativas**) y **numéricas** (o **cuantitativas**).

Son variables **categóricas** (o cualitativas) las que se refieren a características o atributos que expresan una cualidad.

Son variables **numéricas** (o **cuantitativas**) las que se refieren a valores que expresan una cantidad o cantidad de magnitud y por tanto son números. Por su naturaleza se clasifican en **discretas** o **continuas**:

Es **discreta** cuando solo puede tomar un número finito o a lo sumo infinito numerable de valores, con los cuales es posible establecer una correspondencia biunívoca con el conjunto de los números enteros o subconjuntos propios de este.

Es **continua** cuando puede tomar todos los valores dentro de un intervalo $(a;b)$ de números reales y no toma valores aislados.

Sin embargo, es de vital importancia comprender cómo realizar la medición de la variable, dado que determina acerca de qué procesamiento estadístico puede realizarse con la información recopilada.

Definición 1.6

Medir es poner en correspondencia las observaciones registradas con cierta estructura simbólica, no necesariamente numérica, que admite un conjunto restringido de operaciones, con las que puede determinarse la incertidumbre del resultado.

¿Sabías que...?

Hasta las primeras décadas del siglo xx muchos investigadores dudaban de la posibilidad de medir las características de un fenómeno social, y se cometía el error de quererlo hacer como en los fenómenos físicos, químicos, matemáticos, etcétera.

Sin embargo, en la actualidad se han logrado avances en la medición de las propiedades de los diversos fenómenos que se estudian, y dentro de ellos los correspondientes a las ciencias sociales.

Para medir las variables estadísticas se han establecido las escalas de medición, en las cuales la variable que se estudia se puede dividir en categorías o clases mutuamente excluyentes y exhaustivas.

Clasificación de las escalas de medición

- Nominal (o clasificatoria)
- Ordinal (o de rango)
- De intervalo
- De razón (o proporción)

¡Atención!

Las clases son excluyentes cuando un elemento o individuo cualquiera en una de ellas no puede ser considerado en otra, y son exhaustivas, porque la unión de todas las clases es igual al tamaño del grupo o la totalidad de las observaciones que se estudia

¿Qué características de las escalas de medición de las variables, distinguen sus diferencias en correspondencia con el atributo que se está midiendo?

Escala nominal (o clasificatoria): es aquella variable en que se establece un número determinado de categorías o clases tales que cada elemento del conjunto pertenezca a una y solo una clase. Las variables en escala nominal pueden clasificarse en dicotómicas (solo dos categorías) o politómicas (más de dos categorías).

Ejemplos: sexo, estado civil, profesión, entre otros.

Características:

- La igualdad se obtiene entre elementos de una misma categoría o clase.
- La desigualdad se obtiene entre elementos de clases diferentes.
- Los códigos numéricos que se le asignen a las categorías no pueden ser operados aritméticamente.
- Solo es posible hallar la moda en caso que exista.

Escala ordinal (o de rango): es aquella variable que está medida en una escala nominal entre cuyas categorías o clases está definido un orden de modo que cualesquiera que sean dos de ellas una será mayor o superior, en algún sentido, que la otra. Esta estructura satisface las exigencias de una relación de orden.

Ejemplos: nivel de escolaridad, grado de satisfacción por un curso, entre otras.

Características:

- La igualdad se obtiene entre elementos de una misma categoría o clase.
- La desigualdad se obtiene entre elementos de clases diferentes.
- Existe una relación de orden entre los elementos de dos clases diferentes.
- Los códigos numéricos que se le asignen a las categorías no pueden ser operados aritméticamente, aunque se pueden establecer comparaciones entre ellos.
- Solo es posible hallar la mediana y la moda en caso que exista.

Escala de intervalo: es aquella variable que está medida en una escala ordinal y la distancia entre categorías es la misma a lo largo de toda la escala.

Ejemplos: el registro de la temperatura en Rusia medida en grados Celsius, puede tomar cualquier valor negativo (bajo cero, mucho frío), positivo (sobre cero, poco o mucho calor) o cero grados (no hay ausencia de temperatura), entre otros.

Características:

- La relación de orden está bien definida internamente en cada una de las clases y entre las clases.
- La distancia o diferencia entre las clases o categorías consecutivas es la misma.
- Generalmente existe una unidad de medida común para todas las categorías.
- Puede operarse aritméticamente y, por tanto, estadísticamente.

Escala de razón (o proporción): es aquella variable que está medida en una escala de intervalo que posee un cero absoluto, (es decir, la escala contiene un punto donde no existe la propiedad de la variable que se está midiendo). En ella la razón entre dos clases o categorías cualesquiera permanece invariable ante toda transformación de la escala en otra escala de razón

Ejemplos: la edad de los estudiantes, la estatura de un grupo de jóvenes, la cantidad de estudiantes de una escuela.

Características:

- La relación de orden está bien definida internamente en cada una de las clases y entre las clases.
- La razón entre valores de la variable adquiere significado.
- Generalmente existe una unidad de medida común para todas las clases o categorías.
- La igualdad se obtiene entre elementos de una misma clase o categoría.
- El valor cero es absoluto, indica ausencia total o parcial de la variable que se mide.

Ejemplo 1.47

Determinar el tipo de escala de medición que corresponde a las variables estadísticas que se presentan en cada uno de los grupos siguientes:

Grupo **A**. La latitud y la longitud geográfica a la que está situado un objeto y la hora militar.

Grupo **B**. Tipos de enfermedad, color de los ojos y color de la piel.

Grupo **C**. La cantidad de litros de líquido contenido en un recipiente durante un determindo período de tiempo.

Grupo **D**. Nivel de motivación por el estudio de una asignatura y la clasificación de los estudiantes por su rendimiento académico.

Resolución:

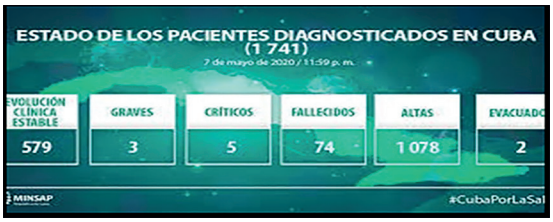
Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D
De intervalo	Nominal	De razón	Ordinal

♦

Aplica tus conocimientos

1. *¿Qué tipo de escala consideras más apropiada para medir variables cualitativas y cuales para medir las variables cuantitativas?*
2. *¿Cómo se clasifica la variable estadística del artículo publicado el 3 de enero de 2017 titulado Desvelo? ¿Cuál es la escala de medición utilizada? Identifica otras dos posibles variables estadísticas asociadas a ese estudio, y determina la escala de medición de los valores o categorías que le corresponden.*
3. *Durante el proceso de seguimiento y atención de las incidencias provocadas por la pandemia Covid-19 en Cuba, por medio de una conferencia*

de prensa diaria realizada por el MINSAP, se actualizaban los datos sobre el estado de los pacientes en una tabla como la siguiente:



(Fuente: Periódico *Gramma,* 7 de mayo 2020

3.1 *¿En cuál de las escalas de medición ubicarías las categorías utilizadas en la información que brinda la tabla?*

3.2 *Menciona para cada uno de los tipos de escalas de medición de las variables, al menos dos ejemplos de variables estadísticas utilizadas en estas informaciones.*

Distribución de frecuencias

La información estadística puede constar de un gran número de observaciones y mientras mayor sea el número de datos, mayor será la conveniencia de presentarla en forma resumida, de manera que se revele la naturaleza de dicha información.

Considera que en la situación planteada inicialmente sobre el estudio de los resultados del examen de ingreso a la Educación Superior en la asignatura Matemática después de identificado el problema, se procedió a la realización del ***análisis de la situación inicial***, ***la planificación*** *y* ***la recolección de los datos***, *para lo cual se determinó analizar las calificaciones obtenidas por un grupo de estudiantes que realizaron el examen. Una vez recopilada la información, se presentó de la siguiente manera:*

Tabla 1.4

71	84,5	83	87	55	82	65	35	80	62,5	100	60	70	98	44
100	65	77	40	92,5	62	50	47	52	33,5	89,5	85	88	81	52
72	79	98	84	88,5	60	30	62	70	69,5	95,5	78	70	42	65

¿Cuál es la población y el tamaño de la población?

¿Cómo clasificarías la variable objeto de estudio? ¿Por qué?

¿Son suficientes los datos así presentados, para hacer una valoración de los resultados?

¿Cómo continuar a partir de esta información, con las acciones que se proponen en el ciclo investigativo para el procesamiento estadístico de datos?

Coincidirás en que se requiere organizar la información en una **distribución de frecuencia**.

Recuerda que...

Se entiende por una **distribución de frecuencias** a la organización de las observaciones en una tabla convenientemente preparada, mediante un grupo de categorías o clases establecidas.

Las distribuciones de frecuencias pueden ser **simples** (cuando se establecen categorías o clases de modo que cada clase sea una subdivisión del campo de posibilidades) o **por datos agrupados en intervalos de clases** (cuando se establecen intervalos reales de modo que cada intervalo sea una subdivisión del campo de posibilidades), ellas permiten descubrir regularidades en el conjunto de datos.

Para realizar la distribución de frecuencias es necesario analizar el tipo de variable y las características de los datos, para decidir sobre la manera más conveniente en que estos pueden ser organizados en una tabla de frecuencia de datos simples o agrupados en intervalos de clases.

De considerarlo necesario, construir una tabla de frecuencia con datos agrupados en intervalos de clases; se deben determinar las clases a partir de los pasos siguientes:

- hallar el recorrido o rango del conjunto de datos u observaciones,
- determinar el número de clases,
- hallar la amplitud de cada clase,
- determinar las clases.

Recuerda que...

- **Rango o recorrido de la variable** es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor del conjunto de valores que toma la variable.
- **Clase de frecuencia** es el conjunto de todos los individuos u observaciones de la variable que se encuentran entre determinados límites.

- **Límites de clase** son los valores extremos que delimitan cada clase. El menor es el límite inferior que se denota l_i y el mayor es el límite superior l_s.
- **Amplitud de clase** es el rango entre los límites o extremos del intervalo. Se obtiene calculando $l_s - l_i$.
- **Marca de clase** es el punto medio de la clase y se obtiene, mediante la semisuma de los límites (inferior y superior) de la clase, se denota (x_i) y se calcula $x_i = \frac{l_s + l_i}{2}$.
- **Límite de clase real** es aquel valor que se obtiene: sustrayendo media unidad (0,5) al límite inferior del intervalo si son valores enteros consecutivos, en el caso del límite real superior del intervalo se obtiene adicionándole media unidad (0,5) al extremo o límite superior del intervalo. En el caso de ser valores decimales con un lugar decimal se le sustrae y se le adiciona 0,05 a cada límite y de constar con dos lugares decimales se le sustrae y se le adiciona a cada límite 0,005. Todo límite de clase real lo representamos por L_i.

Ejemplo 1.48

Determinar las clases para la construcción de la tabla de frecuencias, con los datos de la tabla 1.6, referidos al estudio de los resultados del examen de ingreso a la Educación Superior en la asignatura Matemática que realizas como parte del colectivo de profesores de esa materia de un Instituto Preuniversitario.

Resolución:

Como el menor de los datos es 30 y el mayor es 100, el rango es 70, por lo que se pueden determinar siete clases de amplitud 10, que son las siguientes:

[30;40), [40;50), [50;60), [60;70), [70;80), [80;90), [90;100] ♦

Reflexiona

¿Qué diferencia presenta la notación de las clases con respecto a la utilizada en secundaria básica? ¿Qué significado tiene para interpretar los límites de clases?

¡Atención!

En el proceso de construcción de la tabla de frecuencias debes tener presente que:

- Las clases deben ser exhaustivas y abarcar la cantidad total de observaciones.
- Deben ser mutuamente excluyentes, o sea, cada medición debe pertenecer a una y solo una de las clases.
- El número de clases no puede ser muy pequeño ni excesivamente grande. Se recomienda no menos de cinco clases y no más de veinte (cuando el número de clases es muy pequeño, se puede producir concentración de datos y cuando es muy grande se puede producir dispersión).
- Las clases deben tener, siempre que sea posible, la misma amplitud.
- Deben evitarse clases nulas, o sea, no deben existir clases en que no se han realizado observaciones.
- El número de clases se puede determinar de acuerdo con la cantidad de observaciones disponibles.

En la misma situación planteada inicialmente, una vez determinadas las clases de frecuencias para iniciar el análisis de los datos recopilados, y hacer la valoración de los resultados del examen de ingreso de Matemática, los profesores de ese Instituto Preuniversitario prepararon la siguiente tabla con los elementos que se muestran a continuación.

Tabla 1.5

Clases	F_i	f_i	f_i %	$F_{ai}\downarrow$	f_{ai} % $\downarrow$	$F_{ai}\uparrow$	f_{ai} % $\uparrow$
[30;40)							
[40;50)							
⋮							
[90;100]							

¿Qué significado tienen las columnas encabezas con las notaciones $F_{ai}\downarrow$, f_{ai} % $\downarrow$, $F_{ai}\uparrow$ y f_{ai}% $\uparrow$ en la tabla 1.5?

Seguramente identificaste en la tabla de frecuencias elaborada, las columnas correspondientes a la **frecuencia absoluta** y la **frecuencia relativa**.

Recuerda que...

- La frecuencia absoluta (F_i) de una categoría o clase es el número de observaciones o de veces que aparece repetida esa categoría o clase.
- La frecuencia relativa (f_i) de una categoría o clase es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de observaciones que intervienen en la distribución.
- La frecuencia relativa (f_i) también se puede expresar como un tanto por ciento f_i %.
- La suma de las frecuencias relativas de las clases establecidas para una variable en una distribución de frecuencias es igual a 1, salvo por cuestiones de aproximación y cuando está expresada como tanto porciento es igual al 100 %.

Las columnas encabezadas con las notaciones F_{ai} y f_{ai} en la tabla 1.5, expresan dos conceptos que te serán muy útiles en el procesamiento estadístico de datos de las tareas investigativas que estás desarrollando, estos son: **frecuencia absoluta acumulada** (F_{ai}) y **frecuencia relativa acumulada** (f_{ai}).

Definición 1.7

La **frecuencia absoluta acumulada** ***(F_{ai})*** de una categoría o clase es la suma de la frecuencia de esta clase con la de la(s) clase(s) anterior(es), es decir, la suma de las frecuencias absolutas de las clases anteriores o iguales.

Definición 1.8

La **frecuencia relativa acumulada** ***(f_{ai})*** de una categoría o clase es la suma de la frecuencia relativa de esta clase con la de la(s) clase(s) anterior(es), o simplemente es el cociente al dividir la frecuencia absoluta acumulada de la clase entre el número total de observaciones (los datos) que intervienen en la distribución.

Ambas frecuencias se obtienen sumando de manera acumulativa los valores de las frecuencias absolutas o relativas respectivas, lo que se puede realizar acumulando de arriba hacia abajo ($F_{ai}\downarrow$, f_{ai} % $\downarrow$) o viceversa ($F_{ai}\uparrow$ y f_{ai} % $\uparrow$), según sea el interés del estudio que se pretende realizar; con una flecha se indica la dirección de la acumulación.

Determinar las frecuencias absolutas acumuladas y las frecuencias relativas acumuladas en una tabla de frecuencias, resulta de gran importancia para profundizar en el análisis e interpretación de datos. Tienen sentido para datos en escala ordinal y en particular facilita el cálculo de las medidas de tendencia central fundamentalmente de la mediana, así como para el análisis de las situaciones estudiadas mediante su representación gráfica.

Aplica tus conocimientos

Transcribe a tu cuaderno la tabla 1.5 y complétala.

(Ten presente que para completar las columnas de frecuencias acumuladas debes hacerlo de arriba hacia abajo (↓) y de abajo hacia arriba (↑) tanto para las frecuencias absolutas como para las relativas, para lo cual debes aplicar las definiciones 1.7 y 1.8).

Escoge de entre los gráficos estudiados, los que consideres más adecuados para hacer una representación gráfica de la distribución de frecuencias.

Gráfico de frecuencias acumuladas

Conoces de grados anteriores que, para dar cumplimiento a las acciones del ciclo investigativo referidas a la representación de la información, se pueden emplear gráficos de barras, de pastel (circulares), pictogramas, así como histogramas y polígonos de frecuencias. Estos tienen gran utilidad para representar frecuencias absolutas y relativas.

El colectivo de profesores de Preuniversitario en el cual trabajas desde la situación planteada inicialmente, sobre los resultados del examen de ingreso de Matemática, valora la utilidad que tienen los gráficos conocidos para ilustrar la información resumida en la tabla de frecuencias. Sin embargo, en un momento del análisis se plantean los cuestionamientos siguientes:

¿Cómo obtener mayor información a partir de las frecuencias acumuladas?

¿Permiten los gráficos conocidos representar las frecuencias acumuladas?

Para el caso de las frecuencias acumuladas se utiliza el gráfico denominado **Ojiva**, cuyas características se presentan a continuación:

- La ojiva es una gráfica lineal que representa frecuencias acumuladas, de la misma forma que la distribución de frecuencias acumuladas (figura 1.56).
- Utiliza fronteras de clase a lo largo de la escala horizontal, pues la gráfica comienza con la frontera inferior de la primera clase y termina con la frontera superior de la última clase.

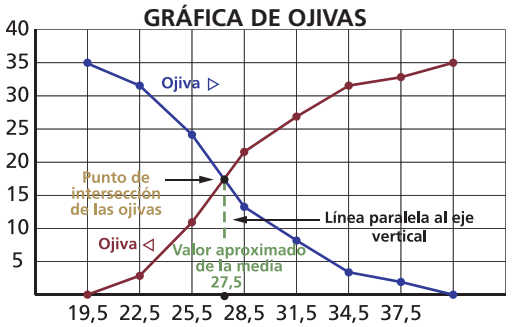


Fig. 1.56

- Puede graficarse de abajo hacia arriba (acumulado por encima) o de arriba hacia abajo (acumulado por debajo).
- Las ojivas son útiles para determinar el número de valores que se encuentran por debajo de un valor específico.
- La ojiva es una idealización del comportamiento creciente (↑) del polígono de frecuencias acumuladas.

Una **ojiva** tiene los componentes siguientes:

1. Un título, que identifica la población o muestra.
2. Una escala vertical, que identifica ya sea las frecuencias absolutas acumuladas o las frecuencias relativas acumuladas.
3. Una escala horizontal, que identifica las fronteras superiores del grupo (hasta que se haya alcanzado la frontera superior de un grupo, no se puede estar seguro de haber acumulado todos los datos en ese grupo. Por tanto, la escala horizontal para una ojiva está siempre basada en las fronteras superiores de grupo).

Ejemplo 1.49

Considerar la tabla (1.5) que se completó con los datos sobre las calificaciones obtenidas por los 45 estudiantes en el examen de ingreso de Matemática a la Educación Superior, que realizaste en el colectivo de profesores del Instituto Preuniversitario.

Tabla 1.6

Clases	F_i	f_i	f_i %	$F_{ai}\downarrow$	f_{ai} % $\downarrow$	$F_{ai}\uparrow$	f_{ai} % $\uparrow$
[30;40)	3	$\frac{3}{45}$	6,7	3	6,7	45	100
[40;50)	4	$\frac{4}{45}$	8,9	7	15,6	43	95,6
[50;60)	4	$\frac{4}{45}$	8,9	11	24,5	38	84,4
[60;70)	9	$\frac{9}{45}$	20	20	44,5	34	75,6
[70;80)	8	$\frac{8}{45}$	17,8	28	62,3	25	55,6
[80;90)	11	$\frac{11}{45}$	24,4	39	86,7	17	37,8
[90;100]	6	$\frac{6}{45}$	13,3	45	100	6	13,3
	$\sum_{i=1}^{7} F_i = 45$	1					

a) Representar la ojiva que corresponde a la frecuencia absoluta acumulada de abajo hacia arriba (acumulado por encima).

b) Observar la ojiva y determinar de manera más aproximada:

- La cantidad de estudiantes que obtuvieron calificaciones inferiores a 70 puntos.
- La cantidad de estudiantes que obtuvieron calificaciones iguales o superiores a 90 puntos.

Resolución:

a) La ojiva solicitada se muestra en la figura 1.57.

b) Al observar la ojiva se puede determinar que:

- Veinte estudiantes obtuvieron calificaciones inferiores a 70 puntos.
- Seis estudiantes obtuvieron calificaciones iguales o superiores a 90 puntos. Se obtiene sustrayéndole 39 a 45. ♦

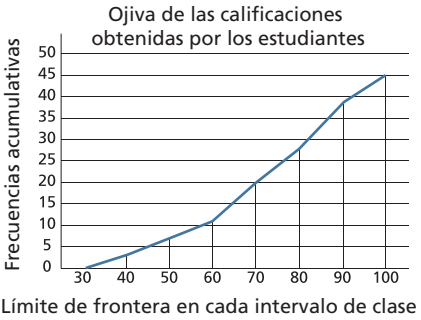


Fig. 1.57

Aplica tus conocimientos

1. *Con los datos del ejemplo 1.49. Construye la ojiva para la frecuencia relativa acumulada (de arriba hacia abajo).*

1.1 *Estima qué porcentaje de los estudiantes obtuvo calificación inferior a 70 puntos.*

1.2 *Valora sobre qué características numéricas utilizarías para interpretar la información.*

2. *El histograma de la figura, muestra la información estadística por semana, de la cantidad de casos positivos a la Covid-19, confirmados en Cuba, hasta el 9 de julio de 2020.*

2.1 *Elabora al menos tres interrogantes que permitan revelar la información que aporta la gráfica.*

2.2 *Utiliza la información del gráfico (figura 1.58) para construir un gráfico de frecuencia acumulada.*

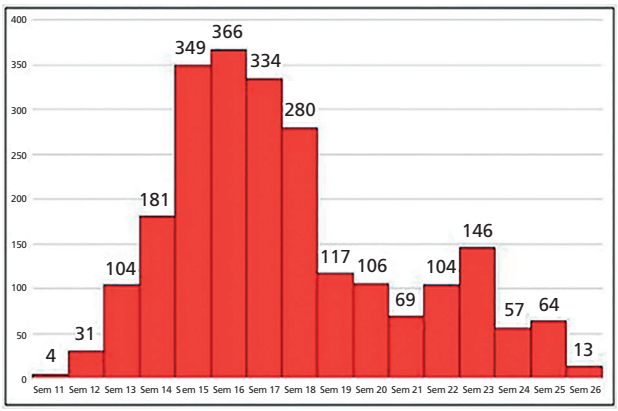


Fig.1.58

Medidas de tendencia central

Los datos organizados en las tablas de frecuencias y representados en los gráficos permiten describir algunas de las características mostradas en la distribución de frecuencias, sin embargo en el **ciclo investigativo para el procesamiento estadístico de datos** se buscan las características númericas más apropiadas para hacer un análisis más profundo del comportamiento de la variable estadística.

El colectivo de profesores de Preuniversitario en el cual participas, después de tener la distribución de frecuencias y la representación gráfica de los datos consideran que los elementos analizados hasta el momento no aportan las condiciones para hacer una valoración de los resultados obtenidos por los 45 estudiantes en el examen de ingreso de Matemática, y tomar decisiones para una nueva estrategia. Ante esta reflexión, le proponen calcular las ***medidas de tendencia central****, ya conocidas por ti, sin embargo, se plantean las interrogantes siguientes:*

¿Será suficiente el cálculo de la media aritmética?

¿Cómo se calcula la moda y la mediana para datos agrupados?

Las medidas de tendencia central, como su nombre lo indica, son valores representativos del conjunto de datos que tienen como objetivo buscar un valor central que represente los datos. Estos permiten la descripción de las variables que son objeto de estudio.

Entre las medidas de tendencia central ya conocidas por tí se encuentran la media aritmética, la moda y la mediana. También aprendiste sus definiciones, el significado de cada una de ellas, su utilidad para el análisis y procesamiento de datos, así como, los procedimientos para determinarla, los que aplicaste a la formulación y resolución de problemas que te exigían hacer descripciones y analizar el comportamiento de datos a partir de la situación objeto de estudio, preferiblemente en variables discretas para datos simples. También conociste algunas de sus características, ventajas y desventajas de su utilización.

Recuerda que...

- Sean $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, los valores observados de una variable numérica en un conjunto de personas, objetos o eventos. La **Media Aritmética** (es un valor promedio del conjunto de datos alrededor del cual se encuentran los datos de dicho conjunto.

Para un **conjunto de datos simples**, se calcula mediante la fórmula $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, donde n es la cantidad total de valores observados.

Para un **conjunto de datos agrupados en intervalos de clases** o en la propia distribución de frecuencias se calcula mediante la media ponderada aplicando la fórmula. $\bar{x} = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 + \ldots + F_nx_n}{F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n}$

- **La Moda (Mo)** de un conjunto $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ es el valor (o los valores) que se presenta (presentan) con más frecuencia en ese conjunto.
- **La Mediana (Me)** de un conjunto $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, de datos dispuestos en orden creciente (o decreciente) es:
  - El valor que equidista de los extremos, si n es impar ocupa la posición $\frac{n+1}{2}$.
  - La media aritmética de los dos valores centrales, si n es par el promedio de los valores que ocupan las posiciones $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2}+1$.

¿? ¿Sabías que...?

Para calcular la media aritmética para un conjunto de **datos simples** de manera abreviada se utiliza el símbolo de sumatoria Σ (letra griega **sigma** mayúscula), correspondiente a nuestra letra *S* (que significa suma)

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

En la expresión $\sum_{i=m}^{n} a_i$; Σ (nos indica sumar); $i = m$ (nos indica comenzar con $i = m$) e $i = n$ (nos indica terminar con $i = n$)

Ejemplo: $\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$ la aplicación de la definición de sumatoria en la fórmula para calcular la media aritmética para un conjunto de **datos simples** se expresa: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Para un conjunto de **datos agrupados** en k intervalos de clase o en la propia distribución de frecuencias se calcula mediante la media ponderada aplicando la fórmula: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{k} F_i}$ donde: F_i es la frecuencia absoluta y x_i es la marca de clase.

Ejemplo 1.50

Calcular la **media aritmética** de las calificaciones obtenidas por los estudiantes del Instituto Preuniversitario en el examen de ingreso de Matemática aplicando la fórmula:

$$\bar{x} = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 + \ldots\ldots\ldots + F_nx_n}{F_1 + F_2 + F_3 + \ldots\ldots\ldots + F_n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{k} F_i}$$

Resolución:

Primero se completó la tabla de frecuencias 1.6 con dos columnas x_i y $F_i\,x_i$ donde x_i es la marca de la clase y $F_i \cdot x_i$ el producto de la frecuencia absoluta por la marca de clase como se muestra en la tabla siguiente.

Tabla 1.7

Clases	F_i	f_i	f_i %	$F_{ai}\downarrow$	f_{ai} % $\downarrow$	$F_{ai}\uparrow$	f_{ai} % $\uparrow$	x_i	$F_i \cdot x_i$
[30;40)	3	$\frac{3}{45}$	6,7	3	6,7	45	100	35	105
[40;50)	4	$\frac{4}{45}$	8,9	7	15,6	43	95,6	45	180
[50;60)	4	$\frac{4}{45}$	8,9	11	24,5	38	84,4	55	220
[60;70)	9	$\frac{9}{45}$	20	20	44,5	34	75,6	65	585
[70;80)	8	$\frac{8}{45}$	17,8	28	62,3	25	55,6	75	600
[80;90)	11	$\frac{11}{45}$	24,4	39	86,7	17	37,8	85	935
[90;100]	6	$\frac{6}{45}$	13,3	45	100	6	13,3	95	570

Posteriormente calcularon $\sum_{i=1}^{7} F_i \cdot x_i$ y obtuvieron como resultado 3 195.

De la misma forma calcularon $\sum_{i=1}^{7} F_i$ y obtuvieron como resultado 45, lo que permitió calcular la media aritmética $\bar{x} = \frac{3195}{45} = 71$ de las calificaciones obtenidas por los estudiantes en el examen de ingreso de Matemática. Esto significa que la calificación promedio del grupo en estudio es de 71 puntos. ♦

¡Atención!

En la práctica cuando se requiere calcular la media aritmética a partir de datos agrupados en intervalos de clases en tablas de frecuencia, se acostumbra a incorporar dos columnas: una para la marca de clase x_i y otra que represente el producto de la frecuencia absoluta por la marca de clase $F_i \cdot x_i$ y en la parte inferior una fila en que se expresen los resultados de las sumatorias $\sum_{i=1}^{n} F_i$ y $\sum_{i=1}^{n} F_i x_i$

Aplica tus conocimientos

Di cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas y de las que sean falsas justifica por qué lo son.

a) Las medidas de tendencia central son medidas de posición.
b) La media aritmética de un conjunto de datos no es única.
c) La media aritmética está influida por valores extremos.
d) La media aritmética se puede calcular cuando la variable es categórica.
e) La moda es el dato que tiene mayor frecuencia absoluta en un conjunto de datos.
f) La moda es única.
g) La moda se utiliza únicamente en el análisis de situaciones en que intervienen variables cualitativas.
h) La mediana siempre ocupa el valor central de un conjunto de datos.
i) La mediana se puede calcular solamente en distribuciones de frecuencias que sean numéricas.
j) La mediana es el valor que equidista de los extremos en un conjunto de datos ordenados en forma creciente o decreciente.

Con respecto a las medidas de tendencia central para datos agrupados en intervalos de clase, hasta ahora de la moda y la mediana solamente aprendiste a determinar la clase modal y la clase mediana. En lo que sigue conocerás las fórmulas estadísticas que te permiten calcularlas, aunque en

la actualidad con la aplicación de los asistentes matemáticos como el GeoGebra podrás calcularlas con mayor rapidez y precisión.

Cálculo de modas para datos agrupados en intervalos de clase

La(s) moda(s) para un conjunto de datos agrupados en *n*-clases se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$M_o = L_i + \left[\frac{n_1}{n_1 + n_2}\right] \cdot l$$

Donde:

L_i: límite inferior real de la clase modal.
n_1: exceso de la frecuencia modal sobre la frecuencia de la clase anterior más próxima.
n_2: exceso de la frecuencia modal sobre la frecuencia de la clase posterior más próxima.
l: amplitud del intervalo de clase modal.

Ejemplo 1.51

Calcular la moda de las calificaciones en el examen de ingreso de Matemática, de los 45 estudiantes del estudio realizado por el colectivo de profesores del Instituto Preuniversitario (tomar como referencia la tabla 1.7).

Resolución:

Para ello se aplica la siguiente sucesión de acciones:

- Identificar la clase modal. En este caso es: [80;90).
- Determinar L_i, que es el límite inferior real de la clase modal. En este caso es: 79,5.
- Determinar n_1 que es el exceso de la frecuencia modal sobre la frecuencia de la clase anterior más próxima y se calcula sustrayendo de la frecuencia de la clase modal (11), la frecuencia de la clase más próxima (8). En este caso es: 11 – 8 = 3 (en ocasiones existen algunas distribuciones en que la clase modal es la primera en este caso el valor de n_1 es el valor de la frecuencia absoluta de la clases modal).
- Determinar n_2 que es el exceso de la frecuencia modal sobre la frecuencia de la clase posterior más próxima y se calcula sustrayendo de la frecuencia de la clase modal (11), la frecuencia de la clase más próxima (6). En este caso es: 11 – 6 = 5 (en ocasiones existen algunas distribuciones

en que la clase modal es la última en este caso el valor de n_2 es el valor de la frecuencia absoluta de la clases modal).

- Determinar *l* que es la amplitud del intervalo de clase modal. En este caso es: 10.
- Sustituir en la fórmula y calcular.

$$\text{Mo} = L_i + \left[\frac{n_1}{n_1 + n_2}\right] \cdot l = 79{,}5 + \left[\frac{3}{3+5}\right] \cdot 10 = 79{,}5 + \frac{3}{8} \cdot 10$$
$$= 79{,}5 + 3{,}75 = 83{,}25 \approx 83{,}3$$

Respuesta: la moda de las calificaciones obtenidas en el examen de ingreso de Matemática en el grupo de estudiantes seleccionado fue aproximadamente igual a 83,3 puntos. ♦

Cálculo de mediana para datos agrupados en intervalos de clase

La mediana para un conjunto de datos agrupados en *n*-clases se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\text{Me} = L_i + \left[\frac{\frac{n}{2} - F_{a_{m-1}}}{F_m}\right] \cdot l$$

Donde:

L_i: límite inferior real de la clase mediana.
n: número de observaciones.
F_m: frecuencia absoluta de la clase mediana.
Fa_{m-1}: frecuencia acumulada hasta la clase anterior a la clase mediana.
l: amplitud del intervalo de la clase mediana.

Ejemplo 1.52

Calcular la mediana de las calificaciones en el examen de ingreso de Matemática, de los 45 estudiantes del estudio realizado por el colectivo de profesores del del Instituto Preuniversitario. Tomar como referencia la tabla 1.7.

Resolución:

Para ello se aplica la siguiente sucesión de acciones:

- Determinar *n* que representa el número de observaciones. En este caso es 45.

- Identificar la clase mediana. Para ello, se divide por dos el valor de *n* ya que la mediana es el valor central de un conjunto de datos ordenados.
- En este caso $\frac{n}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5$, entonces la mediana está entre los valores que ocupa el orden 22 y el 23 de la lista ordenada de datos, así, la clase mediana es la quinta, es decir: [70;80), lo que también se puede observar más fácilmente en la columna de frecuencias absolutas acumuladas.
- Determinar L_l que es el límite inferior real de la clase mediana. En este caso es: 69,5.
- Determinar F_m que es la Frecuencia absoluta de la clase mediana. En este caso es: 8.
- Determinar $F_{am\text{-}1}$ que es la Frecuencia acumulada hasta la clase anterior a la clase mediana. En este caso es: 20.
- Determinar la amplitud del intervalo de la clase mediana. En este caso es 10.
- Sustituir en la fórmula y calcular.

$$M_e = L_l + \frac{\frac{n}{2} - F_{am-1}}{F_m} \cdot I = 69{,}5 + \frac{\frac{45}{2} - 20}{8} \cdot 10 = 69{,}5 + \frac{22{,}5 - 20}{8} \cdot 10 = 69{,}5 + \frac{2{,}5}{8} \cdot 10$$

$$= 69{,}5 + 0{,}3125 \cdot 10 = 69{,}5 + 3{,}125 = 72{,}625 \approx 72{,}6$$

Respuesta: la calificación mediana es aproximadamente igual a 72,6 puntos. ♦

Como puedes observar, estas nuevas fórmulas te amplían los conocimientos adquiridos en la Secundaria Básica y te permiten calcular con mayor exactitud el valor de la moda y la mediana.

En la práctica, para calcular las medidas de tendencia central puedes utilizar asistentes matemáticos conocidos por ti como el GeoGebra, lo cual facilitará la realización de cálculos como los efectuados al aplicar las fórmulas anteriores.

Aplica tus conocimientos

Utiliza el GeoGebra para calcular la media aritmética y la mediana de las calificaciones obtenidas por los 45 estudiantes en el examen de ingreso a la Educación Superior en la asignatura Matemática y compara los resultados obtenidos al aplicar el asistente con los obtenidos utilizando las fórmulas.

Recuerda que para ello debes:

- *Abrir la opción Hoja de Cálculo.*
- *Introducir los datos (insertar los valores o los códigos numéricos según sea el tipo de variable que se estudia).*
- *Seleccionar la matriz de los datos. Para ello debes seleccionar en la barra de herramientas la opción Análisis de una variable.*
- *Pulsar en Analiza.*
- *Seleccionar el icono Mostrar estadísticas (Sx).*

Dar clic en esta celda y saldrán los valores representativos.

Al calcular la moda y la mediana seguramente te diste cuenta que no obtuvistes exactamente los mismos valores que al aplicar las fórmulas anteriormente dadas, sino que obtuviste otros valores que se aproximan al calculado con la fórmula. Esto se debe a que al introducir los datos utilizando el GeoGebra (en este caso las calificaciones de los estudiantes) se toman directamente los datos que aparecen en la tabla 1.6 (las calificaciones en bruto) sin agruparlo en intervalos de clases lo que incide que se logre con la aplicación del asistente mayor nivel de precisión en los resultados que el obtenido aplicando las fórmulas.

Reflexiona

¿Consideras que los profesores del Instituto Preuniversitario poseen todos los elementos para analizar los resultados del examen de ingreso de Matemática y realizar una valoración profunda que les permita trazar nuevas estrategias de aprendizaje de la asignatura? Fundamenta tu respuesta.

Medidas de dispersión

Debes haber notado que en la tercera etapa del **ciclo investigativo** una de las acciones se refiere a: *calcular frecuencias y medidas características como las de tendencia central y las de dispersión*. En cuanto a las medidas de tendencia central, ya conoces que permiten describir una distribución; sin embargo, no siempre ofrecen una idea completa del fenómeno que se investiga, porque estos pueden estar influidos por la variabilidad de los datos, es decir, por su dispersión o concentración alrededor de determinados valores.

A continuación tendrás la oportunidad de ampliar tus conocimientos sobre el significado y utilidad que tienen otras caracerísticas o medidas numéricas

para cumplimentar las acciones de las etapas del **ciclo investigativo** y en particular para realizar una valoración lo más aproximada posible de la realidad que se investiga para lo cual te proponemos el siguiente problema.

El director de un Instituto Preuniversitario desea conocer el estado del aprendizaje de los estudiantes en el contenido relacionado con las operaciones con números reales que se estudia en 10.° grado y determinar cuál de los dos grupos docentes está mejor preparado en este contenido. Para ello, aplicó una pregunta escrita (calificada en la escala 1-10) a los 30 estudiantes de cada uno de los dos grupos de su escuela, cuyos resultados por grupo y estudiantes se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 1.8

Grupo 1															
Estudiantes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Calificaciones	8	9	6	7	6	9	9	7	8	7	8	5	7	8	7
Estudiantes	16	17	18	19	20	21	22	23	34	25	26	27	28	29	30
Calificaciones	7	8	7	5	8	7	8	7	9	9	6	7	6	9	8
Grupo 2															
Estudiantes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Calificaciones	6	5	3	7	5	8	9	9	10	7	8	10	7	10	7
Estudiantes	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Calificaciones	7	10	7	10	8	7	10	9	9	8	5	7	3	5	6

Una vez calculadas las tres medidas de tendencia central de las calificaciones obtenidas por los estudiantes en cada grupo se obtuvo para ambos grupos el siguiente resultado:

$\bar{x} = \frac{111}{15} = 7{,}4$; *Me = 7 y Mo = 7*

¿Es posible decidir el grupo que está mejor preparado en este contenido?

¿Puede ser la variabilidad de los datos una característica que se deba considerar en esta situación? ¿Qué medidas o estadígrafos de dispersión explican la variabilidad de los datos?

Cuando se efectúan comparaciones entre dos o más muestras o poblaciones, las distribuciones de frecuencias con medias o medianas iguales pueden tener distintos grados de variabilidad y un error que se comete frecuentemente es ignorar la dispersión (en los casos que proceda) de los datos.

¡Atención!

La variabilidad no debe equipararse con "no semejanza", pues no se trata de cuánto varían unos valores respecto a otros, sino medir algún grado de dispersión o separación entre los valores respecto a un valor central.

Ejemplo 1.53

Considerar las calificaciones registradas de los estudiantes, en la Tabla 1.8 y con la finalidad de ayudar al director del Instituto Preuniversitario, de la situación anterior, a identificar el grupo mejor preparado en el contenido evaluado:

a) Construir una tabla con los datos ordenados ascendentemente.
b) Analizar la variabilidad de las calificaciones obtenidas por los estudiantes de cada grupo, con respecto al valor de la mediana. ¿A qué conclusión puedes arribar?

Resolución:

a) La tabla 1.9 muestra las calificaciones de los estudiantes de los dos grupos las cuales se encuentran ordenadas ascendentemente.

Tabla 1.9

Calificaciones alcanzadas por los estudiantes en la pregunta escrita ordenadas ascendentemente															
G_1	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
	7	8	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9
G_2	3	3	5	5	5	5	6	6	7	7	7	7	7	7	7
	7	8	8	8	8	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10

– En el grupo 2 hay una marcada diferencia entre las calificaciones bajas y altas las que varían mucho, por cuanto son más heterogéneas.
– En el grupo 1 hay menor variación entre las calificaciones altas y las bajas, luego, las calificaciones en este grupo son más homogéneas que las del grupo 2.

– Por tanto hay mayor variabilidad en las calificaciones de los estudiantes del grupo 2 con respecto a las del grupo 1 ♦

¿Conoces alguna medida o estadígrafo que te ayude a explicar la variabilidad de los datos y por tanto la dispersión de los datos?

¿Cuáles son las medidas o estadígrafos de dispersión que explican la variabilidad de los datos?

Para determinar la variabilidad de los datos en una distribucion de frecuencias existen las medidas o estadígrafos de dispersión siguientes:

- Recorrido o rango (R)
- Desviación media (D_m)
- Varianza (S^2)
- Desviación típica o estándar (S)
- Coeficiente de variación (CV)

Estas se calculan tanto para datos simples como para datos agrupados en intervalos de clase y su utilización para el análisis de datos requiere de entender su significado y utilidad.

Recorrido o rango

Recuerda que...

El **recorrido** o **rango** (R) de un conjunto de observaciones se denomina a la diferencia entre el mayor y el menor valor de las observaciones de un conjunto. Se calcula mediante la fórmula:

$R = X_M - X_m$ donde X_M es el mayor valor de las observaciones y X_m es el menor.

Esta es una medida simple de dispersión, cuyo uso más frecuente es para la comparación primaria de un grupo de distribuciones.

Ejemplo 1.54

Calcular el rango de las calificaciones de los estudiantes de los grupos 1 y 2, a partir de los datos ordenados en la tabla 1.9. Valorar las características de la distribución a partir del significado de este estadígrafo. ¿A qué conclusión has llegado?

Resolución:

En el grupo 1 se tiene que el rango es: $R_{G1} = 9 - 5 = 4$

En el grupo 2 se tiene que $R_{G2} = 10 - 3 = 7$

Se confirma que existe mayor diferencia entre los valores extremos en el grupo 2 , que en el grupo 1; lo que indica una mayor dispersión de las calificaciones obtenidas por los estudiantes del grupo 2, respecto al grupo 1. ♦

¡Atención!

Observa que el rango es alterado por valores extremos que ocurren de manera casual, por lo que no es estable y se recomienda su uso solo para muestras no mayores de 12.

El **rango** se considera que es una medida poco confiable, al considerar solamente las dos observaciones extremas, con independencia de las formas de la distribución y de las frecuencias correspondientes a los valores de la variable.

Desviación media

Definición 1.9

La **desviación media** (D_m), de un conjunto de observaciones se denomina a la media aritmética de los valores absolutos de las diferencias entre los datos y la media.

Esta medida tiene sus atractivos como medida de variabilidad, pues establece una relación matemática entre cada observación y la media aritmética de estos. Esta medida representa lo que se aparta cada observación como promedio de la media aritmética, luego resulta que, a mayor desviación media, la media aritmética es menos representativa de los datos.

¿Cómo se calcula?

Fórmula para conjunto de datos simples

$$D_m = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| \ldots\ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_1 - \bar{x}|}{n}$$

Donde x_1, x_2, hasta x_n, son cada uno de los valores que toma la variable.

$\bar{x}$ es la media aritmética de la distribución.

$|x_i - \bar{x}|$ es el valor absoluto de las diferencias $x_i - \bar{x}$

Fórmula para conjunto de datos agrupados en intervalos de clases

$$D_m = \frac{|x_1 - \bar{x}|F_{i1} + |x_2 - \bar{x}|F_{i2} + |x_3 - \bar{x}|F_{i3} + \ldots + |x_n - \bar{x}|F_{in}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_1 - \bar{x}|F_i}{n}$$

donde F_{i1}, F_{i2}, hasta F_{in}, son los valores de frecuencia absoluta y x_{i1}, x_{i2} hasta x_{in} son las marcas de clase, correspondientes en ambos casos a cada uno de los intervalos.

Ejemplo 1.55

Calcular la desviación media (*Dm*) de las calificaciones de los estudiantes en la pregunta escrita aplicada por el director del Instituto Peruniversitario, a partir de los datos ordenados en la tabla 1.10. ¿A qué conclusión puedes arribar?

Resolución:

Observa que en este caso la distribución de frecuencias corresponde a un conjunto de datos simples por lo tanto se utilizará la fórmula $Dm = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$. Para calcularla es recomendable elaborar la siguiente tabla, la que te ayudará a realizar los cálculos correspondientes.

Tabla 1.10

Desviación media *Dm*	**Grupo 1**		**Grupo 2**	
	x_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	y_i	$\lvert y_i - \bar{y}\rvert$
	5	$\lvert 5 - 7{,}4\rvert = 2{,}4$	3	$\lvert 3 - 7{,}4\rvert = 4{,}4$
	5	$\lvert 5 - 7{,}4\rvert = 2{,}4$	3	$\lvert 3 - 7{,}4\rvert = 4{,}4$
	6	$\lvert 6 - 7{,}4\rvert = 1{,}4$	5	$\lvert 5 - 7{,}4\rvert = 2{,}4$
	6	$\lvert 6 - 7{,}4\rvert = 1{,}4$	5	$\lvert 5 - 7{,}4\rvert = 2{,}4$
	6	$\lvert 6 - 7{,}4\rvert = 1{,}4$	5	$\lvert 5 - 7{,}4\rvert = 2{,}4$
	6	$\lvert 6 - 7{,}4\rvert = 1{,}4$	5	$\lvert 5 - 7{,}4\rvert = 2{,}4$
	7	$\lvert 7 - 7{,}4\rvert = 0{,}4$	6	$\lvert 6 - 7{,}4\rvert = 1{,}4$
	7	$\lvert 7 - 7{,}4\rvert = 0{,}4$	6	$\lvert 6 - 7{,}4\rvert = 1{,}4$
	7	$\lvert 7 - 7{,}4\rvert = 0{,}4$	7	$\lvert 7 - 7{,}4\rvert = 0{,}4$
	7	$\lvert 7 - 7{,}4\rvert = 0{,}4$	7	$\lvert 7 - 7{,}4\rvert = 0{,}4$
	7	$\lvert 7 - 7{,}4\rvert = 0{,}4$	7	$\lvert 7 - 7{,}4\rvert = 0{,}4$
	7	$\lvert 7 - 7{,}4\rvert = 0{,}4$	7	$\lvert 7 - 7{,}4\rvert = 0{,}4$
	7	$\lvert 7 - 7{,}4\rvert = 0{,}4$	7	$\lvert 7 - 7{,}4\rvert = 0{,}4$
	7	$\lvert 7 - 7{,}4\rvert = 0{,}4$	7	$\lvert 7 - 7{,}4\rvert = 0{,}4$
	7	$\lvert 7 - 7{,}4\rvert = 0{,}4$	7	$\lvert 7 - 7{,}4\rvert = 0{,}4$

Desviación media $D(m)$	**Grupo 1**		**Grupo 2**	
	x_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	y_i	$\lvert y_i - \bar{y}\rvert$
	8	$\lvert 8 - 7{,}4\rvert = 0{,}6$	8	$\lvert 8 - 7{,}4\rvert = 0{,}6$
	8	$\lvert 8 - 7{,}4\rvert = 0{,}6$	8	$\lvert 8 - 7{,}4\rvert = 0{,}6$
	8	$\lvert 8 - 7{,}4\rvert = 0{,}6$	8	$\lvert 8 - 7{,}4\rvert = 0{,}6$
	8	$\lvert 8 - 7{,}4\rvert = 0{,}6$	8	$\lvert 8 - 7{,}4\rvert = 0{,}6$
	8	$\lvert 8 - 7{,}4\rvert = 0{,}6$	9	$\lvert 9 - 7{,}4\rvert = 1{,}6$
	8	$\lvert 8 - 7{,}4\rvert = 0{,}6$	9	$\lvert 9 - 7{,}4\rvert = 1{,}6$
	8	$\lvert 8 - 7{,}4\rvert = 0{,}6$	9	$\lvert 9 - 7{,}4\rvert = 1{,}6$
	8	$\lvert 8 - 7{,}4\rvert = 0{,}6$	9	$\lvert 9 - 7{,}4\rvert = 1{,}6$
	9	$\lvert 9 - 7{,}4\rvert = 1{,}6$	10	$\lvert 10 - 7{,}4\rvert = 2{,}6$
	9	$\lvert 9 - 7{,}4\rvert = 1{,}6$	10	$\lvert 10 - 7{,}4\rvert = 2{,}6$
	9	$\lvert 9 - 7{,}4\rvert = 1{,}6$	10	$\lvert 10 - 7{,}4\rvert = 2{,}6$
	9	$\lvert 9 - 7{,}4\rvert = 1{,}6$	10	$\lvert 10 - 7{,}4\rvert = 2{,}6$
	9	$\lvert 9 - 7{,}4\rvert = 1{,}6$	10	$\lvert 10 - 7{,}4\rvert = 2{,}6$
	9	$\lvert 9 - 7{,}4\rvert = 1{,}6$	10	$\lvert 10 - 7{,}4\rvert = 2{,}6$
		$D_m = \frac{28{,}8}{30} = 0{,}96$		$D_m = \frac{48{,}8}{30} = 1{,}63$

Se aprecia que la desviación media de las calificaciones de los estudiantes del grupo 2, $D_m = 1{,}63$, es superior a las del grupo 1, $D_m = 0{,}96$ lo cual verifica las calificaciones obtenidas anteriormente en relación con la dispersión de los datos y la fiabilidad de la media aritmética como característica numérica representativa en determinados tipos de distribuciones. ♦

Dado que esta medida representa lo que se aparta cada dato como promedio de la media aritmética, *indica la concentración de los datos alrededor de su media aritmética*. Luego mientras mayor sea la desviación media, menos representativa será la media aritmética de los datos.

Propiedades de la desviación media

- Es la medida más sencilla entre las medidas de dispersión.
- Varía mucho cuando se calcula para varias partes (subconjuntos) extraídas de un mismo universo (población).
- Es única.

Aunque la desviación media no es la más utilizada, puede tener sus atractivos como medida de variación, y es bueno conocerla para comprender mejor otras medidas de mayor alcance.

Reflexiona

¿Para qué puede utilizarse la desviación media?

La varianza

Definición 1.10

La **varianza** (S^2) se denomina a la media aritmética de los cuadrados de las distancias de cada uno de los datos x_i respecto a la media aritmética $\overline{x}$ (de las diferencias entre cada observación y la media de la distribución).

¿Cómo se calcula?

Fórmula para conjunto de datos simples

$$S^2 = \frac{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}$$ donde x_1, x_2, hasta x_n, son cada uno de los valores que toma la variable, $\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ es el cuadrado de la diferencia del dato x_i en relación con $\overline{x}$, n es el total de observaciones.

Fórmula para conjunto de datos agrupados en intervalos de clase

$$S^2 = \frac{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 F_{i1} + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 F_{i2} + \ldots + \left(x_i - \overline{x}\right)^2 F_{in}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 F_i}{n}$$ donde F_{i1}, F_{i2}, hasta F_{in}, son los valores de frecuencia absoluta y x_{i1}, x_{i2} hasta x_{in} son las marcas de clases, correspondientes en ambos casos a cada uno de los intervalos.

Para el cálculo de la varianza, no se toma el valor absoluto de las desviaciones pues al elevarse estas al cuadrado siempre van a ser positivas.

Ejemplo 1.56

Calcular la varianza (S^2) de las calificaciones obtenidas por los estudiantes en la pregunta escrita aplicada por el director del Instituto Preuniversitario a los grupos 1 y 2. ¿A qué conclusión se puede llegar?

Resolución:

Observa que como la distribución de frecuencias corresponde a un conjunto de datos simples, para el cálculo de la varianza se utilizará la fórmula $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ y se elaborará la tabla 1.11 la cual ayudará a realizar los cálculos correspondientes.

Tabla 1.11

Varianza (S^2)	Grupo 1		Grupo 2	
	x_i	$(x_i - \bar{x})^2$	y_i	$(y_i - \bar{y})^2$
	5	$(-2,4)^2 = 5,76$	3	$(-4,4)^2 = 19,36$
	5	$(-2,4)^2 = 5,76$	3	$(-4,4)^2 = 19,36$
	6	$(-1,4)^2 = 1,96$	5	$(-2,4)^2 = 5,76$
	6	$(-1,4)^2 = 1,96$	5	$(-2,4)^2 = 5,76$
	6	$(-1,4)^2 = 1,96$	5	$(-2,4)^2 = 5,76$
	6	$(-1,4)^2 = 1,96$	5	$(-2,4)^2 = 5,76$
	7	$(-0,4)^2 = 0,16$	6	$(-1,4)^2 = 1,96$
	7	$(-0,4)^2 = 0,16$	6	$(-1,4)^2 = 1,96$
	7	$(-0,4)^2 = 0,16$	7	$(-0,4)^2 = 0,16$
	7	$(-0,4)^2 = 0,16$	7	$(-0,4)^2 = 0,16$
	7	$(-0,4)^2 = 0,16$	7	$(-0,4)^2 = 0,16$
	7	$(-0,4)^2 = 0,16$	7	$(-0,4)^2 = 0,16$
	7	$(-0,4)^2 = 0,16$	7	$(-0,4)^2 = 0,16$
	7	$(-0,4)^2 = 0,16$	7	$(-0,4)^2 = 0,16$
	7	$(-0,4)^2 = 0,16$	7	$(-0,4)^2 = 0,16$
	7	$(-0,4)^2 = 0,16$	7	$(-0,4)^2 = 0,16$
	8	$(0,6)^2 = 0,36$	8	(0,6)2 = 0,36
	8	$(0,6)^2 = 0,36$	8	(0,6)2 = 0,36
	8	$(0,6)^2 = 0,36$	8	$(0,6)^2 = 0,36$
	8	$(0,6)^2 = 0,36$	8	$(0,6)^2 = 0,36$
	8	$(0,6)^2 = 0,36$	9	$(1,6)^2 = 2,56$
	8	$(0,6)^2 = 0,36$	9	$(1,6)^2 = 2,56$
	8	$(0,6)^2 = 0,36$	9	$(1,6)^2 = 2,56$
	8	$(0,6)^2 = 0,36$	9	$(1,6)^2 = 2,56$

	9	$(1,6)^2 = 2,56$	10	$(2,6)^2 = 6,76$
	9	$(1,6)^2 = 2,56$	10	$(2,6)^2 = 6,76$
	9	$(1,6)^2 = 2,56$	10	$(2,6)^2 = 6,76$
	9	$(1,6)^2 = 2,56$	10	$(2,6)^2 = 6,76$
	9	$(1,6)^2 = 2,56$	10	$(2,6)^2 = 6,76$
	9	$(1,6)^2 = 2,56$	10	$(2,6)^2 = 6,76$
		$S^2 = \frac{39,2}{30} = 1,31$		$S^2 = \frac{119,2}{30} = 3,97$

Como la varianza de las calificaciones obtenidas por los estudiantes del grupo 1 es inferior a las del grupo 2, significa que las calificaciones de los estudiantes en el grupo 1 están menos dispersas que las del grupo 2. ♦

Propiedades de la Varianza

- Representa todas las diferencias de las observaciones respecto a la media.
- Es siempre un número no negativo.
- Es única y de las más usadas.
- Mientras menor sea la varianza, más homogéneo será el conjunto de valores (datos).
- La varianza de una constante por una variable es igual al cuadrado de la constante por la varianza de la variable, es decir: $S^2(kx) = k^2 S^2(x)$
- La varianza de una suma de una variable y una constante es igual a la varianza de la variable, es decir: $S^2(x + k) = S^2(x)$

¿? ¿Sabías que...?

Aunque para el trabajo con la Estadística Descriptiva, utilizaremos la fórmula como la hemos presentado en la definición de Varianza, existen estudios estadísticos que han demostrado que para el cálculo de la varianza de una muestra de tamaño n, se modifica la fórmula anterior dividiendo por $(n - 1)$ en lugar de dividir por n, porque $(n - 1)$ son los grados de libertad de la varianza muestral en la estimación estadística.

Desviación típica o estándar

Definición 1.11

La **desviación típica** o **estándar** (*S*), es la raíz cuadrada (positiva) de la varianza del conjunto de datos $S = \sqrt{S^2}$.

¿Cómo se calcula?

Fórmula para datos simples

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}}$$

Fórmula para datos agrupados en intervalos de clase

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 F_i}{n}}$$

Esta medida de dispersión varía menos que otros estadígrafos cuando se calcula para varias muestras extraídas de una misma población, por lo que es la **medida de dispersión más utilizada** y **de mayor confianza para los investigadores**. Con ella se tiene una idea del grado de desviación promedio en la distribución.

Ejemplo 1.57

Calcular la desviación típica de las calificaciones obtenidas por los estudiantes en la pregunta escrita aplicada en los grupos 1 y 2 con la finalidad de determinar con mayor grado de confianza el grupo mejor preparado en este contenido. ¿A qué conclusión has llegado?

Resolución:

Para el grupo 1 la desviación típica es $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,31} = 1,14$

Para el grupo 2 la desviación típica es $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3,97} = 1,99$

Se confirma que existe mayor concentración de las calificaciones de los estudiantes del grupo 1, mientras que, en el grupo 2, la distribución es más dispersa siendo esta más heterogénea.

¡Atención!

Con la **desviación típica** o **estándar** se tiene una idea del grado de desviación promedio en la distribución, es la medida de dispersión más usada y de mayor confianza ya que varía menos que otras medidas de dispersión cuando se calcula para varias muestras extraídas de la misma población. Ella representa todas las diferencias de las observaciones respecto a la media, mientras menor sea la desviación típica más homogénea será la muestra.

Coeficiente de variación

Definición 1.12

El **coeficiente de variación** (*CV*), se define como el cociente de la desviación típica (s) de una distribución por la media aritmética ($\bar{x}$) (suponiendo por supuesto que $\bar{x} \neq 0$).

El coeficiente de variación es una medida de dispersión relativa, pues establece una relación entre el valor de la desviación típica y el valor de la media aritmética. Dado que la desviación típica y la media están dadas en la misma unidad de medida, hace que el coeficiente de variación no se exprese en unidad de medida alguna. Esta última propiedad permite utilizar al coeficiente de variación para comparar la dispersión de una variable en dos o más conjuntos de datos, sobre todo cuando las medias aritméticas difieren significativamente.

¿Cómo se calcula? $CV = \frac{s}{\bar{x}}$.

Se puede expresar como el tanto por ciento (%) y solo se debe aplicar para datos cuantificados en una escala de proporción, aunque se acepta que se utilice para datos medidos en una escala de intervalo.

Luego: se puede expresar $CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\ \%$

De la historia

El **coeficiente de variación** de Pearson tiene este nombre en homenaje a Karl Pearson (1857-1936), matemático y filósofo de las ciencias británico; se le conoce por haber desarrollado algunas de las técnicas centrales de la moderna estadística, y por aplicar estas técnicas a los problemas de la herencia biológica.



Ejemplo 1.58

Calcular el coeficiente de variación de las calificaciones obtenidas en la pregunta escrita por los estudiantes de los grupos 1 y 2, referente al estudio realizado por el director del Instituto Preuniversitario sobre el estado del aprendizaje de estos en el contenido relacionado con las operaciones con números reales. ¿A qué conclusión has llegado?

Resolución:

Coeficiente de variación de las calificaciones del grupo 1

$$CV_{G1} = \frac{1,14}{7,4} 100\,\% = 15,4\,\%$$

Coeficiente de variación de las calificaciones del grupo 2

$$CV_{G2} = \frac{1,99}{7,4} 100\,\% = 26,9\,\%$$

Como las calificaciones de los estudiantes del grupo 1 tienen un coeficiente de variación menor que las de los estudiantes del grupo 2, los resultados son mucho más homogéneos con respecto a la media. ♦

Reflexiona

¿Está el director del preuniversitario en condiciones, para determinar el grupo docente que está mejor preparado en las operaciones con números reales? Fundamenta tu respuesta.

Las medidas de dispersión, no solo se calculan para comparar dos distribuciones de datos, también se calculan para una sola distribución, lo que permite valorar cuán homogénea o heterogénea es dicha distribución.

¿Sabías que...?

En la actualidad existen paquetes estadísticos profesionales (R studio, MATHEMÁTICA) que favorecen el procesamiento de datos y ofrecen la posibilidad de no realizar cálculos tan engorrosos. También existen asistentes como el GeoGebra y la herramienta Libre Office Calc que se encuentra en NOA del Sistema Operativo, que están a tu disposición en el laboratorio de informática.

Aplica tus conocimientos

- *Utiliza el GeoGebra (versión 5.0), para calcular los valores representativos de la variable: calificaciones obtenidas en la pregunta escrita por los estudiantes de los grupos 1 y 2 del Instituto preuniversitario.*

La figura 1.59 muestra una vista gráfica del GeoGebra de los resultados del Grupo 1.

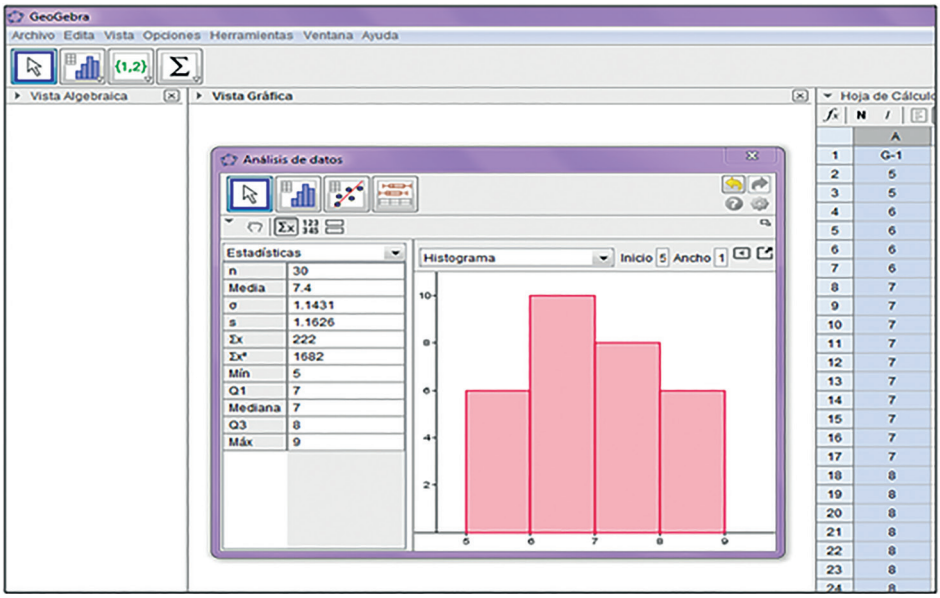


Fig. 1.59

Investiga y aprende

¿Cuáles medidas de tendencia central y de dispersión se pueden calcular con el GeoGebra? ¿Qué tipos de representaciones gráficas se pueden hacer? ¿Qué pasos se deben seguir para obtener el resultado de los cálculos y los gráficos?

▲ ¿Como calcular las medidas de dispersión en un conjunto de datos agrupados en intervalos de clase?

Ejemplo 1.59

Considerar la situación planteada al inicio del epígrafe acerca del estudio realizado por el colectivo de profesores sobre los resultados alcanzados por los 45 estudiantes en el examen de Matemática para el ingreso a la Educación Superior

Calcular las medidas de dispersión de las calificaciones de los 45 estudiantes (para su calculo debes apoyarte en las tablas 1.6 y 1.8).

Resolución:

Cálculo del Rango

En caso en que los datos sean originales como se ilustran en la tabla 1.6, se puede determinar con exactitud el mayor y el menor valor de los datos. En este caso:

$$R = X_M - X_m \qquad X_M = 100 \qquad X_m = 30 \qquad R = 70$$

En caso de que se tengan los intervalos ya conformados, como se ilustran en la tabla 1.7 se tomará como X_m el límite inferior de la primera clase y como X_M el límite superior de la última clase y se procede de igual forma que en el caso anterior.

Cálculo de la Desviación media

No olvides que la media artmética ya fue calculada anteriormente $\overline{x} = 71$

$$D_m = \frac{3\left|35-\overline{71}\right|+4\left|45-\overline{71}\right|+4\left|55-\overline{71}\right|+9\left|65-\overline{71}\right|+8\left|75-\overline{71}\right|+11\left|85-\overline{71}\right|+6\left|95-\overline{71}\right|}{45}$$

$$= 14,5$$

Cálculo de la Varianza

$$S^2 = \frac{3\left(35-\overline{71}\right)^2+4\left(45-\overline{71}\right)^2+4\left(55-\overline{71}\right)^2+9\left(65-\overline{71}\right)^2+8\left(75-\overline{71}\right)^2+11\left(85-\overline{71}\right)^2+6\left(95-\overline{71}\right)^2}{45}$$

$$= 310,9$$

Cálculo de la Desviación típica

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{310,9} = 17,6$$

Coeficiente de variación

$$CV = \frac{17,6}{71}\,100\,\% = 24,8\,\%$$

En correspondencia con los resultados de las medidas de dispersión calculadas.

Reflexiona

Considerando que eres parte del colectivo de profesores del Instituto Preuniversitario, ¿qué puedes decir con relación a los resultados del examen de ingreso a la Educación Superior en la asignatura Matemática, a partir del cálculo de las medidas de dispersión?

Hasta ahora has aprendido el significado de las medidas de tendencia central y de dispersión y cómo calcularlas. Tal vez estarás valorando que ya tienes las condiciones para dar solución a la situación planteada inicialmente o para otros estudios estadísticos, es decir, que estás en condiciones de pasar a la cuarta etapa del ciclo investigativo para el procesamiento estadístico de datos y realizar tareas vinculadas a la ***interpretación*** y ***arribo a conclusiones***. Sin embargo, es importante que conozcas que existen otras medidas llamadas de posición y que debes aprender a calcular.

Medidas de posición

Entre las medidas de posición más importantes están los cuantiles que son los valores de la distribución (ordenada) que la dividen en partes iguales, o sea, en intervalos que comprenden el mismo número de valores. Estos valores se consideran puntos característicos de la distribución y no son valores centrales, resultan ser medidas más prácticas para precisar ciertas situaciones en las que se busca describir la variación o dispersión en un conjunto de datos. Los cuantiles más usados son: los **cuartiles**, los **deciles** y los **percentiles**. En este grado estudiarás los cuartiles.

Los **cuartiles** son los tres valores que dividen al conjunto de datos ordenados en cuatro partes porcentualmente iguales. Estos tres valores se denotan usualmente por Q_1, Q_2, Q_3.

- El **primer cuartil** Q_1 (o cuartil inferior), es el valor en el cual o por debajo del cual queda un cuarto (25 %) de todos los valores de la distribución ordenada.
- El **segundo cuartil** Q_2, es precisamente la mediana y representa el 50 % de todos los valores de la distribución ordenada.
- El **tercer cuartil** Q_3 (o cuartil superior), es el valor en el cual, o por debajo del cual, quedan las tres cuartas partes (75 %) de todos los valores de la distribución ordenada.

Tabla 1.12

Fórmulas para determinar los cuartiles en un conjunto de datos simples		
	Para una cantidad de datos (par)	**Para una cantidad de datos (impar)**
Primer cuartil (Q_1)	$\frac{1}{4}\ n$	$\frac{1}{4}(n+1)$
Segundo cuartil (Q_2)	$\frac{1}{2}\ n$	$\frac{1}{2}(n+1)$
Tercer cuartil (Q_3)	$\frac{3}{4}\ n$	$\frac{3}{4}(n+1)$

Ejemplo 1.60

Los siguientes datos representan el salario semanal (en pesos) de 13 trabajadores de una empresa de productos varios.

$ 500; $ 980; $ 280; $ 700; $ 500; $1 150; $ 350; $ 720; $ 720; $ 650; $1 080; $ 980; $ 400

Calcular los cuartiles del conjunto de datos.

Resolución:

Primeramente, se deben ordenar los elementos del conjunto de datos de menor a mayor o viceversa.

En este caso los ordenamos de menor a mayor como se ilustra a continuación.

$ 280; $ 350; $ 400; $ 500; $ 500; $ 650; $ 700; $ 720; $ 720; $ 980; $ 980; $ 1 080; $ 1 150

Posteriormente se calculan los cuartiles Q_1, Q_2 y Q_3

El **primer cuartil** Q_1 (un cuarto o el 25 % de los salarios están por debajo de Q_1).

Como la cantidad de datos n es impar, para determinar la posición en que se ubica Q_1 sustituimos el valor de n = 13 en la expresión $\frac{1}{4}(n+1)$ ya que el total de salarios es 13 y obtenemos $\frac{1}{4}\cdot 14 = 3{,}5$.

Luego el primer cuartil ocupa la posición entre el dato de orden 3 y el siguiente de orden 4 como se ilustra a continuación

$ 280; $ 350; **$ 400**; **$ 500**; $ 500; $ 650; $ 700; $ 720; $ 720; $ 980; $ 980; $ 1 080; $ 1 150

En este caso Q_1 se determina calculando la media aritmética entre los salarios que ocupan estas dos posiciones.

$$Q_1 = \frac{\$\,400 + \$\,500}{2} = \$\,450$$

El **segundo cuartil** Q_2 (es la mediana o el 50 % de los salarios).

En este caso para determinar la posición de Q_2 sustituimos el valor de $n = 13$ en la expresión $\frac{1}{2}(n+1)$ y obtenemos $\frac{1}{2}\cdot 14 = 7$. Significa que Q_2 es el valor central del conjunto de datos, es decir, es la mediana y ocupa el lugar de orden 7 de los 13 datos ordenados como se muestra a continuación

$ 280; $ 350; $ 400; $ 500; $ 500; $ 650; **$ 700**; $ 720; $ 720; $ 980; $ 980; $ 1 080; $ 1 150

Q_3 = $ 700

El **tercer cuartil** Q_3 (tres cuartos o el 75 % de los salarios que están por debajo de Q_3).

Igualmente para determinar la posición de Q_3 sustituimos el valor de $n = 13$ en la expresión $\frac{3}{4}(n+1)$ y obtenemos $\frac{3}{4}\cdot 14 = 10{,}5$; luego el tercer cuartil es la media aritmética del valor que ocupa el dato de orden 10 y el siguiente de orden 11 como se ilustra a continuación:

$ 280; $ 350; $ 400; $ 500; $ 500; $ 650; $ 700; $ 720; $ 720; **$ 980**; **$ 980**; $ 1 080; $ 1 150

Igualmente, como en el cuartil Q_1 para determinar Q_3 se calcula la media aritmética entre los salarios que ocupan estas dos posiciones.

$$Q_3 = \frac{\$\,980 + \$\,980}{2} = \$\,980$$

Luego Q_1 = $ 450 Q_2 = $ 700 Q_3 = $ 980 ♦

Ejemplo 1.61

Dada la siguiente distribución correspondiente al número de hijos de 100 familias, calcular sus cuartiles y explicar su significado.

Tabla 1.13

Cantidad de hijos	F_1	$F_{ai}\downarrow$
0	14	14
1	10	24
2	15	39
3	26	65
4	20	85
5	15	100

Resolución:

En este caso los datos se encuentran representados en una distribución de frecuencias por lo que se procede de la manera siguiente:

Como la cantidad de datos n es par $n = 100$.

Para determinar la posición de los cuartiles se procede de la siguiente manera:

Primer cuartil: $\frac{1}{4}\cdot 100 = 25$

El primer valor de la $F_{ai}\downarrow$ mayor que 25 es 39, luego $Q_1 = 2$

Segundo cuartil: $\frac{1}{2}\cdot 100 = 50$

El primer valor de la $F_{ai}\downarrow$ mayor que 50 es 65, luego $Q_2 = 3$

Tercer cuartil: $\frac{3}{4}\cdot 100 = 75$

El primer valor de la $F_{ai}\downarrow$ mayor que 75 es 85, luego $Q_3 = 4$

De los resultados obtenidos, se puede plantear que:

- El 25 % o la cuarta parte de las familias tienen entre ninguno y dos hijos.
- El 50 % o la mitad de las familias tienen entre ninguno y tres hijos o entre tres y cinco hijos.
- El 75 % o las tres cuartas partes de las familias tienen entre ninguno o cuatro hijos. ♦

Los cuartiles adquieren su mayor importancia cuando se tiene un número grande de datos y estos se agrupan en una tabla de frecuencias. Para calcularlos, lo primero es determinar qué clase corresponde a cada uno de los tres cuartiles. Para ello se procede igual que en el caso de los datos simples, o sea, se calcula en la $F_{ai}\downarrow$.

¿Cómo calcular los cuartiles en un conjunto de datos agrupados en intervalos de clase?

Fórmula para calcular los cuartiles de un conjunto de datos agrupados en intervalos de clase

$$Q_k = L_i + \frac{k\left(\frac{n}{4}\right) - F_{ai}}{F_i} \cdot l \quad \text{Donde: } k = 1; 2; 3$$

L_i: límite inferior real de la clase del cuartil k.
n: tamaño de la muestra.
F_{ai}: frecuencia absoluta acumulada ($F_{ai}\downarrow$) de la clase que antecede a la clase del cuartil k.
F_i: frecuencia absoluta de la clase del cuartil k.
l: amplitud de la clase del cuartil k.

A las clases en que se encuentran los cuartiles se les denominan *clases cuartílicas*.

Ejemplo 1.62

Utilizar la información de la tabla 1.6 correspondiente a las calificaciones obtenidas por los 45 estudiantes en el examen de ingreso a la Educación Superior en la asignatura Matemática:

a) Calcular los cuartiles.
b) Interpretar los resultados.

Tabla 1.14

Clases	F_1	$F_{ai}\downarrow$
[30;40)	3	3
[40;50)	4	7
[50;60)	4	11
[60;70)	9	20
[70;80)	8	28
[80;90)	11	39
[90;100]	6	45
	$\sum_{i=1}^{7} F_i = 45$	

Resolución:

a) Para calcular los cuartiles, lo primero que se determina son las clases cuartílicas.
Como el tamaño de la muestra es impar, se procede sumando uno al valor de n. ($n = 45$, $n + 1 = 46$)
Para el primer cuartil calculamos:

$\frac{1}{4} \cdot 46 = 11{,}5$. El primer valor de $F_{ai}\downarrow$ mayor que 11,5 es 20, luego la primera clase cuartílica es 60 – 70.

Para el segundo cuartil se calcula:

$\frac{1}{2}\cdot 46 = 23$. El primer valor de $F_{ai}\downarrow$ mayor que 23 es 28, luego la segunda clase cuartílica es 70 – 80.

Para el tercer cuartil:

$\frac{3}{4}\cdot 46 = 34{,}5$. El primer valor de $F_{ai}\downarrow$ mayor que 34,5 es 39, luego la tercera clase cuartílica es 80 – 90.

Entonces: $Q_1 = 59{,}5 + \dfrac{1\cdot\left(\frac{45}{4}\right) - 11}{9}\cdot 10 \approx 59{,}8$

$$Q_2 = 69{,}5 + \frac{2\cdot\left(\frac{45}{4}\right) - 20}{8}\cdot 10 \approx 72{,}6$$

$$Q_3 = 79{,}5 + \frac{3\cdot\left(\frac{45}{4}\right) - 28}{11}\cdot 10 \approx 84{,}7$$

b) La calificación 72,6 representa el cuartil Q_2. Observa que el resultado obtenido coincide con la mediana de las calificaciones obtenidas por los 45 estudiantes en el examen de ingreso a la Educación Superior en Matemática calculado anteriormente.

La calificación 59,8 es el cuartil inferior Q_1 el cual representa el 25 %, de las calificaciones; es la mediana de las calificaciones menores que la mediana de todas las calificaciones.

Análogamente, la calificación 84,7 es el cuartil superior Q_3 el que representa la mediana de las calificaciones mayores que la mediana de todas las calificaciones. ♦

Diagrama de caja y bigotes

La dispersión en un conjunto de datos también se puede analizar mediante representaciones gráficas, entre ellas está el **diagrama de caja y bigotes**.

Los diagramas de caja y bigotes (*boxplots* o *box and whiskers*) son una presentación visual que describen varias características numéricas importantes de una o varias variables tales como la dispersión y posición relativa. Se puede apreciar la mediana, los cuartiles superior e inferior, los valores mayor (máximo) y menor (mínino) de la distribución, el centro, la dispersión y el rango intercuartílico (RIC).

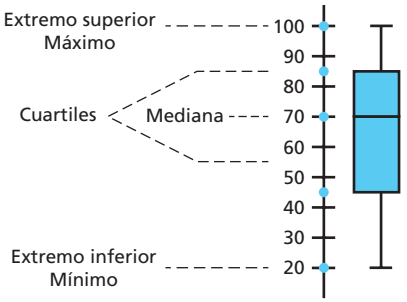


Fig. 1.60

Este tipo de gráfico permite observar claramente si una distribución es más o menos homogénea o heterogénea y si hay o no valores atípicos y cuáles son.

Procedimiento para construir un diagrama de caja y bigotes

- Ordenar los datos.
- Calcular los cuartiles Q_1, Q_2 y Q_3.
- Calcular el rango intercuartílico ($RIC = Q_3 - Q_1$).
- Encontrar si hay o no valores atípicos y calcularlos (todos los valores menores que $Q_1 - 1{,}5\ RIC$ y todos los valores mayores que $Q_3 + 1{,}5\ RIC$).
- Encontrar los valores extremos (menor y mayor datos, sin incluir los valores atípicos).
- Dibujar una recta real que contenga todos los datos.
- Dibujar una caja de Q_1 a Q_3 divididas por una recta en Q_2. Luego extiende los bigotes (líneas paralelas a la recta donde se colocaron los valores de las notas) por cada lado de la caja hacia los valores extremos. Cualquier dato o caso que no se encuentre dentro de este rango es marcado e identificado individualmente).
- Hacer valoraciones sobre la variable de estudio a partir de lo observado en el diagrama.

Ejemplo 1.63

Dada la información correspondiente a las edades de un grupo de 20 personas que están interesados en asistir a una convocatoria, para un curso de *Salvavidas*.

36; 25; 37; 24; 39; 20; 36; 45; 31; 31; 39; 24; 29; 23; 41; 40; 33; 24; 34; 40

a) Dibujar el gráfico de caja y bigotes que describe la dispersión de los datos que corresponden a las edades de las 20 personas interesadas por el curso de *Salvavidas*.
b) Hacer la valoración de los resultados.

Resolución:

a) Para dibujar el gráfico solicitado se siguen los pasos siguientes:

Paso 1

Ordenar el conjunto de datos de menor a mayor o viceversa.
20; 23; 24; 24; **24**; **25**; 29; 31; 31; 33; 34; 36; 36; 37; 39; 39; 40; 40; 41; 45

Paso 2

Calcular los cuartiles Q_1, Q_2 y Q_3.
Como $n = 20$ es par para determinar la posición de Q_1 calculamos $\frac{1}{4}n = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5$; luego el primer cuartil es la media aritmética del valor que ocupan el orden 5 y el orden 6:
20; 23; 24; 24; 24; 25; 29; 31; 31; **33**; **34**; 36; 36; 37; 39; 39; 40; 40; 41; 45

$$Q_1 = \frac{24+25}{2} = 24{,}5$$

Para determinar la posición de Q_2 calculamos $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$; luego el segundo cuartil (mediana) es la media aritmética de los valores centrales (de las edades) que en este caso ocupan el orden 10 y el 11:

20; 23; 24; 24; 24; 25; 29; 31; 31; 33; 34; 36; 36; 37; **39**; **39**; 40; 40; 41; 45

$$Q_2 = \frac{33+34}{2} = 33{,}5$$

Para determinar la posición de Q_3 calculamos $\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \cdot 20 = 15$; Luego el tercer cuartil es la media aritmética de los valores (de las edades) que ocupan ese orden 15 y el orden 16:

20; 23; 24; 24; 24; 25; 29; 31; 31; 33; 34; 36; 36; 37; **39**; **39**; 40; 40; 41; 45

$$Q_3 = \frac{39+39}{2} = 39$$

Paso 3

Calcular el rango intercuartílico.

$RIC = Q_3 - Q_1$, luego $RIC = 39 - 24{,}5 = 14{,}5$

Paso 4

Encontrar si hay o no valores atípicos

$Q_1 - 1{,}5 \cdot RIC = 24{,}5 - 1{,}5 \cdot 14{,}5 = 2{,}75$
$Q_3 + 1{,}5 \cdot RIC = 39 + 1{,}5 \cdot 14{,}5 = 60{,}75$

Se puede afirmar que en este ejemplo no hay valores atípicos pues ninguna de las edades es menor que 2,75 o mayor que 60,75.

Paso 5

Encontrar los valores extremos

Al no existir valores atípicos, entonces los valores extremos que se toman para la construcción del gráfico coinciden con el menor (mínimo) y el mayor (máximo) de los datos del conjunto.

Valor mínimo: 20 Valor máximo: 45

Paso 6

Dibujar una recta real que contenga todos los datos.

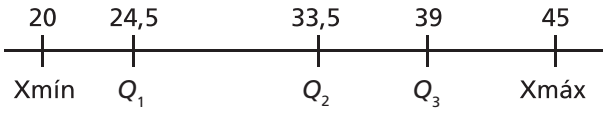


Fig. 1.61

Paso 7

Dibujar una caja de Q_1 a Q_3 dividida por un segmento en Q_2

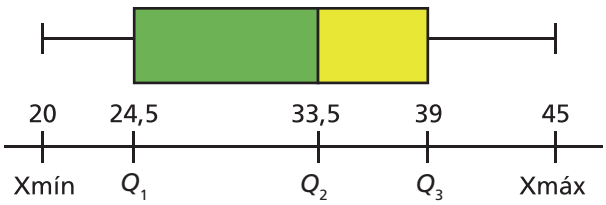


Fig. 1.62

Paso 8

Hacer las valoraciones sobre la variable de estudio a partir de lo observado en el diagrama.

b) La parte izquierda de la caja es mayor que la de la derecha; ello quiere decir que las edades comprendidas entre el 25 % y el 50 % del grupo de las 20 personas están más dispersas que en tre el 50 % y el 75 %. El bigote de la izquierda (entre el valor mínimo y el primer cuartil) es más corto que el de la derecha; por ello el 25 % de los que tienen menos edad están más concentrados que el 25 % de los que tienen mayor edad.

El rango intercuartílico ($RIC = Q_3 - Q_1$) es igual a 14,5; es decir, la edad del 50 % de las personas del grupo es de aproximadamente de 15 años. ♦

Comparación entre variables

Utilizando el diagrama de caja y bigotes, se pueden hacer comparaciones entre varias variables representadas por sus correspondientes conjuntos de datos.

Ejemplo 1.64

Un corredor entrena para una determinada competencia y su entrenador le toma los tiempos que necesita para recorrer los 100 m, durante 10 días consecutivos (cada día se toman varios tiempos y se calculan la mediana, los cuartiles, los valores mínimo y máximo).

Posteriormente en correspondencia con los resultados obtenidos se construyen los diagramas de caja y bigotes por día como se muestran en la figura 1.63.

¿A qué conclusión puedes llegar a partir de la observación de los diagramas representados?

Seguramente te habrás dado cuenta que con el transcurso de los días los diagramas de caja se fueron desplazando hacia la izquierda lo que indica la efectividad del entrenamiento, ya que se tardan menos tiempo en recorrer la misma distancia, dado que se acorta la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo así como el rango intercuartílico. ♦

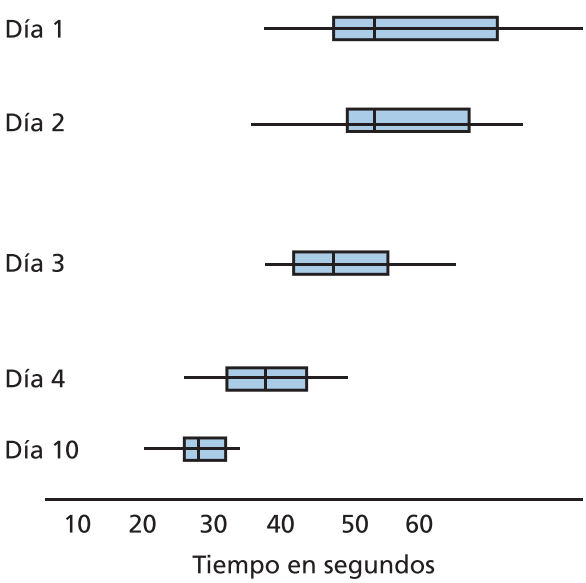


Fig. 1.63

Reflexiona sobre lo aprendido

- Explica por qué la moda podría ser la medida menos adecuada para representar donde se centran los datos de una distribución.
- ¿Cuál de las medidas de tendencia central es la más afectada por los valores extremos? Da un ejemplo donde se evidencie esta situación.
- ¿Cuál es la deviación típica o estándar de una distribución de frecuencias si todos los valores de las observaciones son iguales? Fundamenta tu respuesta.
- En las estadísticas de dos jugadoras de baloncesto, María y Regla se registra que la media de puntos por partido de ambas es 24, que la desviación media (en puntos por partido) de María es 6 y de Regla es 14. Además, se conoce que en el partido final ambas anotaron 36 puntos.
  a) ¿Cuál de las dos jugadoras es una anotadora más consistente? Fundamenta tu respuesta.
  b) Explica cuál de las jugadoras tuvo la actuación más impresionante en el partido final.

- Observa el siguiente diagrama de caja y responde las preguntas.

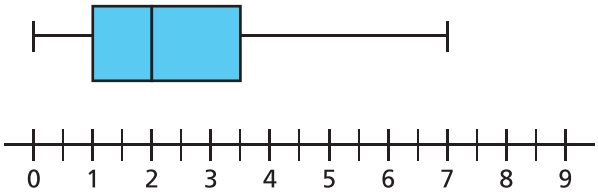


Fig. 1.64

a) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo, la mediana, los cuartiles inferior y superior y el rango intercuartilico?
b) ¿Qué información te ofrece el rango intercuartílico en un análisis de datos?

Ejercicios del epígrafe 1.4

Variable estadística. Escalas de medición de la variable

1. Investiga con tu equipo de estudio:

a) Sobre el surgimiento de la Estadística y sus aplicaciones en la actualidad. Elabora un informe con los resultados obtenidos.
b) Sobre el rol que desempeñó la estadística durante la pandemia que afectó al mundo en el año 2020, haz una valoración del comportamiento de la enfermedad en las Américas y particularmente en nuestro país.

2. Enuncia 5 acontecimientos o fenómenos en los que se necesite aplicar la Estadística. Fundamenta el porqué en cada caso.

3. Di si para realizar los siguientes estudios estadísticos se debe tener en consideración toda la población o se debe elegir una muestra representativa en cada caso.

a) La talla de los habitantes de nuestro país.
b) La nota media de las calificaciones en Matemática de tus compañeros de grupo.
c) Las preferencias literarias de los estudiantes de tu equipo de estudio.
d) La media del número de hijos que tienen las familias de nuestra provincia.

4. Lee detenidamente la variable declarada en la primera columna de la siguiente tabla 1.15.

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Tabla 1.15

Variable	Clasificación de la variable	Categorías o valores que puede tomar la variable
Cantidad de estudiantes de un preuniversitario en cada curso escolar		
Cantidad de personas que se contagiaron con el virus Sars-Cov-2 en Europa		
La preferencia que tienen los estudiantes de tu preuniversitario por un tipo de música		
Cantidad de vértices de los polígonos regulares		
Volumen de agua almacenado en varias presas		
Sexo de un grupo de personas		
Magnitud en la escala de Richter de los terremotos ocurridos en el mundo durante el año 2022		
Consistencia de 50 sustancias químicas		
Enfermedades más frecuentes en una comunidad		

b) Argumenta el porqué de las clasificaciones de la variable en cada caso.
c) Escribe dos ejemplos de variables numéricas y dos categóricas diferentes.
d) ¿Te fue posible determinar las categorías o valores que puede tomar la variable en todos los casos? Fundamenta tu respuesta.

5. Un grupo de pacientes de un hospital se clasifica atendiendo a las siguientes variables:

a) Tipo de enfermedad.
b) Grado en que se manifiesta la enfermedad.

c) Temperatura corporal.
d) Masa en kilogramos.

Identifica la escala de medición de la variable que se estudia en cada caso.

6. En una fábrica de helados Coppelia se producen 10 500 unidades (potes de 450 mL) diariamente. Para efectuar un control de calidad se analizan (seleccionadas de manera aleatoria, es decir, al azar) 100 unidades de la producción del día.

6.1 El estudio consistió en comprobar la masa del helado, la consistencia y la cantidad de unidades con problemas en las etiquetas. Determina:

a) Población, muestra, tamaño de la población y tamaño de la muestra.
b) De las variables estadísticas que se estudian determina su clasificación y las categorías o valores que puede tomar cada una de ellas.

6.2 Esta fábrica cuenta con 85 trabajadores y se quiere realizar un estudio basado en los siguientes índices:

a) Nivel cultural de los trabajadores.
b) Cantidad de ausencias de cada trabajador durante el año.
c) Tiempo, en horas, que invierte cada trabajador para llegar a la fábrica.
d) Turnos de trabajo.
e) Calidad de los helados fabricados en una jornada laboral.
f) Temperatura del lugar donde se almacenan las materias primas.

Confecciona una tabla de doble entrada que te permita clasificar las variables en estudio, las posibles categorías o valores que puede tomar y la escala utilizada en cada caso para su medición.

7. La siguiente tabla (1.16) comparativa corresponde al estado de determinados indicadores de las provincias Granma, Holguín y Las Tunas, antes y después del triunfo revolucionario hasta el 2016.

Tabla 1.16

Variable	Antes del año 1959	Después del triunfo de la Revolución hasta el año 2016
Esperanza de vida al nacer	57 años	
Número de médicos	344	

Unidades de salud existentes		4 006
Cantidad de camas asistenciales		12 000
Cantidad de maestros primarios	682	

7.1 Clasifica cada una de las variables y di el tipo de escala que puede ser utilizada para su medición.

7.2 Completa en tu cuaderno la tabla comparativa de las provincias Granma, Holguín y Las Tunas antes y después del triunfo revolucionario hasta el 2016 de acuerdo con los datos que se ofrecen a continuación:

a) La esperanza de vida ha crecido en 19 años.
b) El número de médicos ha crecido 30 veces aumentado en 14.
c) El número de unidades de salud existentes antes del año 1959 disminuido en 5,94 representa la centésima parte de las existentes actualmente.
d) Antes del año 1959 había 270 camas asistenciales más que la décima parte de las existentes en la actualidad.
e) La cantidad de maestros primarios ha crecido 40 veces y media más, 9 358.

7.3 Haz una valoración de los resultados que se muestran después del triunfo de la Revolución hasta el año 2016 en esas provincias.

8. Analiza los datos que se muestran en la tabla 1.7 y determina:

a) La escala de medición utilizada y justifica el porqué.
b) La cantidad de estudiantes que obtuvieron calificaciones iguales o superiores a 80 puntos.
c) El porcentaje de estudiantes con calificaciones inferiores a 60 puntos.
d) ¿Qué valoración puedes hacer de estos resultados?, ¿por qué?

Distribución de frecuencias y gráfico de frecuencias acumuladas

9. En una escuela se seleccionó un grupo de 20 estudiantes de diferentes grados para hacer una investigación sobre la edad de aquellos que con más frecuencia participan en competencias deportivas y se registraron sus edades de la siguiente forma:

11; 15; 14; 12; 11; 14; 14; 13; 15; 16; 12; 12; 14; 14; 15; 15; 13; 14; 15; 13

a) Di la población, la muestra y el tamaño de la muestra.
b) Clasifica la variable y la escala de medición.
c) Construye utilizando GeoGebra, la tabla de frecuencias que incluya frecuencias absolutas, relativas y acumulativas.
d) Representa en un gráfico la frecuencia absoluta y relativa acumulativa utilizando el GeoGebra.

10. En un policlínico de la comunidad, se realiza el análisis de la sangre a 30 pacientes para la determinación de calcio en sangre y se obtuvieron los siguientes resultados:

9,7	9,3	10,1	9,2	9,1	9,3	9,4	8,7	8,8	8,7
8,3	9,2	10,2	9,5	9,6	9,7	9,2	9,3	8,8	9,5
9,8	9,1	9,2	9,6	8,4	9,2	9,4	9,6	9,8	9,6

a) Clasifica la variable y la escala de medición.
b) Determina el rango o recorrido de la variable.
c) Construye la tabla de frecuencias que incluya frecuencias absolutas, relativas y acumulativas.
d) Representa en un gráfico los datos anteriores. ¿Por qué seleccionaste este tipo de gráfico?
e) ¿Qué importancia tiene el calcio en los seres humanos? Escribe la nomenclatura química de esta sustancia.

11. Construye el histograma y el polígono de frecuencia con los datos de la tabla del ejemplo 1.49. Para su construcción utiliza el GeoGebra y haz la descripción de la sucesión de acciones realizadas en cada caso.

12. Con los datos de la tabla del ejemplo 1.49 construir la ojiva de frecuencia absoluta y porcentual de abajo hacia arriba. Para su construcción utiliza el GeoGebra y haz la descripción de la sucesión de acciones realizadas en cada caso.

Medidas de tendencia central

13. Selecciona de las siguientes proposiciones cuáles son verdaderas o falsas. De las que sean falsas, justifica por qué lo son.

a) La media aritmética se puede utilizar cuando se utilizan escalas nominales y ordinales.

b) La media aritmética se puede usar para el análisis de acontecimientos en que intervengan variables numéricas continuas y discretas.
c) La media aritmética se calcula sumando los valores medidos en un conjunto de datos y dividiéndolos por el número de datos.
d) La moda se puede determinar con variables de cualquier tipo.
e) La moda puede no ser única.
f) La moda se calcula adicionando la frecuencia absoluta de cada uno de los datos y dividiéndola por el total de estos.
g) La media aritmética está influenciada por valores extremos.
h) La mediana siempre existe y es única, siempre y cuando la variable esté medida en escala ordinal.
i) La mediana se calcula adicionando la cantidad de datos y dividiendo por dos.
j) La mediana, se puede determinar en observaciones en que la variable este medida en escala nominal.
k) La media aritmética para datos agrupados en intervalos de clase, se calcula multiplicando la marca de clase por la frecuencia absoluta de cada clase y dividiendo el resultado por la cantidad de datos.
l) La clase modal es la clase donde está ubicado el valor central del conjunto de datos.
m) La clase mediana es la clase en que se encuentra el mayor número de datos.

14. Haz un resumen de las características fundamentales de las tres medidas de tendencia central, menciona de cada una de ellas sus ventajas y desventajas.

15. De las siguientes situaciones que se proponen identifica cuál de las medidas de tendencia central es la más adecuada para realizar el análisis de la situación. Fundamenta tu respuesta.

a) Cinco pluviómetros en la cuenca del río San Juan midieron a la misma hora en el mes de marzo la cantidad de lluvia caída en milímetros, obteniéndose los resultados siguientes: 40 mm, 36 mm, 36 mm, 35 mm y 41 mm. ¿Cuál es la mejor estimación de la cantidad de lluvia caída a esa hora en la cuenca del río San Juan?

b) En una información radial se comunica que 42 mm de lluvia caída representa el valor central de las precipitaciones que se registraron en junio en la ciudad de Matanzas. ¿Qué significa para ti esa información?

c) Las precipitaciones más comunes que se registraron en la provincia La Habana en el mes de mayo fueron de 40 mm. ¿Qué significa para ti esa información?

d) La precipitación media en la ciudad Matanzas en el mes de febrero fue de 50 mm. Si un día se toma una muestra aleatoria de cinco pluviómetros y resulta que cuatro de ellos registran precipitaciones de 42 mm, 47 mm, 52 mm y 55 mm. ¿Cuál será la medición más probable del quinto pluviómetro?

16. Formula cuatro problemas en que para resolverlos: uno exija del cálculo de la media aritmética, otro de la determinación de la moda, otro de la determinación de la mediana y otro del análisis de las tres medidas de tendencia central.

17. La siguiente tabla (1.17) muestra la temperatura mensual promedio, en grados Celsius, registrada en una región del país durante los doce meses del año.

Tabla 1.17

Ene	Feb	Marz	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
13	26	27	28	25	28	28	29	21	20	20	19

a) ¿Cuál es la temperatura promedio anual?

b) ¿Cuál es el valor central de la temperatura en dicha región?

c) ¿Cuál es la temperatura más frecuente?

d) Asocia el contenido de cada una de las preguntas anteriores a las medidas de tendencia central conocidas por ti

e) ¿Qué puedes comentar acerca de la variación de temperatura que se muestra en la tabla anterior? ¿Por qué?

18. Un profesor de Educación Física midió las pulsaciones de los 30 estudiantes del grupo A, de 10.º grado, al terminar una carrera de velocidad. Los resultados fueron los siguientes:

Tabla 1.18

Pulsaciones por minuto	Cantidad de estudiantes
[80 ; 90)	2
[90 ; 100)	8
[100 ; 110)	13
[110 ;120)	4
[120 ; 130]	3

a) ¿Cuál es el intervalo de pulsaciones por minuto donde se concentra el mayor número de estudiantes, del grupo A, al terminar una carrera de velocidad?

b) ¿Cuál es la media de las pulsaciones por minuto después de la carrera?

c) Construye utilizando GeoGebra un polígono de frecuencia absoluta acumulativa (expresada en porcentaje) y determina el valor debajo del cual está el 50 % de los estudiantes.

d) Halla la mediana y la moda utilizando las fórmulas empíricas estudiadas y comprueba los resultados utilizando algún asistente matemático.

19. En una investigación antropométrica se midió la masa (en libras) de 40 estudiantes universitarios cuyos resultados se muestran a continuación:

138	164	150	132	144	125	149	157
146	158	140	147	136	148	152	144
168	126	138	176	163	119	154	165
146	173	142	147	135	153	140	135
161	145	135	142	150	156	145	128

19.1 Conoces en qué consiste este tipo de investigación. Indaga sobre sus características.

19.2 Utilizando el asistente GeoGebra:

a) Elabora una tabla de distribución de frecuencias que incluya las frecuencias, absolutas, absolutas acumuladas, relativas y relativas acumuladas.

b) Construye el histograma, el polígono de frecuencias y las ojivas de esa distribución.

c) Determina las medidas de tendencia central e interpreta los resultados.

Medidas de dispersión

20. A continuación te ofrecemos los datos correspondientes a la masa en kilogramos (redondeado a cantidades enteras) de una raza de gallinas en estudio, que se pretenden destinar al consumo de la población.

2; 3; 4; 3; 5; 3; 2; 4; 3; 5; 3; 2; 5; 3; 4; 2; 5; 5; 4; 3; 5; 4; 3; 2; 2

Determina el rango, la desviación media, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación. Interpreta los resultados obtenidos. Comprueba los resultados utilizando el asistente GeoGebra.

21. Utiliza los datos del ejercicio 19. Determina la desviación típica e interpreta el resultado.

22. La siguiente tabla (1.19) representa las puntuaciones obtenidas por los estudiantes de dos equipos Rojo y Azul en un encuentro de conocimientos que realizó el profesor guía del grupo de 10.º grado.

Tabla 1.19

Equipo Rojo		Equipo Azul	
Estudiantes	**Puntuaciones**	**Estudiantes**	**Puntuaciones**
E_1	10	E_1	8
E_2	9	E_2	5
E_3	4	E_3	9
E_4	3	E_4	5
E_5	10	E_5	6
E_6	5	E_6	8

Determina qué equipo obtuvo mejores resultados. Fundamenta tu respuesta basada en el análisis estadístico.

23. Formula dos problemas en que para resolverlos tengas necesidad de calcular y analizar las medidas de dispersión.

Medidas de posición y diagrama de caja y bigotes

24. Utiliza los datos del ejercicio 20 y determina los cuartiles Q_1, Q_2, Q_3 el rango inercuartílico y los valores máximos y mínimos. ¿Qué información te ofrecen los resultados obtenidos? Comprueba estos resultados utilizando el asistente GeoGebra.

25. Utiliza los datos de los resultados de las puntuaciones de los equipo Rojo y Azul en el encuentro de conocimientos (ejercicio 22). Construye el gráfico de caja y bigotes correspondiente a la puntuación obtenida por los estudiantes de cada equipo, compara los resultados a partir de los gráficos construidos y compruébalo utilizando GeoGebra

26. Selecciona el conjunto de datos que se ajustan al diagrama de caja mostrado a continuación.



Fig. 1.65

Conjunto A: 2; 3; 4; 4; 6; 6; 7; 15
Conjunto B: 2; 3; 6; 6; 8; 9; 12; 14; 15
Conjunto C: 2; 4; 5; 8; 13; 15
Conjunto D: 2; 3; 6; 6; 8; 9; 10; 11; 15
Fundamenta el porqué de tu selección.

27. Construye un diagrama de caja y bigotes a partir de las calificaciones alcanzadas en el examen de Matemática por los 14 estudiantes de 10.º grado seleccionados a nivel nacional para participar en la Olimpiada Iberoamericana. Las calificaciones obtenidas fueron las siguientes: 90; 94; 53; 68; 79; 84; 87; 72; 70; 69; 65; 89; 85; 83. Interpreta los resultados a partir del diagrama realizado. Después compruebalo utilizando GeoGebra

28. A continuación se muestran dos diagramas de caja y bigotes donde se comparan los precios de los platos que se ofertan en dos restaurantes *A* y *B* de la provincia.

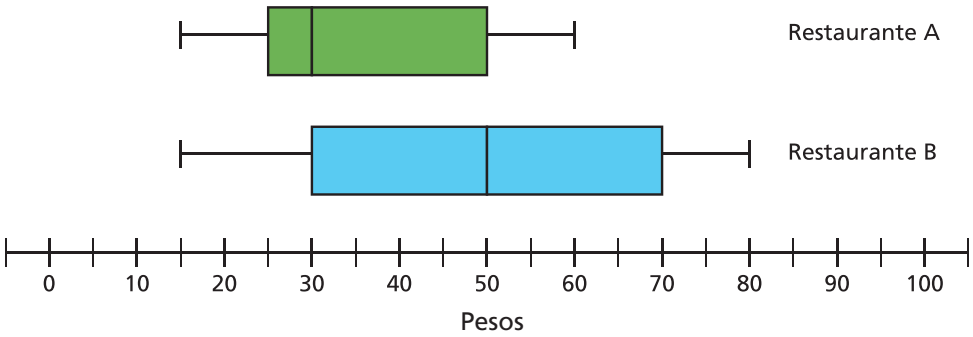


Fig. 1.66

a) ¿Cuál es la mediana del precio de los platos en cada restaurante?
b) ¿Cuál es el restaurante que tiene mayor rango en sus precios?
c) ¿Cuál es el precio más alto que tiene que pagarse por un determinado plato en cada restaurante?
d) Haz algunos comentarios comparando los precios de los platos que se ofertan en los dos restaurantes.

29. A continuación se muestra un gráfico donde se representan las notas alcanzadas por los estudiantes en el diagnóstico inicial de la asignatura Inglés, en los grupos 1 y 2 de décimo grado.

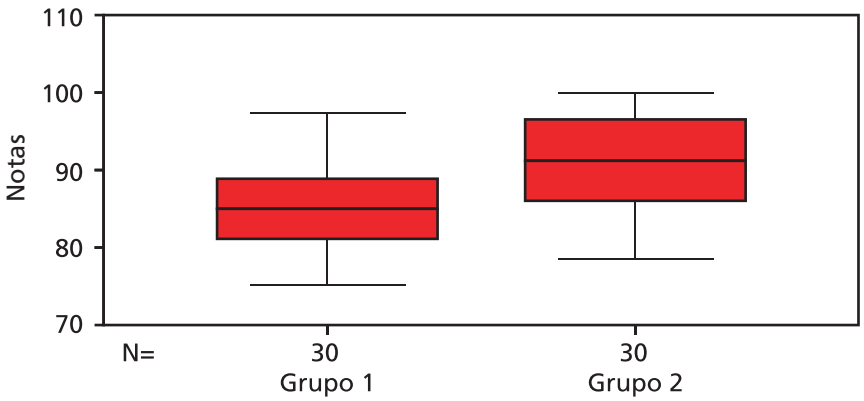


Fig. 1.67

Del análisis del gráfico responde:

a) ¿Cómo se comportan las notas alcanzadas por los estudiantes del grupo 1 con respecto a las del grupo 2? Haz tus conclusiones a partir del gráfico.

b) ¿La atención a las diferencias individuales de los estudiantes por parte del profesor podrá ser igual en los dos grupos? ¿Por qué?

Ejercicios del capítulo 1

1. Dado el conjuto $M = \{r, s, t\}$, selecciona las afirmaciones correctas y argumenta las incorrectas.

a) $r \in M$ b) $s \subset M$ c) $\{t\} \in M$ d) $\{r\} \subset M$

2. Sean A y B dos conjuntos, demostrar que $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.

3. Dados

P: conjunto de los números enteros comprendidos entre 12,5 y 17.
Q: conjunto de los números naturales impares mayores que 13.
$T = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16\}$

3.1 Escribe en notación tabular los conjuntos P y Q.

3.2 Escribe en notación constructiva los conjuntos P y Q

3.3 Enuncia por descripción el conjunto T.

3.4 Determina las operaciones conjuntistas indicadas y representa el resultado en un diagrama de Venn. a) $T \cap P$ b) $P \setminus T$

4. Con los datos que aparecen en el diagrama de Venn de la figura 1.68, elabora un ejercicio que presente una situación no matemática. Socializa la propuesta con tus compañeros del grupo.

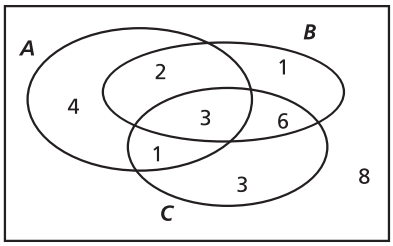


Fig. 1.68

5. Escribe en notación constructiva los subconjuntos de números reales M y N:

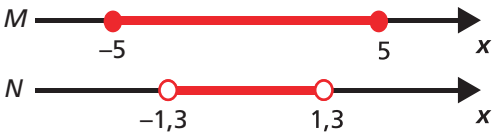


Fig. 1.69

a) Escribe al menos cuatro proposiciones verdaderas relacionadas con los conjuntos M y N, en las cuales utilices los símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$.

b) Escribe al menos cuatro proposiciones verdaderas relacionadas con las operaciones entre los conjuntos M y N, en las cuales utilices los símbolos $\cup$, $\cap$, M^C, N^C.

6. Selecciona un conjunto Universo, en el cual el conjunto solución de la ecuación $3x + 10 = 1$ sea:

a) Un conjunto vacío.
b) Un conjunto unitario.

7. Dados los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

a) $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ b) $\left[\sqrt{2},\infty\right)$ c) $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]$ d) $(3,\infty)$ e) $\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)$

7.1 Escríbelos en notación constructiva.
7.2 Representa gráficamente esos conjuntos.

8. Completa en tu cuaderno, las proposiciones siguientes:

8.1 Si $A = \left\{\frac{a}{b}; a,b \in \mathbb{N} \text{ y } b \neq 0\right\}$ y B el conjunto de los números enteros, entonces:

a) Se puede considerar un subconjunto de A al conjunto de los números …
b) Si el conjunto C está determinado por dos números que pertenecen a $A \cap B$, entonces C = …
c) Si el conjunto C está determinado por dos números que pertenecen a $A \setminus B$, entonces C = …

8.2 ¿Cuáles serían las respuestas de los incisos b y c anteriores si B es el conjunto de los números naturales, cuyo cubo es menor que 200?

9. La masa de la Luna es de 73 500 000 000 000 000 000 000 000 g y se supone que es el 1,2 % de la masa terrestre.

a) Calcula la masa de la Tierra. Expresa el resultado en notación científica.
b) Si cada gramo pesa $2{,}2 \cdot 10^{-3}$ lb, ¿cuál es la masa de la Tierra en libras?

10. Cada una de las lámparas que se utilizan en el aula poseen un valor de consumo energético.

a) Investiga sobre el consumo de energía eléctrica de estas en una semana.
b) Determina según la tarifa establecida a cuánto asciende el consumo habitual de energía en un mes, considerando que cada día se consume la misma cantidad de energía.

c) Sabiendo que por cada kilowatt·hora se consume aproximadamente 0,332 kg de petróleo, ¿qué cantidad de petróleo se consume en estas condiciones durante los 8 meses del curso?

d) Valora el consumo de energía eléctrica de las lámparas que se utilizan en el aula en una semana.

11. Calcula:

a) $-4\sqrt[3]{27}$ b) $\sqrt[4]{2^4 : 7^8}$ c) $\sqrt[4]{81c^2}$ si $c = 2$

d) $\left(8^{\frac{1}{3}} + 16^{\frac{1}{2}}\right) - \left(32^{\frac{1}{5}} + 4^0\right)$ e) $4\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{20}\sqrt[3]{25}$

12. Simplifica los radicales siguientes para todo valor admisible de la variable.

a) $\sqrt{\dfrac{128(a-b)^5}{81(a+b)^4}}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}b^3x^2y}$ c) $\sqrt[3]{54a^7by^8}$ d) $\sqrt{25x^3 - 50x^2}$

13. Escribe en orden creciente los números reales siguientes.

a) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{25}$ b) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[6]{13}$

14. Calcula las fracciones siguientes racionalizando previamente los denominadores. Utiliza la calculadora o la tabla para los datos que necesites.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{1}{3-\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

15. Halla el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log_2 4 + \log_3 81 + \log_4 64 - \log_6 216$

b) $\log_2 64 + \log_3 729 - \log_4 9 + \log_{11} 121$

c) $\log_3 81 - \log_3 2187 + \log_4 4096$

d) $\log_4 256 + \log_5 625 - \log_3 243$

16. En un taller de costura, que cuenta con un total de 27 trabajadores entre sastres y costureras, se confeccionan pantalones para los uniformes escolares. Con el objetivo de hacer una reforma salarial se realiza un estudio basado en los datos siguientes:

a) Sexo

b) Nivel cultural.

c) Calificación técnica.

d) Tiempo en horas que invierte cada trabajador del taller para confeccionar un pantalón.
e) Cantidad de pantalones que confeccionan los sastres en una jornada de trabajo.
f) Calidad de la costura determinada por el número de piezas que no son rechazadas.

Identifica la variable que se evalúa, clasifícala, plantea ejemplos de los valores que puede tomar e indica la escala de medición en cada caso.

17. La siguiente tabla representa el salario mensual de 20 técnicos de una Unidad Estatal de Base (UEB).

Tabla 1.20

Salario	Número de técnicos
13 800	4
11 400	3
12 600	2
8 400	3
14 100	5
11 280	3

Determina con ayuda de una hoja de cálculo:

a) El salario mensual medio de los técnicos de la UEB.
b) La mediana y la moda del salario mensual.
c) El salario semanal de los técnicos cuyo salario mensual es $ 11 400.
d) El rango, desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación.
e) ¿Qué valores consideras que describen mejor los datos que se muestran?

18. Los siguientes diagramas de caja muestran el tiempo en horas que semanalmente dedican los estudiantes de preuniversitario Luis y María para el estudio de las asignaturas que reciben de su plan de estudio.

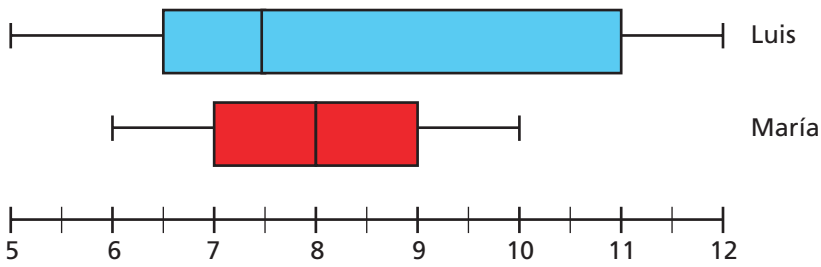


Fig. 1.70

Realiza algunas comparaciones del tiempo de estudio que dedican a las asignaturas Luis y María y escribe tu valoración al respecto.

19. La siguiente tabla muestra la cantidad total de medallas obtenidas por los países que obtuvieron los diez primeros lugares de los XXIII Juegos Centroamericanos y del Caribe celebrados en Barranquilla 2018.[2]

Tabla 1.21

Países	Cantidad total de medallas
México	341
Cuba	242
Colombia	270
Venezuela	155
R. Dominicana	107
Guatemala	84
P. Rico	87
Jamaica	27
T. Tobago	30
Bahamas	7

a) Determina los valores máximo y mínimo, los cuartiles y el rango intercuartílico.
b) Construye el gráfico de caja y bigotes utilizando el GeoGebra.
c) Haz algunos comentarios comparando la cantidad de medallas obtenidas por estos diez primeros países.

20. Investiga en tu provincia los índices de mortalidad infantil en los últimos cinco años e indaga en tu Consejo Popular cómo se comporta la atención médica a los niños menores de un año. Realiza un informe escrito de cómo se aplican los conocimientos adquiridos en la unidad sobre Estadística en los indicadores del Programa de atención materno Infantil.

[2] Los lugares por países se otorgan por la cantidad de medallas de oro y no por el total de medallas.

21. En una escuela se desarrolló un experimento que consistió en la aplicación de una nueva metodología para el aprendizaje de la estadística. En la tabla 1.22 se presentan los resultados de la distribución del número de errores en dos muestras, una donde se aplicó la metodología (muestra 1) y otra donde no se aplicó (muestra 2). La hipótesis planteada es que en los grupos en que se aplicó la metodología los resultados son significativamente mejores. ¿Qué puedes argumentar al respecto sobre la base de los datos proporcionados en esta tabla?

Tabla 1.22

Número de errores	Muestra 1	Muestra 2
0-1	56	0
2-3	41	9
4-5	27	33
6-7	23	21
8-9	8	20
10-11	1	26
12-13	2	10
14-15	1	6

A continuación, se muestra una página del GeoGebra donde se han representado en un diagrama de caja los datos correspondientes a las muestras 1 y 2. A partir de estas representaciones gráficas elabora dos conjeturas.

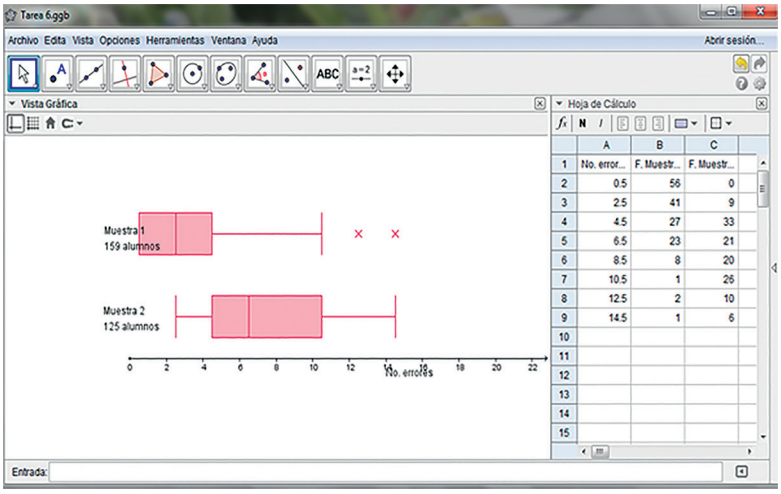


Fig. 1.71

Autoevaluación

1. ¿Qué dominio numérico escogerías como conjunto universo, para que la ecuación $2x + 3 = 1$ determine:

a) Un conjunto solución vacío.

b) Un conjunto solución unitario.

2. En un determinado experimento se descubre que en 22,4 L de cualquier gas, en condiciones normales hay $6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas de ese gas y una persona inspira 3,36 L de aire, tardando en la inspiración dos segundos. ¿Cuántas moléculas de aire ha inspirado por cada segundo?

3. Di cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas y de las que sean falsas justifica por qué lo son.

a) El número $0,1\overline{23}$ pertenece al conjunto de los números racionales positivos.

b) El número $\sqrt{-2}$ pertenece al conjunto de los números reales.

c) Toda expresión decimal infinita no periódica representa un número irracional.

d) El conjunto de los números racionales está contenido en el conjunto de los números fraccionarios.

e) Si el conjunto $A = \left\{-4; -2; 0; \frac{1}{2}; 2,4\right\}$ se cumple que $A \subset Z$.

f) Si A y B son dos conjuntos tales que $A = \{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R}: x < 1\}$, entonces $A \cap B = \{x \in \mathbb{Z}: -2 \leq x \leq 0\}$.

g) Si A y B son dos conjuntos de números reales y $A \subset B$, entonces $A \setminus B \neq \emptyset$.

h) Si $A = \left(\sqrt[3]{3xy^2}\right)^2$, entonces $\sqrt[3]{9x^2y^4}$.

i) El radical $\sqrt[3]{x^6yz^3}$ está simplificado.

j) Se cumple que $\sqrt[7]{4^3}$ es igual a $4^{\frac{7}{3}}$.

k) El resultado de calcular $log_4\ (-16)$ es 2

l) Si al número 2 lo elevamos al logaritmo en base 2 de 5, el resultado es un número par.

m) La media aritmética de una muestra divide siempre a los datos en dos partes, la mitad con valores mayores y la otra con valores menores que ella.

n) La moda siempre existe en variables numéricas y categóricas.

ñ) La mediana no se puede utilizar en variables medidas a lo sumo en escala nominal.
o) El rango coincide numéricamente con el rango intercuartílico.
p) El rango, el rango intercuartílico, la varianza y la desviación típica describen la dispersión de los datos.
q) La desviación media de una distribución de un conunto de observaciones es la media aritmética de los valores de las desviaciones respecto a la media que existen en el conjunto de observaciones.
r) La varianza de un conjunto de datos, se obtiene sustrayéndole la media a cada valor, hallando la suma de estas diferencias y dividiéndola por el número de observaciones.
s) La desviación típica o estándar representa todas las diferencias de las observaciones respecto a la media.
t) El coeficiente de variación permite comparar las dispersiones de dos o más conjuntos de datos.
u) El cuartil de orden 50 coincide con la mediana,
v) Mientras mayor es el rango intercuartílico, existe mayor homogeneidad en los datos de la distribución.
w) El diagrama de caja y bigotes proporciona el análisis tendencial del comportamiento de los datos de una distribución.

4. Selecciona la respuesta correcta en cada caso.

4.1 Se puede afirmar que:

a) $-\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}_+$ b) $5 \subset \mathbb{N}$ c) $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$ d) $\pi = 3{,}14$

4.2 Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R}: -2 \leq x < 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$. Entonces $A \cap B$ es:

a) $[-2,0) \cup [0, \infty)$ b) $[-0,1)$ c) $\{x \in \mathbb{R}: x \geq -2\}$ d) $\{x \in \mathbb{R}: x \geq -2, x \neq 1\}$

4.3 Si $M = \sqrt[5]{2x}$ y $N = \sqrt[5]{2x^2}$, entonces el valor de $M + N$ es:

a) $2\sqrt[5]{2x^2}$ b) $2\sqrt[5]{2x + 2x^2}$ c) no se puede determinar d) $2\sqrt[5]{2x}$

4.4 Si $a = \log_2 3$, $b = \sqrt[3]{-8}$ y $c = \frac{1}{3}$ se puede afirmar que:

a) $a < b < c$ b) $b < a < c$ c) $b < c < a$ d) $c < a < b$

4.5 Si $n = \log_3 \sqrt[5]{81}$, entonces:

a) $n = 2$ b) $n = \frac{2}{5}$ c) $n = 3$ d) $n = \frac{4}{5}$

4.6 Si $m = (-27)^{\frac{1}{3}}$ y $p = \log_{0,5} \frac{1}{4}$ entonces:

a) $m = p$ b) $m \leq p$ c) $m < p$ d) $m \geq p$

5. Si $A \cap B = \{-2; -1; 1\}$, $A \setminus B = \{-3; -4\}$ y $A \cup B = \{-3; -4; -2; -1; 1; 3; 4\}$
$A \cup B = \{-3; -4; -2; -1; 1; 3; 4\}$
Determina los elementos que forman el conjunto B.

6. Calcula y determina a qué dominio numérico más restringido pertenece el resultado obtenido.

a) $\sqrt[4]{16} + 3^2 \left(6^2 : 4 + \sqrt[5]{32}\right) - 5^3$

b) $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 5}{\sqrt{3} - 1}$

c) $\log_3 81 + \log_3 27 - \log_3 9$

7. El archipiélago cubano tiene una superficie total de ciento once mil ochocientos sesenta kilómetros cuadrados, de ellos dos mil doscientos kilómetros cuadrados ocupa la Isla de la Juventud y ciento cuatro mil novecientos cuarenta y cinco la isla de Cuba. Confecciona un gráfico de pastel que ilustre la distribución de la superficie del territorio nacional diferenciando entre Isla de Cuba, Isla de la Juventud y otras islas y cayos.

8. La media de las calificaciones obtenidas en un examen de Matemática por 28 de los 30 estudiantes de un grupo, es de 80 puntos. Si posteriormente examinaron los otros dos estudiantes y obtuvieron 60 y 50 puntos respectivamente, di de las alternativas dadas cuál es la nueva media de las calificaciones obtenidas por el grupo después de examinar estos dos nuevos estudiantes:

a) $63,\overline{3}$ b) $78,\overline{3}$ c) 67,5 d) ninguna de las anteriores

9. La mediana de los resultados de José en los tres exámenes de ingreso a la Educación Superior fue de 90 puntos, su media fue de 92 puntos

y su rango 6. ¿Cuál de las variantes que se proponen a continuación representa los resultados de los tres exámenes?

a) 93; 90; 93 b) 94; 92; 84 c) 90; 96; 90 d) 96; 90; 90

10. Si el salario de los trabajadores de una cooperativa agropecuaria fluctúa desde $ 3 500 a $ 6 000 y se les incrementa en $1 000 más a todos los trabajadores, se puede afirmar que:

a) La media no varía
b) La mediana permanece igual
c) La media y la mediana se incrementan en $ 1 000
d) El rango intercuartílico se incrementa en $ 1 000
e) Los extremos permanecen igual
f) La desviación estándar se incrementa en $ 1 000
g) El rango intercuartílico no varía
h) Los cuartiles se incrementan en $ 1 000

11. El subdirector de una escuela aplica una encuesta de satisfacción a los estudiantes que se preparan para participar en los concursos de conocimientos. Para ello aplica una encuesta a una muestra de 34 participantes; entre uno de los *items* confeccionados, se solicita la valoración acerca de la profundidad en el contenido recibido en una escala valorativa entre 1 y 10, considerando el valor 1 como insatisfactorio y el valor 10 como muy satisfactorio. Y se obtiene el siguiente resultado:

Tabla 1.23

Profundidad en el contenido	**Resultados de la aplicación de la escala valorativa para evaluar la satisfacción sobre la preparación que reciben**										
Escala valorativa	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Total
Participantes	29	1	1	1	1	0	1	0	0	0	34

Analiza la valoración de los estudiantes del nivel de satisfacción que sienten acerca de la profundidad en el contenido de la preparación recibida. Para ello aplica los conocimientos que has adquirido sobre Estadística en esta unidad de estudio.

12. El subdirector de una escuela quiere comparar las calificaciones obtenidas por dos grupos de estudiantes (A y B) en una prueba de Matemática sobre 100 puntos. Los resultados obtenidos fueron:

Grupo A: 100; 80; 90; 50; 40; 60; 60; 40; 20; 60
Grupo B: 62; 61; 65; 60; 63; 59; 60; 55; 58; 57

a) Haz una valoración de la calidad de calificaciones obtenidas por cada grupo. A tu criterio ¿cuál de los dos grupos tuvo mejores resultados?
b) Explica el procedimiento que empleaste para hacer la valoración.

13. Dada la rapidez necesaria en el mantenimiento de las máquinas eléctricas en la empresa Suchel, el jefe de mantenimiento decide evaluar el servicio ofrecido por tres técnicos que realizan esta labor. Los últimos 90 mantenimientos se distribuyen aleatoriamente y por igual entre los tres técnicos y se registró el número de horas que requirió cada mantenimiento. A juzgar por los diagramas de caja (figura 1.72): ¿Cuál servicio presenta el mejor promedio? ¿Cuál servicio presenta la menor desviación estándar? Justifica las respuestas.

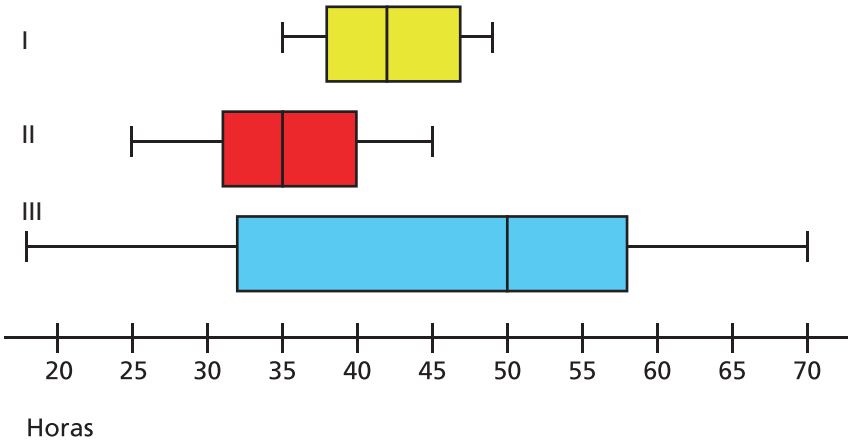


Fig. 1.72

CAPÍTULO 2

Trabajo con variables, ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones

Desde edades tempranas has aplicado los conocimientos matemáticos y su lenguaje de símbolos que permite expresar de una forma precisa y sencilla relaciones que ocurren en la vida, porque en los términos convencionales que ella posee no media la diversidad de los idiomas, razón por la que constituye un lenguaje universal.

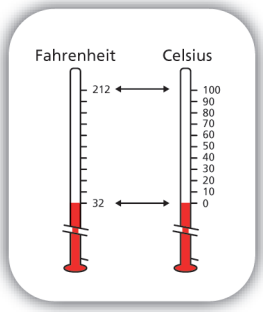


Fig. 2.1

Como sabes, en todos los países no se utiliza la misma escala para medir la temperatura, ellas dependen del punto de partida de la medición. Para identificarlas se utilizan letras, en este caso °C y °F representan las unidades de medida en grados Celsius y Fahrenheit, respectivamente, y la relación entre ambas medidas está dada por la igualdad $C = \frac{5(F-32)}{9}$, que permite hacer transformaciones de una escala a otra.

Ahora bien, imagínate que no se emplearan variables.

▲ ¿De qué forma podrían identificarse estas escalas? ¿Qué valores pueden tomar estas variables que representan las medidas de la temperatura?

En la actualidad las variables permiten expresar números, relaciones, fórmulas, etcétera.

▲ ¿Esto siempre fue así?

De hecho, era en el lenguaje común como se expresaban las relaciones matemáticas antes de que se desarrollaran sus símbolos, por ejemplo, en

el año 300 a. n. e., cuando aún no se conocía el uso de las variables, el destacado matemático y geómetra griego Euclides[1], expresaba sus postulados de la siguiente forma:

> *Las magnitudes que guardan con una misma magnitud la misma razón, son iguales entre sí y si aquellas con las cuales una misma magnitud guarda la misma razón, son iguales.*

Como este postulado, existen numerosas proposiciones de esa época, que expresadas en el lenguaje común resultan ser extensos párrafos. Si Euclides hubiera conocido el lenguaje algebraico o simbólico la relación descrita con anterioridad, solo necesitaba dos variables y el signo igual.

2.1 Polinomios, operaciones y descomposición factorial

Aplicar las operaciones fundamentales con variables a la representación de situaciones propias de la actividad práctica y a la interpretación de información dada de manera simbólica, es propio de la actividad matemática. Un número considerable de disciplinas científicas e independientes, hacen uso como elemento fundamental de las variables y símbolos matemáticos.

Como ejemplo del empleo de las variables, se puede citar:

- Los costos totales de producción de x artículos, generalmente se expresan como $C(x)$.
- Los ingresos totales obtenidos por la venta de x cantidad de artículos se denota como $I(x)$, la ganancia de estos productos como $G(x)$.
- El camino recorrido por un cuerpo en movimiento rectilíneo uniforme según la ley $s = v_0t + s_0$ (v_0 representa la velocidad inicial, t el tiempo y s_0 la distancia inicial).
- La resistencia de la columna vertebral $R = C^2 + 1$ (R: la resistencia y C el número de curvaturas).
- La tasa de generación de dióxido de carbono de una persona sana se puede expresar como $qCO_2 = 0{,}0042\ M$ (M representa la actividad metabólica).

Expresiones algebraicas

> *Rosa y su familia han decidido comprar una casa y su costo equivale a la suma de cinco veces el salario de su esposo, dos veces*

[1] *Euclides, Elements, Book: V (Elementos Libro V) Nueva York Dover Pubications,1956, p.139*

el de su hermano, el 75 % de sus ahorros y el dinero de la venta del apartamento de su tía. ¿Qué expresión algebraica puede representar la cantidad de dinero que aportará cada uno de ellos?

¿De qué forma escribirías la expresión que representa el costo total de la casa, si todos los salarios son diferentes?

Con los conocimientos que posees de grados anteriores podrás combinar variables y números mediante los signos de las operaciones adición, sustracción, división, multiplicación o potenciación. Se trata de obtener **expresiones algebraicas,** las cuales se clasifican a partir de determinadas características.

De la historia

El francés François Viète (1540-1603) (figura 2.2) en el siglo XVI estableció el lenguaje simbólico de carácter algebraico, que permitía escribir de forma clara y precisa las propiedades y ecuaciones de primer grado. Posteriormente, en 1768 apareció la *Aritmética Universal* del destacado matemático suizo Leonard Euler (figura 2.3), dictada por este cuando ya estaba ciego donde se analizan un sinfín de resultados: se generalizan las reglas de resolución de problemas aritméticos; se desarrolla el aparato simbólico y literal del álgebra entre ellas las operaciones con monomios y se dan las reglas de expresiones algebraicas polinomiales.



Fig. 2.2

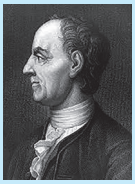


Fig. 2.3

¿Cuántos términos puede tener una expresión algebraica?

Recuerda que...

Una expresión algebraica es una variable o cualquier combinación de variables y números relacionados por cualesquiera de las operaciones de cálculo.
Un monomio es un número, una variable o cualquier combinación de números variables relacionadas por las operaciones de multiplicación, división y potenciación, en la que las variables solo están elevadas a exponente natural. La adición de monomios es un polinomio.
En un monomio son elementos distintivos: el coeficiente (número), parte literal (variable) y el grado (suma de los exponentes de las variables)

Ejemplo 2.1

Son expresiones algebraicas las siguientes:

$3x^2$ es una expresión algebraica que posee un monomio de segundo grado en una variable (polinomio de un término).

$45x - 2y$ es un binomio en dos variables lineales (polinomio de dos términos).

$7x^2 + 36x - 1$ es un trinomio de segundo grado en una variable (polinomio de tres términos).

$7b^2 + 36b^3c + c - 1$ es un polinomio de cuarto grado respecto a las variables b y c.

$\frac{5n}{m-2}$ es una expresión algebraica en que se combinan los números y las variables mediante las operaciones de mutiplicación, sustracción y división ♦

Dominio de definición de una expresión algebraica

▲ *¿Las variables que aparecen en las expresiones algebraicas pueden tomar cualquier valor? ¿De qué depende?*

Definición 2.1

El dominio de definición de una expresión algebraica es el conjunto de todos los valores admisibles de la variable.

Ejemplo 2.2

a) ¿Qué valores reales pueden tomar las variables en la expresión $ab^2 - 2a + 5b^{-1}$?

b) Determina para cuáles números reales están definidas las expresiones algebraicas siguientes:

$5x + 6$ y $\frac{4}{y-2}$

Resolución:

a) Se trata de una expresión algebraica en las variables a y b.
La variable a puede tomar cualquier valor real, pero la variable b que aparece como $b^{-1} = \frac{1}{b}$, en el dominador de una fracción ¿podrá tomar cualquier valor real?

Por lo tanto, los valores admisibles de la variable b son los números reales diferentes de cero.

Luego, los valores reales que pueden tomar las variables a y b están dadas por el conjunto $\{a,b \in \mathbb{R}: b \neq 0\}$.

b) La expresión $5x + 6$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ ya que la variable puede ser sustituida por cualquier número real y siempre será posible calcular el valor numérico de esta expresión.

La expresión $\frac{4}{y-2}$ está definida para $y \in \mathbb{R}$ con $y \neq 2$ debido a que el denominador se anula para $y = 2$ y no es posible calcular el valor numérico en este caso ♦

Recuerda que...

La fracción $\frac{a}{b}$ expresa una división ($a : b$), por lo que su denominador no puede ser cero, porque la división por cero no está definida.

Reflexiona

¿Cuál es el dominio de definición de la expresión algebraica $2m + m^0$?

Ejemplo 2.3

En la figura 2.4 aparece la relación que deben tener las dimensiones de una cartulina que se utilizará en la presentación de un poster; si la mayor dimensión no puede exceder de $3u$ ¿qué valores puede tomar la variable?

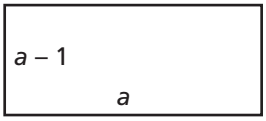


Fig. 2.4

Resolución:

Debes analizar que se refiere a la longitud de los lados, que es una magnitud positiva; además, existen otras condiciones porque las magnitudes no deben exceder de las tres unidades. Si $a = 1$ la longitud del ancho sería 0 lo que no tiene sentido; esto quiere decir que la variable a puede tomar cualquier valor real que se encuentre entre 1 y 3 incluyendo el 3. ♦

Valor numérico de una expresión algebraica

Si en las expresiones algebraicas se sustituyen las variables por números y se efectúan las operaciones indicadas, el valor que se obtiene es el valor numérico de la expresión.

Ten presente que es conveniente primero reducir o simplificar la expresión antes de sustituir por los números, pues esa acción te simplifica el cálculo.

Ejemplo 2.4

Decir cuál es el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes:

a) $x^2 - 2xy - (x + y)^2 + 4$ cuando la x toma el valor -1 y la y el valor 2

b) $\dfrac{x+2y}{y+3}$ cuando la x toma valor 5 y la y el valor de -3

Resolución:

a) Para hallar el valor de una expresión algebraica, primeramente, hay que analizar cuál es la vía más racional, si es sustituir los valores directamente en la expresión o resolver primero las operaciones indicadas. Si sustituyes directamente obtienes

$(-1)^2 - 2\,(-1) \cdot 2 - (-1 + 2)^2 + 4 = 1 + 4 - 1 + 4 = 8$

Si resuelves primero las operaciones indicadas en este caso el cuadrado de un binomio, después reducir los términos semejantes y finalmente sustituir.

Recuerda que el signo "–" delante de un paréntesis indica el opuesto de los términos que se encuentran dentro de él, por eso cambian de signo cuando se elimina el paréntesis.

$$x^2 - 2xy - (x + y)^2 + 4 = x^2 - 2xy - (x^2 + 2xy + y^2) + 4$$
$$= x^2 - 2xy - x^2 - 2xy - y^2 + 4 = -4xy - y^2 + 4$$

¡Atención!

Cuando vas a reducir o simplificar expresiones algebraicas, no puedes perder de vista que los términos deben tener la misma parte literal, para que sean semejantes.

Finalmente sustituye las variables por $x = -1$; $y = 2$. Presta atención a los signos al sustituir y realizar las operaciones: $-4xy - y^2 + 4 = -4(-1)(2) - (2)^2 + 4 = 8$. En este caso sustituir antes que reducir resulta más fácil.

b) La expresión algebraica carece de valor numérico para $y = -3$ ya que al sustituir la variable por este valor, el denominador se anula y la división por cero no está definida. ♦

Investiga y aprende

Un importante número de accidentes del tránsito están relacionados con el consumo de alcohol. Un modelo matemático sobre el metabolismo de alcohol en el cuerpo, contribuye al arribo de conclusiones y toma de decisiones. Busca en Wikipedia o internet la **Fórmula de Widmaik** y la ley del código vial en Cuba para que puedas responder las situaciones siguientes:

a) Imagina que un familiar tuyo ha ingerido una lata de cerveza. Calcula cuál es la concentración de alcohol en sangre que posee después de: 1; 2; 3; 4 y 5 h.
b) Dibuja un gráfico que describa la dinámica de esa concentración de alcohol en sangre a lo largo del tiempo.
c) Prepara en equipo una tabla que muestre el tiempo que necesita cada persona de un grupo de cuatro, para que su concentración de alcohol en sangre baje hasta la máxima permitida por las leyes de tráfico, después de haber ingerido, algún tipo de bebida alcohólica.
d) Explica la utilidad que a tu jucio tiene el modelo matemático y el papel que juega cada una de las variables.

Aplica tus conocimientos

Utilizando variables, expresa los números naturales que, al dividirlos por cinco, dejan resto 2.

a) Escribe en forma tabular los seis primeros elementos de un conjuto P que cumpla esta condición.

Operaciones con polinomios

En las operaciones con polinomios se emplean las operaciones aritméticas ya conocidas por ti y se aplican las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de la multiplicación y la división respecto a la adición y la sustracción e igualmente se hace uso de los paréntesis y signos.

Adición y sustracción de polinomios

Karina y Eduardo acostumbran estudiar juntos, aunque realizan las tareas por separado. Karina, para confrontar

la respuesta, le pregunta a Eduardo si al simplificar la expresión $12ab - 3(a + 5b) + (a - b)^2 + 3a$ *obtuvo como resultado* $a^2 + 10ab - 15b + b^2$, *a lo cual Eduardo responde que él había obtenido como resultado* $a^2 + 12ab - 16b^2$.

¿Alguna de las respuestas es la correcta? Si consideras que existe algún error, ¿cuál es?

Ya conoces, de grados anteriores y por la simplificación realizada en el ejemplo 2.4, cómo adicionar o sustraer términos semejantes, lo cual te permite simplificar las expresiones algebraicas.

Ejemplo 2.5

De un rectángulo se conoce que la longitud del largo es tres veces la de su ancho.

a) ¿Qué expresión algebraica representa su perímetro?
b) Si el perímetro del rectángulo es de 48 u, ¿cuáles son las dimensiones de sus lados?

Resolución:

a) La figura 2.5 modela las condiciones del problema, luego si P representa su perímetro $P = a + 3a + a + 3a$. Observa que todos los términos son semejantes, por tanto, se obtiene una expresión mucho más simplificada: $P = 8a$

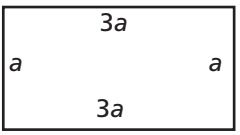


Fig. 2.5

b) Ahora bien, si $P = 8a$ tendrás que $8a = 48$, de donde $a = 6$, por tanto, el rectángulo mide 6 u de ancho y 18 u de largo. ♦

Ejemplo 2.6

Hallar el valor numérico de la expresión

$5y^2z + 6yz^2 + 4 - 5y^2z + 2zy^2 - 4yz^2$ para $y = z = \sqrt{2}$.

Resolución:

En este caso es muy útil reducir términos semejantes porque simplifica significativamente los cálculos.

La expresión simplificada es $2yz^2 + 2zy^2 + 4$

Valor numérico: $2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)^2 + 4 = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4 = 8\sqrt{2} + 4$ ♦

¿Sabías que...?

Las redes Wi Fi (figura 2.6) necesitan para su funcionamiento antenas electromagnéticas que deben ser alineadas. El diseño de estas antenas se realiza utilizando polinomios, en especial los polinomios de Chevyshev, que permiten determinar la distribución de la corriente y encontrar las dimensiones físicas de dicha antena.

https://es.wikipedia.org/wiki/Polinomio_de_Chevyshev.

http://slideshare.net/marielvapaz/polinomios-4434765 Operaciones con polinomios en la vida cotidiana.



Fig. 2.6

Multiplicación de polinomios

En la casa de la abuela de Ana, el terreno del jardín tiene forma rectangular, la longitud del largo del jardín triplica al ancho. Pero la familia ha decidido modificar el jardín, por lo que proyecta aumentarle cuatro metros al ancho y disminuir el largo en dos metros.

¿Qué expresión algebraica permite representar las dimensiones del terreno que ocupa el jardín?

¿Qué expresión algebraica permite representar el área del nuevo jardín?

En determinadas ocasiones es necesario multiplicar dos o más polinomios y para hacerlo debes recordar que es necesario aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.

Recuerda que...

$a(b + c) = ab + ac$

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Volviendo al problema de la casa de la abuela de Ana:

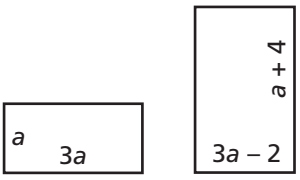


Fig. 2.7

La figura 2.7 ilustra la situación planteada, entonces el área que ocupa el jardín con las nuevas dimensiones del terreno pues ser expresada por la fórmula:

$A = (3a - 2)(a + 4)$.

Luego, al realizar la multiplicación en el miembro derecho, se obtiene:

$A = 3a^2 + 12a - 2a - 8 = 3a^2 + 10a - 8$ ♦

Fíjate que cuando realizas la multiplicación de los factores se transforman en sumas, por esa razón el enunciado de un ejercicio pudiera ser como en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.7

Transformar en suma las multiplicaciones siguientes:

a) $2x(5x - 7)$ b) $(2a - 5b)(a + 2b - 8)$

Resolución:

a) Se trata de la multiplicación de un monomio por un binomio, luego al aplicar la propiedad distributiva obtienes: $2x(5x - 7) = 10x^2 - 14x$

b) Debes realizar la multiplicación de un binomio por un trinomio, en este caso también se aplica la propiedad distributiva:

$(2a - 5b)(a + 2b - 8) = 2a^2 + 4ab - 16a - 5ba - 10b^2 + 40b$
$= 2a^2 - 16a + 40b - ab - 10b^2$ ♦

Ejemplo 2.8

Transformar en una suma los siguientes productos:

a) $(3a - 2)^2$ b) $(x - 4)(x + 15)$ c) $(4y - 1)(y + 5)$

Resolución:

a) $(3a - 2)^2 = (3a)^2 + 2(3a)(-2) + (-2)^2 = 9a^2 - 12a + 4$

b) $(x - 4)(x + 15) = x^2 + 15x - 4x - 60 = x^2 + 11x - 60$

c) $(4y - 1)(y+5) = 4y^2 + 20y - y - 5 = 4y^2 + 19y - 5$

Las trasformaciones realizadas anteriormente se pueden efectuar directamente; debes intentar hacerlo y de esta forma lograrás resolver problemas algebraicos con más rapidez.



Saber más

¿Cómo calcular más rápidamente el cuadrado de los números de dos cifras terminados en 5?

$15^2 = 225$, muy fácil $1 \cdot 2 = 2$ y le agregas 25

$25^2 = 625$, en este caso $2 \cdot 3 = 6$ y le agregas 25

$35^2 = 1\,225$, ahora calculamos $3 \cdot 4 = 12$ y le agregas 25.

¿Cuál es el fundamento?

Un número de dos cifras terminado en cinco se puede expresar como $N = 10a + 5$, donde a representa la cifra de las decenas y cumple,

$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25$

¿Qué significa este resultado?

La cifra de las decenas se multiplica por el sucesor, después por 100 y se le adiciona 25.

Aplica tus conocimientos

Se tiene la expresión algebraica $(a - 7b)^2 \cdot 8b$. *Analiza y explica para qué condiciones de las variables el producto es cero.*

Existen productos de factores que cumplen ciertas reglas, por lo que resulta útil memorizarlos y así no tener que efectuar las multiplicaciones. A estos productos se les suele llamar productos notables, de ellos ya conoces la suma por diferencia de dos términos del cual obtienes la diferencia de dos cuadrados y el cuadrado de una suma de donde resulta el trinomio cuadrado perfecto.

Recuerda que...

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + (a \cdot b)$

▲ ¿Es posible encontrar otros productos notables?
▲ ¿De qué forma puedes transformar en suma el binomio $(a + 1)^3$?
▲ ¿Qué características tienen la suma resultante al calcular el cubo de esta suma?
▲ ¿Qué significa $(a + 1)^3$?

Sin dudas has pensado en la definición de potencia, por lo tanto

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$

Este producto lo puedes expresar de forma más abreviada como

$(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b)$ el primer factor te es conocido, luego es posible desarollarlo directamente

$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$

Reduciendo términos semejantes se tiene que:

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

¿Cuál es su traducción en el lenguaje común?

El cubo de una suma es igual al cubo del primer término, más el triplo del cuadrado del primer término por el segundo, más el triplo del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.

Reflexiona

¿Cómo describes la composición de los términos en $(a - b)^3$?

Ejemplo 2.9

Expresar como suma las potencias siguientes:

a) $(a + 1)^3$ b) $(x - 2)^3$ c) $(m^2 - n^3)^3$

Resolución:

a) $(a + 1)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 1 + 3 \cdot a \cdot 1^2 + 1^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

b) $(x - 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-2) + 3 \cdot x \cdot (-2)^2 + (-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

c) $(m^2 - n^3)^3 = (m^2)^3 + 3 \cdot (m^2)^2 \cdot (-n^3) + 3 \cdot (m^2) \cdot (-n^3)^2 + (-n^3)^3$
$= m^6 - 3m^4 n^3 + 3m^2 n^6 - n^9$ ♦

Aplica tus conocimientos

¿Para cuál o cuáles valores de la variable $(c + 1)^3 = c^3 + 1$*?*

En resumen, la multiplicación de polinomios que se utiliza en la resolución de problemas, muchas veces se puede realizar con mayor rapidez si aplicas los productos notables.

Productos notables

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + (a \cdot b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$

División de polinomios. Teorema del resto. Regla de Ruffini o Horner

¿Cómo hallar una expresión $A(x)$ *para que la igualdad* $(x - 2) \cdot A(x) = x^3 - x^2 - 5x + 8$ *sea verdadera?*

Recuerda que la división es la operación inversa de la multiplicación, ese conocimiento lo aplicaste en la división de números reales y la de un polinomio por un monomio; ahora debes aprender a dividir dos polinomios.

¿Sabías que...?

El símbolo que utilizas en la división en galera, para separar al dividendo del divisor y del cociente, recibe el nombre de *gnomom* o ángulo, del cual no existe mucha información, pero en el libro de *Historia de la matemática* de Boyer, p. 282 dice: "Los árabes y, más tarde, los europeos adoptaron la mayor parte de los artificios de los hindúes, luego es posible que la división larga provenga de la India, que recibe el nombre de galera, por su semejanza con un barco con las velas desplegadas" (figura 2.8).

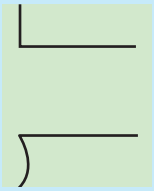


Fig. 2.8

▲ ¿Cuál es el dividendo, el divisor, el cociente y el resto? y ¿cómo realizar la división de dos polinomios?

¡Atención!

Recuerda que cuando realizas una división a cada dividendo le sustraes el producto del cociente por el divisor, por tanto, el signo de esos productos cambia al ser afectado por el signo de la diferencia.

Dividamos $P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 12$ por $x - 2$. Observa en la figura 2.9 que el dividendo y el divisor están ordenados en potencias descendentes.

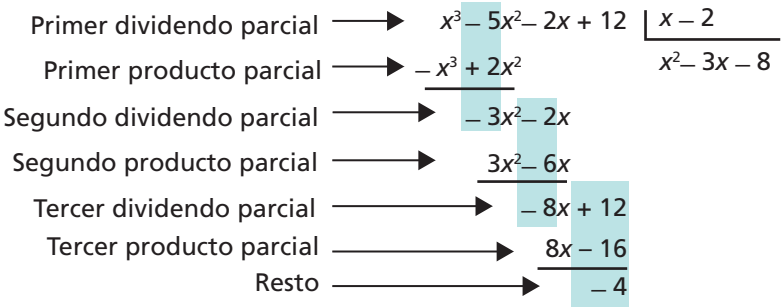


Fig. 2.9

¡Atención!

Cuando realizas una división entre dos polinomios esta finaliza cuando obtengas un dividendo parcial cuyo grado es menor que el grado del divisor.

En este caso $x^3 - 5x^2 - 2x + 12 = (x - 2)(x^2 - 3x - 8) - 4$

Cuando dividimos un polinomio $P(x)$ de grado n, por un binomio de la forma $x - a$ (de grado 1), se cumple que $P(x) = (x - a)Q(x) + R$, donde $Q(x)$ es el cociente de grado $n - 1$ y R es el resto (de grado cero).

Saber más

La división de polinomios resulta de suma importancia en la Ingieneria Informática para el tratamiento de la corrección de errores, que pueden ocurrir entre ordenadores o en el interior de estos, para lo cual se emplea el Código de Polinómicos Generadores de grado r (Normas internacionales) (figura 2.10).

Para ello se divide el polinomio trasmisor de grado n, por el polinomio generador de grado r, característico del código, acordado por ambos extremos del canal de comunicación; cuando el resto es cero significa que no existen errores.

Información para enviar: 10110101101 $x^{10} + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + 1$

Polinomio generador: 10011 $x^4 + x + 1$

Polinomio para dividir: 101101011010000 $(x^{10} + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + 1)x^4$ $x^{14} + x^{12} + x^{11} + x^9 + x^7 + x^6 + x^4$

División en módulo 2:

101101011010000 | 10011 $x^{14}\ x^{12}\ x^{11}\ \ x^9\ \ x^7\ x^6\ \ x^4\ |\ x^4 + x + 1$

10011 — 10101010010 $x^{14}\ \ x^{11}\ x^{10}$ — $x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x$

01011
00000
10110
10011
01011
00000
10111
10011
01000
00000
10001
10011
00100
00000
01000
00000
10000
10011
00110
00000
0110

$x^{12}\ \ x^{10}\ x^9$

$x^{12}\ \ x^9\ x^8$

$x^{10}\ \ x^8\ x^7\ x^6$

$x^{10}\ \ x^7\ x^6$

$x^8\ \ x^4$

$x^8\ \ x^5\ x^4$

x^5

$x^5\ \ x^2\ x$

$x^2\ x$

Resto obtenido: 0110 $x^2 + x$

Trama transmitida: 101101011010110 $x^{14} + x^{12} + x^{11} + x^9 + x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x$

Fig. 2.10

Fuente: http://www.ICC.UJI.es; Ingenieria Tecnica en Informatica de Sistema-/ Detencion de errores. Universidad Autonoma de Madrid. PDF/ Control de Errores.Redes Universidad de Alicante 2010-11PDF.

En el esquema de la división (figura 2.9) observa que:

- Los primeros coeficientes de los dividendos parciales (1,–3 y –8) coinciden con los coeficientes del cociente.
- Los segundos coeficientes de cada producto parcial se obtienen multiplicando por 2 los coeficientes del cociente.

Estas observaciones nos permiten realizar la división de forma abreviada. Para ello situamos los coeficientes del dividendo, ordenados en potencias descendentes, y el valor de *a* del divisor (*x* – *a*), como se muestra en la figura 2.11:



Fig. 2.11

Los coeficientes de los términos del cociente y el resto se obtienen mediante el procedimiento que se ilustra en la figura 2.11. Observa que los elementos de las columnas coinciden con los elementos destacados en la división (figura 2.9).

Para dividir un polinomio P(x) *de grado* n *por un binomio de la forma* (x – a) *puedes proceder de la siguiente forma (figura 2.12):*

- *Observa si el dividendo está ordenado en potencias descendentes y si contiene todas las potencias de la variable.*
- *Coloca en el esquema los coeficientes del dividendo y el valor de* a**.**
- *Escribe el primer coeficiente del dividendo debajo de la línea horizontal (este será el primer coeficiente del divisor).*

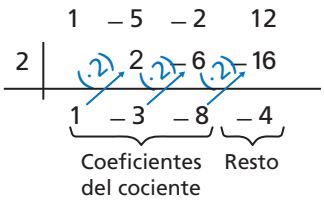


Fig. 2.12

- *Multiplica el valor de* a *por el primer coeficiente del divisor y coloca el resultado debajo del segundo coeficiente del dividendo.*
- *Realiza la suma algebraica correspondiente y repite este proceso con cada nuevo coeficiente que obtengas hasta obtener el resto.*

¡Atención!

No puedes perder de vista que en el esquema que describe el método de división sintética (Regla de Ruffini) se colocan todas las potencias menores de las variables del dividendo incluyendo las de los coeficientes nulos,

para ello se ubicará un cero cuando la potencia correspondiente a la variable no aparece. Ver ejemplo 2.10

Una condición necesaria para que la división de un polinomio $P(x)$ por un binomio de la forma $(x - a)$ sea exacta, es que sea un divisor del término independiente.

El esquema para obtener la división, de la figura 2.12, se nombra **división sintética**, **método de Horner** o **regla de Ruffini.**

De la historia

El método para determinar los coeficientes de los polinomios en una división fue publicado por Paolo Ruffini (1765-1837) (figura 2.13 b) en 1804 y por Wiliam G. Horner (1765-1837) (figura 2.13 a) en 1819, el primero de origen italiano y el otro, inglés, aunque 800 años antes, en el siglo XI se conoce que el chino Jian Xian buscó un método para encontrar los coeficientes binomiales porque los necesitaba para extraer raíces de alto grado.



a



b

Fig. 2.13

Ejemplo 2.10

Aplicar el esquema de la división sintética para obtener el cociente y el resto en la división del polinomio $S(x) = x^3 + 11 + 2x^2$ por el binomio $x + 3$.

Resolución:

	1	2	0	11
–3		–3	3	–9
	1	–1	3	2

Fig. 2.14

Debes tener presente que lo primero es ordenar el polinomio del dividendo de forma descendente, en este caso se obtiene $x^3 + 2x^3 + 11$. Y después colocar los coeficientes como muestra la figura 2.14

Cociente: $Q(x) = x^2 - x + 3$ Resto: $R = 2$ ♦

Reflexiona

Observa que al dividir $P(x)$ *y* $S(x)$ *por los binomios* $x - 2$ y $x + 3$ se obtuvo como restos -4 *y* 2 respectivamente. Ahora, si calculas $P(2)$ y $S(-3)$ te pueden sorprender los resultados, ¿qué puedes decir sobre esto?

Tu reflexión puede ser analizada desde una situación más general si utilizas la representación $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$, por ejemplo, si evaluamos esta igualdad para $x = a$ se obtiene $P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R = 0 + R$, es decir $R = P(a)$.

Este resultado nos permite enunciar un teorema muy útil para el trabajo con polinomios racionales enteros.

Teorema 2.1 (Teorema el resto)

El resto de dividir un polinomio racional entero $P(x)$ por un binomio de la forma $(x - a)$ es $R(x) = P(a)$.

Ejemplo 2.11

Determinar, sin realizar la división, el resto que se obtiene en las siguientes divisiones:

a) $(x^3 - 4x^2 + 7x - 6) : (x - 2)$
b) $(x^4 - 3x + 5) : (x + 1)$

Resolución:

a) Sea $P(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 6$ y $a = 2$
$P(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 7(2) - 6 = 8 - 16 + 14 - 6 = 0$ y =, por tanto $R = 0$ (la división es exacta)

b) Sea y $P(x) = x^4 - 3x + 5$ y $a = -1$
$P(-1) = (-1)^4 - 3(-1) + 5 = 1 + 3 + 5 = 9$, por tanto $R = 9$ (la división no es exacta) ♦

Descomposición factorial de polinomios

Para facilitar el estudio generacional de la población de ciertas especies, se han desarrollado diferentes modelos matemáticos. En uno, de tipo ecológico, utilizado por un grupo de investigadores, se ha supuesto un ecosistema donde una especie puede alcanzar un tope máximo de población, una vez previstas las condiciones y realizadas las transformaciones matemáticas correspondientes, se obtiene la ecuación:



Fig. 2.15

$9P - 27P^2 + 26P^3 - 9P^2 + 27P^3 - 27P^4 = \frac{2}{3}$ *y en el miembro izquierdo el polinomio* $9P - 27P^2 + 26P^3 - 9P^2 + 27P^3 - 27P^4$

¿De qué forma se puede conocer el valor de P *para determinar los valores lógicos y posibles de la población de la especie?*

Ya conoces algunos casos de factorización, estudiados en grados anteriores como son el factor común, la diferencia de cuadrados, el trinomio cuadrado perfecto y los trinomios de las formas $x^2 + px + q$ y $mx^2 + px + q$, en las que $m \neq 0$, p y q son números reales.

De la historia

Fue el francés Albert Girard (1595-1632) (figura 2.16) quien utiliza por primera vez los paréntesis en las expresiones algebraicas y explica el método de descomposición en factores.



Fig. 2.16

Reflexiona

¿Cuál es la vía más ventajosa que puedes utilizar para calcular $2\,010^2 - 2\,000^2$, sin utilizar la calculadora?

Te propongo analizar el siguiente ejemplo, para que reactives tus conocimientos sobre los casos de factorización de expresiones algebraicas que ya estudiaste.

Ejemplo 2.12

Factorizar las expresiones algebraicas siguientes:

a) $mn - m$ b) $6x^2y^5 + 15xy^7$ c) $3(a + b) - x(a + b)$
d) $ax + ay + x + y$ e) $36b^4 - b^2$ f) $n^2 + 6n + 9 - p^2$
g) $x^2 + 7x + 6$ h) $2x^2 + 5x - 3$

Resolución:

a) Se resuelve mediante la extracción directa del factor común, que se basa en la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.

$mn - m = m(m - 1)$

$a(b + c) = ab + ac$

Producto en suma $\rightleftarrows$ *Suma en producto*

b) Es análogo al anterior, en el que intervienen potencias, en este caso se aplica el cociente de potencias de igual base, para dividir cada término de la suma por el factor común.

$$\frac{6x^2y^5}{3xy^5} = 2x\,; \qquad \frac{15xy^7}{3xy^5} = 5y^2$$

$$6x^2y^5 + 15xy^7 = 3xy^5(2x + 5y^2)$$

c) El factor común es el binomio $(a + b)$, el cual se extrae directamente.

$$3(a + b) - x(a + b)$$
$$= (a + b)(3 - x)$$

d) Se trata también de un caso de factor común, pero primero debemos agrupar convenientemente.

$$ax + ay + x + y$$
$$= a(x + y) + (x + y)$$
$$= (x + y)(a + 1)$$

e) Es un caso combinado del factor común con la diferencia de cuadrados $(6b)^2 - 1^2$.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Suma en producto ⇄ *Producto en suma*

$$36b^4 - b^2 = b^2(36b^2 - 1)$$
$$= b^2(6b + 1)(6b - 1)$$

f) Es un caso combinado de un trinomio cuadrado perfecto con una diferencia de cuadrados.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Suma en producto ⇄ *Producto en suma*

$$n^2 + 6n + 9 - p^2 = (n + 3)^2 - p^2$$
$$= (n + 3 + p)(n + 3 - p)$$
$$= (n + p + 3)(n - p + 3)$$

g) Se trata de un trinomio de la forma $x^2 + pq + q$, para su descomposición factorial es suficiente encontrar dos números que el producto sea q y la suma, p.

$$x^2 + px + q = (x + b)(x + c)$$
$$= b \cdot c = q;\ b + c = p$$

$$x^2 + 7x + 6 = (x + 1)(x + 6)$$

h) Se trata de un trinomio de la forma $mx^2 + px + q$, para su descomposición se puede utilizar el esquema siguiente, en el que $ac = m$ y $bd = q$.

$mx^2 + px + q = (ax + b)(cx + d)$

$a \quad b$

$c \quad d$

$a \cdot d + c \cdot b = p$ ♦

$2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$

¡Atención!

Cuando se descompone en factores, se continúa hasta que los factores tengan la forma más simple posible, de manera que no se pueda aplicar ninguno de los casos de descomposición factorial por ti estudiados.

Completamiento cuadrático

El completamento cuadrático es el término que se le añade a un binomio de la forma $x^2 + px$ para ser un **trinomio cuadrado perfecto**.

▲ ¿Qué es un trinomio cuadrado perfecto?

▲ ¿Por qué $x^2 - 4x + 4$ es un trinomio cuadrado perfecto?

▲ ¿Cómo transformar un trinomio, de manera que contenga un cuadrado perfecto?

Aplica tus conocimientos

Evalúa el trinomio $x^2 - 4x + 4$ *para los elementos del conjunto {3;3,5;8;10;13}. Observa los resultados obtenidos y expresa cuál es la característica común que los distingue.*

El trinomio $x^2 - 4x + 4$ *es cuadrado perfecto, porque* $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, *¿cómo explicas esta afirmación a partir de los resultados obtenidos en la sesión "aplica tus conocimientos" que realizaste anteriormente?*

Un trinomio cuadrado perfecto tiene la estructura algebraica $a^2 + 2ab + b^2$, observa que el primer y el tercer término se expresan como potencias de exponente 2 (cuadrados), el término del medio es el doble producto de las bases de esas potencias.

Para expresar un trinomio de la forma $x^2 + px + q$, de manera que contenga un cuadrado perfecto, lo primero es hallar el complemento cuadrático del binomio $x^2 + px$. Si el tercer término es k^2, entonces $px = 2xk$, luego, despejando se obtiene $k = \frac{p}{2}$, por tanto, el complemento cuadrático es $k^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

Ejemplo 2.13

Transformar el trinomio $x^2 + 6x - 7$ de forma que contenga un cuadrado perfecto.

Resolución:

Complemento cuadrático: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$

$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 6x + 9 - 9 - 7$ (adicionando y sustrayendo el complemento cuadrático)

$x^2 + 6x - 7 = (x^2 + 6x + 9) - 16$

$x^2 + 6x - 7 = (x + 3)^2 - 16$

El completamiento cuadrático se puede utilizar en la descomposición factorial. ♦

Ejemplo 2.14

Transformar el trinomio $x^2 + 6x - 7$ de forma que contenga un cuadrado perfecto y descomponerlo en factores.

Resolución:

Del ejemplo anterior se conoce que $x^2 + 6x - 7 = (x + 3)^2 - 16$, ahora aplicando la diferencia de cuadrados se obtiene:

$x^2 + 6x - 7 = (x + 3 + 4)\,(x + 3 - 4) = (x + 7)\,(x - 1)$ ♦

¿Las formas de factorización estudiadas hasta ahora son las únicas que se pueden utilizar para descomponer los polinomios?

¿Cómo factorizar el polinomio $x^3 - 4x^2 + 7x - 6$?

Para descomponer en factores, también se aplica la regla de Ruffini, con la que aprendiste a determinar el cociente y el resto de la división de un polinomio $P(x)$ por un binomio de la forma $x - a$.

Ejemplo 2.15

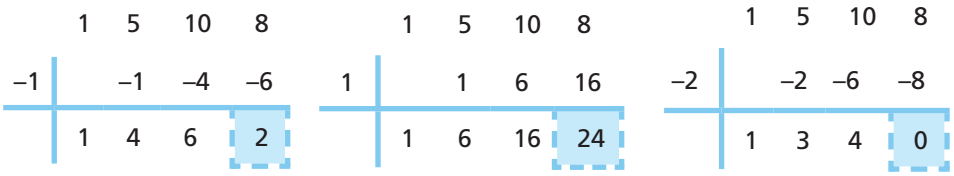
Descomponer en factores el polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 + 10x + 8$ aplicando la regla de Ruffini.

Resolución:

Para que $P(x)$ sea divisible por un binomio de la forma $(x - a)$, el resto de la división tiene que ser cero, y para ello el valor de a tiene que ser un divisor del término independiente.

$D(8)$:{±1; ±2 ; ±4; ±8}

Ahora probemos con estos valores para determinar uno que anule el resto.



Concluir con el resultado $P(x) = x^3 + 5x + 10x + 8$

$$P(x) = (x + 2)(x^2 + 3x + 4)$$

(en este caso no se continúa descomponiendo en factores el trinomio $(x^2 + 3x + 4)$ ya que no tiene ceros reales) ♦

Ejemplo 2.16

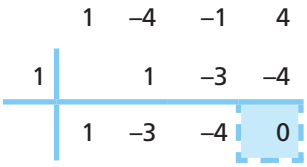
Descomponer en factores los polinomios siguientes:

Resolución:

a) $P(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ b) $P(z) = z^3 + 1$

c) $P(a) = a^3 - b^3$ d) $P(a) = a^3 + b^3$

a) $D(4)$:{±1; ±2 ; ±4}

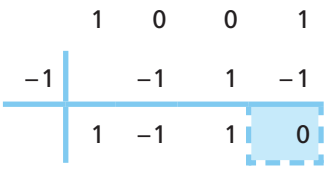


$P(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$

$P(x) = (x - 1)(x^2 - 3x - 4)$

$P(x) = (x - 1)(x - 4)(x + 1)$

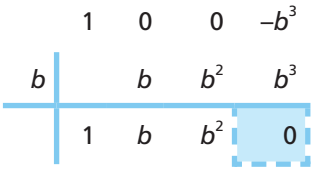
b) $D(1)$:{±1}



$P(z) = z^3 + 1$

$P(z) = (z + 1)(z^2 - z + 1)$

c) $D(b^3)$: {±1; ±b; ±b^2; ±b^3}



$P(a) = a^3 - b^3$

$P(a) = (a - b)(a^2 + ba + b^2)$

d) $D(b^3)$: $\{\pm 1; \pm b; \pm b^2; \pm b^3\}$

$P(a) = a^3 + b^3$

$P(a) = (a + b)(a^2 - ba + b^2)$

	1	0	0	b^2
$-b$		$-b$	b^2	$-b^3$
	1	$-b$	b^2	0

♦

Observa que en los resultados de los incisos c) y d) del ejemplo anterior, has obtenido nuevos recursos para la descomposición factorial de binomios, en este caso la diferencia y la suma de cubos.

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Ejemplo 2.17

Factorizar los binomios siguientes:

a) $27 - c^3$ b) $a^3 + 8$ c) $2x^3y - 250y$

Resolución:

a) $27 - c^3 = 3^3 - c^3$
$=(3 - c)(9 + 3c + c^2)$

b) $a^3 + 8 = a^3 + 2^3$
$= (a + 2)(a^2 - 2a + 4)$

c) $2x^3y - 250y = 2y(x^3 - 125)$
$= 2y(x^3 - 5^3)$
$= 2y(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$ ♦

Aplica tus conocimientos

Karla y su padre van a construir dos peceras (figura 2.17) que serán aportadas a la Casa del adulto mayor de su localidad. Una vez concluida la primera pecera, el padre de Karla le sugiere aumentar en uno la longitud de las aristas de la próxima pecera; de esta forma su volumen sería tres veces mayor que la actual, aumentado en tres. ¿Qué dimensiones tendrá la nueva pecera? ¿Qué beneficios reporta esta sugerencia?

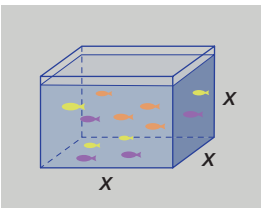


Fig. 2.17

Descomposición en factores por agrupamiento

Otra forma de descomponer en factores los polinomios es el agrupamiento de términos, que como lo indica la expresión agrupar, significa unir términos, algebraicamente, se trata de agrupar términos haciendo uso de los signos de agrupación, de forma tal que puedan ser factorizados.

Ejemplo 2.18

Factorizar las sumas siguientes:

a) $ax - 3x + 2ay - 6y$ b) $a^2(a-1) - 9(a-1)$
c) $a^2 - 2a + 1 - x^2$ d) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Resolución:

a) $ax - 3x + 2ay - 6y$ — Esta expresión contiene factor común x en los dos primeros términos y $2y$ en los dos últimos.

$= (ax - 3x) + (2ay - 6y)$ — Se pueden agrupar los dos primeros términos y los dos últimos.

$= x(a-3) + 2y(a-3)$ — Extrayendo el factor común, se obtiene un nuevo factor común binomio.

$= (a-3)(x+2y)$ — Al extraer el factor común binomio, la expresión queda factorizada.

b) $a^2(a-1) - 9(a-1)$ — Observa que en este caso se puede extraer como factor común $(a-1)$.

$= (a-1)(a^2-9)$ — Uno de los factores es una diferencia de cuadrados, la cual debes descomponer.

$= (a-1)(a+3)(a-3)$

c) $a^2 - 2a + 1 - x^2$ — Los primeros tres términos, corresponden a los sumandos de un trinomio cuadrado perfecto y el último es un cuadrado.

$= (a^2 - 2a + 1) - x^2$ — Se pueden agrupar los tres primeros términos para obtener con el cuarto término una diferencia de cuadrados.
$= (a-1)^2 - x^2$
$= (a - 1 - x)(a - 1 + x)$

d) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

En este caso conviene agrupar el primer término con el último, así como el segundo y el tercero precedido de un signo menos.

$= (x^3 - 1) - (3x^2 - 3x)$
$= (x - 1)(x^2 + x + 1) - 3x(x - 1)$

Al agrupar se obtiene una diferencia de cubos entre el primero y el último, la cual debes descomponer y extraer factor común entre el segundo y el tercer término.

$= (x - 1)(x^2 + x + 1 - 3x)$
$= (x - 1)(x^2 - 2x + 1)$

Luego puedes extraer el factor común del binomio y reducir términos semejantes.

$= (x - 1)\,(x - 1)^2 = (x - 1)^3$

El trinomio obtenido al reducir es un trinomio cuadrado perfecto, como hay tres términos iguales se puede expresar como una potencia. ♦

¿Qué orden seguir en una descomposición factorial?

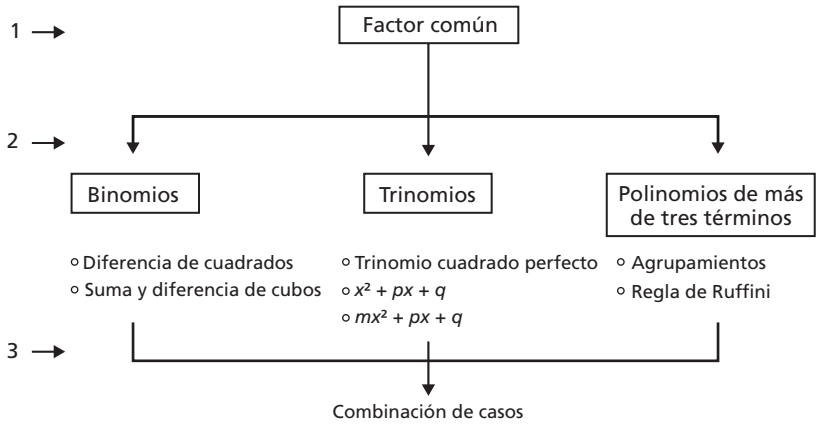


Fig. 2.18

Del software

Para comprender la Matemática III
Lee el módulo "Trabajo con variables" y realiza los ejercicios del 4 al 10, una vez concluidos busca la retroalimentación de los ejercicios por ti resueltos.

Reflexiona sobre lo aprendido

¿De qué depende el dominio de definición de una expresión algebraica?
¿Qué significa hallar el valor numérico de una expresión algebraica?
¿Qué operaciones se pueden realizar con los polinomios?
¿Qué nuevos productos notables estudiaste?
¿Cuándo son divisible dos polinomios?
¿Qué proceso de selección debes realizar para descomponer en factores los polinomios?

Ejercicios del epígrafe 2.1

Expresiones algebraicas

1. Si $a = -1$; $b = 3$ y $c = 2$ el valor de la expresión $b^2 - 4ac$ es:
a) $-10b$ b) 17 c) 14 d) 1

2. Selecciona la respuesta correcta para que la proposición sea verdadera.

2.1 La expresión algebraica que representa un quinto de un número, aumentado en 7 es:
a) $\frac{x+7}{5}$ b) $\frac{x-7}{5}$ c) $\frac{x}{5}+7$ d) $\frac{x}{5}-7$

2.2 Al efectuar y simplificar la expresión algebraica $15a^2 + 3a - (4a - a^2)$ se obtiene:
a) $14a^2 - a$ b) $16a^2 - 7a$ c) $16a^2 - a$ d) $16a^2 + a$

2.3 Cuando se reduce la expresión $\sqrt{x} + \sqrt{2x} - 2\sqrt{x}$, se obtiene:
a) 0 b) $\sqrt{2x} - \sqrt{x}$ c) $\sqrt{x}$ d) $2\sqrt{2x}$

3. Identifica y escribe en tu libreta la expresión algebraica de la columna B que obtienes al simplificar cada expresión de la columna A.

A	B
1) $2ab + 4 - \frac{ab}{2}$	a) $-\frac{ab}{4} + 2a$
2) $-ab - 7a + 14\,ab$	b) $-13\,ab + a$
3) $-16 - 12\,ab + 8(2 - ab)$	c) $\frac{3}{2}ab + 4$

4) $\frac{3}{4}ab - ab + 2a$	d) $13\,ab - 7a$
	e) $\frac{ab}{2}$
	f) $-20\,ab$

4. Escribe en notación constructiva el dominio de definición de cada una de las expresiones algebraicas que aparecen a continuación:

a) $\frac{5}{2x+3}$ b) $\frac{4y}{y^2-16}$ c) $\frac{7b+2}{4(18-b)}$

d) $\frac{8c}{c^3-1}$ e) $\frac{69}{(m-5)^2}$ f) $\frac{38}{x^2+10}$

g) $\frac{98z}{z^2-5z-6}$ h) $\frac{7}{y(y^2-9)}$ i) $\frac{2x+1}{8(x-1)(x+3)}$

j) $\frac{\frac{3}{p}}{(p-2)(p^2-3p+4)}$ k) $\frac{\frac{1}{2-x}}{x(x^2+4)}$ l) $\frac{50}{a(6+a^2)}$

5. En los enunciados y preguntas que aparecen a continuación, puedes encontrar más de una respuesta correcta; selecciona las que consideres:

5.1 El valor numérico de la expresión $(x + 2)^2$ es 25 si x toma como valores:

a) -3 b) 3 c) 7 d) -7

5.2 ¿Qué valores debe tomar la variable para que $(x - 4)^2$ tenga como valor numérico 49?

a) -3 b) 3 c) 11 d) -11

5.3 El valor numérico de la expresión $(a + 2)^2$ es $\frac{4}{9}$ cuando la variable toma los valores:

a) $-\frac{8}{3}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $-\frac{4}{3}$

5.4 ¿Cuáles son los valores que debe tomar la variable para que el valor numérico de $(b + 1)^2$ sea $\frac{1}{4}$?

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $-\frac{3}{2}$

6. Identifica cuál de las expresiones siguientes tienen como dominio de definición al conjunto de los números reales.

a) $\frac{5}{x-1}$ b) $\frac{5x(x+8)}{12}$ c) $\frac{2x-1}{x^2}$ d) $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

7. Expresa para qué valores reales de la variable no están definidas las expresiones algebraicas siguientes:

a) $\frac{1}{b}$ b) $\frac{2}{3x-5}$ c) $\frac{3x}{4(x-9)}$ d) $d+\frac{m}{t}$

e) $\frac{4}{x(x+2)}$ f) $\frac{3}{b}+\frac{b}{5x-7}$ g) $p\sqrt{q}$ h) $\frac{2b}{n}-\frac{b^0}{5n+7}$

i) $\frac{2a}{a-b}$

8. Determina el dominio de definición de la expresión algebraica y calcula el valor numérico para los valores indicados en cada caso.

a) $3x - 5$; $x = 15$ b) $12\sqrt{x}$; $x = \frac{9}{16}$

c) $\frac{x-1}{x(x+1)}$; $x = 0{,}5$ d) $\frac{5-y}{y-6}$; $y = -4$

9. Indica una expresión algebraica para cada una de las situaciones siguientes:

a) La suma de tres números naturales consecutivos.
b) La tercera parte de un número, más su mitad.
c) Un número más su cuadrado, aumentado en 24.
d) La suma de los cuadrados de dos números, dividido por el primero de ellos.

10. Copia las expresiones algebraicas que aparecen a continuación y escribe en tu libreta cómo se leen traduciendo del lenguaje algebraico al común

a) $a \cdot b \cdot c - 4$ b) $3a^2 - b$

c) $\frac{x+y}{x-y}$ d) $\frac{m}{4}-1$

e) $\sqrt{a \cdot b}$ f) $x(y-z)$

g) $m^2 - n^2$ h) $(m-n)^2$

i) $4(x-y)$ j) $\dfrac{(x+y)^2}{3}$

k) $\dfrac{1}{ab}$ l) $y^2 - (x+z)^3$

11. Imagina que yo tengo un conjunto de objetos y tú otro, vamos a establecer una comparación entre los míos y los tuyos, para ello debes escribir una expresión algebraica que se corresponda con cada una de las situaciones dadas, ¡Ah! Yo voy a utilizar como variable *x*.

No.	Situaciones	Yo	Tú
a)	Entre los dos tenemos 15.		
b)	Lo mío es el triple de lo tuyo.		
c)	Te gano por 10.		
d)	La diferencia entre lo tuyo y lo mío es 20, pero yo te gano.		
e)	Si te doy 10 tenemos lo mismo.		
f)	Si consigues 7 más tendrás el doble que yo.		
g)	Tengo 2 menos que cuatro veces lo tuyo.		
h)	Tres veces lo tuyo, solo es la mitad de lo mío.		

12. *En una agencia de carros los precios varían de un año para otro. Este año el precio establecido para los carros ha aumentado en un 6 % respecto al precio que tenía en el año pasado, pero el mes de diciembre de este año se hará una oferta especial con una rebaja del 6 % del precio. Expresa en forma algebraica cuál será el precio de un carro, en esta agencia, en el momento de la oferta.

13. Lee con cuidado la receta de mantequilla de maní (figura 2.19) y fíjate en el gramaje de cada ingrediente.



Fig. 2.19

Ingredientes para dos tazas		
Maní	320 g	2 tazas
Miel de abeja	40 g	2 cucharadas
Sal	5 g	$\frac{1}{2}$ cucharadita
Aceite	68 g	4 cucharadas

Pasos que se deben seguir:

1. Tostar maní.
2. Pelar el maní y pasarlo por una batidora.
3. Mezclar el maní con la miel de abeja, sal y aceite, hasta obtener una pasta homogénea.[2]

Nota: se utiliza para untar en panes o en platos especiales.

Puedes compartir la receta con familiares o amigos, pero antes realiza las actividades siguientes:

a) Escribe una expresión algebraica que represente el gramaje de cada ingrediente, para ello considera que los gramos de sal los representa la variable "*a*".

b) Asigna una variable a cada ingrediente y escribe una expresión algebraica que describa la proporción aproximada en que estos se utilizan en la receta.

c) ¿Cómo expresas el gramaje de la pasta homogénea que se obtiene?

14. Dayán es un joven que pesa 60 kg, ayer lo detuvo un policía para realizarle un examen de alcoholemia[3]. La concentración en sangre de Dayán era de 0,93; el policía le dijo que hacía 2 h que había consumido su última bebida, afirmación con la que Dayán no estuvo de acuerdo.

A partir de la información recopilada en la investigación que realizaste en la sección Investiga y aprende, responde:

a) Argumenta por qué consideras correcta o no la negativa de Dayán respecto al tiempo en que había ingerido la última bebida.

[2] Revista Científico Popular *Energía y Tú*. De CUBASOLAR

[3] Alcoholemia es la medida que permite conocer la cantidad de etanol que circula en la sangre de un sujeto.

b) ¿Consideras que estaba en condiciones de conducir según los resultados del examen de alcoholemia? ¿Por qué? (explica utilizando datos numéricos)

15. A continuación te damos algunos conjuntos numéricos, intercambia con tu compañero o compañera de mesa cada uno y busca al menos una expresión algebraica que tenga como dominio de definición el que se indica a continuación.

a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R}\backslash\{4\}$ c) $\mathbb{R}_+$ d) $\{x \in \mathbb{R};\ x \geq 1\}$

16. Te propongo que invites a otro compañero para te ayude a responder el ejercicio siguiente:

Busca en cada caso una expresión algebraica que no esté definida cuando el valor de la variable sea:

a) $x = 6$ b) $y = 2$ c) $a = -9$ d) $b = 0$ e) $x = 0$ f) $x = -2$

17. Presta atención a las expresiones algebraicas que aparecen a continuación e identifica cuál de ellas tiene como dominio de definición $\{x \in \mathbb{R}: x \neq -1\}$.

a) $\frac{x+1}{x}$ b) $\frac{12x}{x^2+1}$ c) $\frac{10x}{x^2-1}$ d) $\frac{3-x}{x+1}$

Operaciones con polinomios

18. Identifica los pares de términos semejantes.

a) $4a^3$ y $(2a)^3$ b) $8mp$ y pn c) $2\,ab^2\,c^3$ y $5\,ab^3\,c^2$ d) a^{m+1} y $3a^{m+1}$

19. Expresa como un polinomio reducido:

a) $a + (2a - 5b) - (9b + 3a - 1)$

b) $\frac{4}{5}a - \left(\frac{5}{4}a - \frac{b}{5}\right) + \left(\frac{a}{4} - \frac{4}{5}b\right)$

c) $0{,}3x + 0{,}4y + 0{,}5z - 0{,}6a - 0{,}7y - 0{,}9z + 3x - 3y - 3z$

20. De $a^3 - 7am^2 + m^3$ resta $-5am^2 + 8am - 5m^3$. Comprueba el resultado y halla su valor numérico para $a = 1$ y $m = \frac{3}{2}$.

21. Sustrae la suma de $m^4 + 10m^3n^2 + 15n^4$ con $-11m^2n - 14m^3n^2 - 3mn^3 + n^4$ de $6m^4 + 7m^3n^2 + 8mn^3 - n^4$.

22. Si $4x^3 - 9x + 6$ es la diferencia y $5x^2 + 4x - 8$ el sustraendo. ¿Cuál es el minuendo de la sustracción?

23. ¿Cuál es la expresión que sumada con $x^3 - x^2 + 5$ da como resultado $3x - 6$?

24. ¿Qué expresión algebraica se debe sumar a $a^3 - b^3$ para obtener $-8a^2 + 5a - 4b^3$?

25. En una sustracción el minuendo es $10x^3 - 4x + 5$ y la diferencia es $5x^3 + 2x - 1$, ¿cuál es el sustraendo?

26. *Sustrae $12a^{m-2} - 5a^{m-1} - a^m$ de $9a^{m-1} - 21a^{m-2} + 26a^{m-3} + 14a^m$

27. Identifica cuáles de las igualdades siguientes son verdaderas o falsas. Fundamenta cada caso.

a) $(4ab)^2 = 4a^2b$ b) $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ c) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

d) $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$ e) $a\frac{b+c}{d} = \frac{ab+c}{d}$ f) $m(a + b) + c = ma + mb + c$

28. Escribe en tu libreta la expresión algebraica que corresponda en el lugar donde se han colocado los signos de interrogación.

A	*B*	*A + B*	*A – B*
$3b - 4c - 5$	$-2b - 4c$	¿?	¿?
$x - 9y - 3$	¿?	$10x - 12y + 7$	¿?
¿?	$5c - 12d + 8$	¿?	$4c + 7d - 9$

29. Selecciona las respuestas correctas y explica tu razonamiento. ¿Cuáles de las expresiones algebraicas expresan el área del rectángulo central de la figura 2.20, que se muestra a continuación?

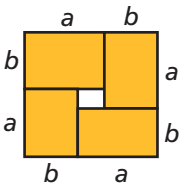


Fig. 2.20

a) $(a + b)(a - b)$ b) $(a - b) - 4ab$ c) $(a + b)^2 - 4ab$
d) $(a - b)^2$ e) $(a + b)^2 - (a - b)^2$

30. Calcula y reduce tanto como sea posible

a) $(a + 3)(a^2 - 5a + 1)$ b) $(2a + 3)(2a - 3)$
c) $(2 + a^2 - 2a - a^3)(a + 1)$ d) $(p^3 - 2)(p^{-1} + 2p - 1)$
e) $(6m+4)\left(m^2 - \frac{3}{4}m\right)$ f) $\left(5\sqrt{3}a+5\right)\left(a^2 - 2a + 1\right)$

31. ¿Qué valores debe tomar la variable para que valor numérico del producto de los polinomios dados sea cero?

a) $m(2m + 3)$ b) $(p + 1)(p - 2)$ c) $(a - 2)(a^2 - 2a + 4)$
d) $(b^2 + 1)^3$ e) $(s - 4)^4 (s^2 + 1)$ f) $(5a + 3)(a + 1)^2$

32. Transforma en suma los productos siguientes:

a) $(m - 1)^3$ b) $(b - 2)^3$ c) $(b + 3)^3$
d) $(5 + y)^3$ e) $\left(y + \sqrt{2}\right)^3$ f) $\left(p - \frac{1}{2}\right)^3$
g) $(b^2 + 1)^3$ h) $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^3$ i) $(x^{-1} - y^{-2})^3$

33. Formula una situación geométrica, donde se pueda utilizar la expresión algebraica $(x + 4)^3$

34. Calcula y reduce tanto como sea posible.

a) $(2z - 5)^3 - 2(z + 1) + 4z^3$
b) $(a - 1)^3 - (1 - a)(a + 1)$
c) $(x + 1)^3 - (2x^2 + 2)(x - 3)$

35. Halla el cociente de las divisiones siguientes:

a) $(x^2 + 6x - 11) : (x - 2)$ b) $(a^3 - 2a^2 + 3a - 5) : (a + 3)$
c) $(a^3 - 2a^2 - 5) : (a - 3)$ d) $(2x^3 - 2 - 4x) : (2 + 2x)$

36. El esquema de la figura 2.21 corresponde a la división de un polinomio $P(x)$ por un binomio de la forma $x - a$.

	5	6	0	3	4
–1		–5	–1	1	–4
	5	1	–1	4	0

Fig. 2.21

Analiza las proposiciones siguientes y selecciona cuáles de ellas se corresponden con la situación planteada.

a) El divisor es $x + 1$.
b) El cociente es $5x^3 + x^2 - x + 4$.

c) La división es exacta.
d) El dividendo es $5x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 4x$.
e) El dividendo se puede dividir por $x^2 - 1$.

37. Determina el cociente y el resto de la división de:

a) $x^3 - 5x^2 + 4x + 1$ por $x + 3$ b) $3x^3 - x + 5x^2 - 4$ por $x + 1$
c) $4x^3 + x - 8$ por $x - 5$ d) $x^4 - x + 5x^2 - 2$ por $x - 2$

38.* Al dividir el polinomio $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ por el binomio $(x + 3)$ se obtiene el cociente $Q(x)$. ¿Cuál es la expresión algebraica $Q(x)$ si al efectuar la división, el resto es cero?

39.* ¿Para qué valor de k el polinomio $x^3 - 2x - k$ es divisible por $x - 3$?

Descomposición factorial de polinomios

40. Transforma en producto las siguientes sumas.

a) $6a^2 - 18$ b) $12a^3 - 18a^2$ c) $64x^2 - 9y^2$
d) $5a(x - y) + 3y(x - y)$ e) $7x^3 - 343x$ f) $\frac{9}{16}a^2 - 0{,}0004$
g) $y^4 - y$ h) $(x + 1)^2 - 7$ i) $a^8 - b^4$

41. Descompón en factores primos:

a) $a^3 - a$ b) $c^3 - 4c$
c) $m^2 - 9m^4$ d) $\frac{1}{100} - x^6$
e) $x^2 - 19x + 60$ f) $x^4 - 5x^2 - 50$
g) $a^8 + 18a^4 + 81$ h) $4x^2 - 12x + 9$
i) $6x^4 + 5x^2 - 6$ j) $5x^6 + 4x^3 - 12$
k) $12x^2 - 7x - 12$ l) $(5x)^2 + 13(5x) + 42$
m) $(4x^2)^2 - 8(4x^2) - 105$ n) $(4x^2)^2 + 25(4x^2) + 136$

42. Transforma en producto las sumas siguientes:

a) $10a^3 - 20a^2 + 16a$ b) $5x^6 + 4x^3 - 12$ c) $3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$
d) $a^6 + 2a^3 - 80$ e) $\frac{16}{81}a^5 - 0{,}01a^3$ f) $16^m - \frac{y^{2n}}{49}$
g) $80m^7 - 5m^3$

43. Factoriza las expresiones algebraicas siguientes:

a) $a^2(a - b + 1) - b^2(a - b + 1)$ b) $8xy(m - n) + m - n$

c) $a^3 + a^2 + a + 1$ d) $a^{2n} - b^{2n}$
e) $n^2 + 6n + 9 - c^2$

44. Transforma los binomios siguientes de manera que contengan un cuadrado perfecto.

a) $x^2 + 8x$ b) $x^2 - 6x$ c) $x^2 + 3x$
d) $x^2 - \frac{x}{6}$ e) $4x^2 + 12x$ f) $x^2 - 2\sqrt{6}x$
g) x^2+10x h) $x^2 - \frac{x}{2}$ i) $9x^4 + 6x^2$
j) $16x^2 - 24x$ k) $100x^2 - 60x$ l) $x^2 - \frac{x}{10}$

45. Transforma cada trinomio de manera que contengan cuadrado perfecto.

a) $x^2 + 2x - 5$ b) $x^2 - 4x - 5$ c) $x^2 + 6x + 7$ d) $x^2 + x - 1$
e) $x^2 - 22x + 5$ f) $x^2 - 30x - 116$ g) $2x^2 + 8x + 6$ h) $3x^2 + 12x - 3$

46. Descompón en factores.

a) $x^3 - 1$ b) $a^6 + 8$ c) $\frac{a^3}{27} + b^3$
d) $m^{12} - 125$ e) $343p^3 + n^3$ f) $b^{15} - 1$
g) $27x^{18} + 1$ h)* $x^{6n} - y^{3n}$ i) $0{,}008 - a^6b^9$
j) $x^6 - 8y^{12}$ k)* $(2a - b)^3 - 27$ l)* $a^{6n+3} - b^{9n}$

47. Expresa las sumas que aparecen a continuación, como el producto de factores primos.

a) $ax + bx + ay + by$ b) $-bx + 2ax - 2ay + by$
c) $(x + 1)(x - 2) + 3y(x - 2)$ d) $(a + 1)(a + 3) - 4(a + 1)$
e) $1 - x + 2a(1 - x)$ f) $a(n + 1) - b(n + 1) - n - 1$

48. Factoriza los polinomios siguientes:

a) $x^3 + 4x^2 + x - 6$ b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$
c) $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$ d) $x^4 - 11x^2 - 18x - 8$
e) $a^3 - 4a^2 + 8a - 5$ f) $b^3 - 3b^2 + 4b - 4$
g) $c^3 + 4c^2 + c - 6$ h) $x^3 - 8 + 8x - 4x^2$
i) $a^3 - 3a^2 + 4$ j) $x^3 - 12x - 16$
k) $y^4 - 11y^3 + 18y - 8$ l) $m^4 - 4m^3 + 3m^2 - 4m + 12$
m) $10 - 5x^2 - 5x^3 + 23x + x^4$

49. Expresa como producto las sumas algebraicas siguientes:

a) $6ab + 2ac + 3b + c$ b) $4aq + 10bq - 2ap - 5bp$

c) $910ab - 70a^3b^3 - 39 + 3a^2b^2$ d) $15y + 5z + 2xz + 6xy$

e) $10dg + 5dh + 2ch + 4cg$ f) $3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$

g) $\sqrt{2}\,xy - \sqrt{2}yz - xz + z^2$ h) $4am^3 - 12amn - m^2 + 3n$

i)* $a^2 + 2ab + b^2 - x^2$ j) $(x^2 + x - 6) + (x^2 - 2x - 15)$

50.* El cuerpo que aparece en la figura 2.22 permite argumentar geométricamente la fórmula de factorización de dos cubos. Junto a otro de tus compañeros del aula analiza y escribe en tu libreta el porqué de esta afirmación. Muestra la explicación dada, a tu profesor.

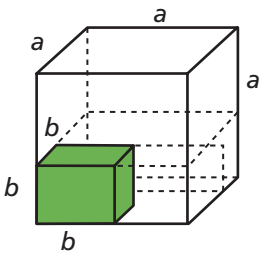


Fig. 2.22

2.2 Ecuaciones e inecuaciones lineales, modulares y cuadráticas

Durante miles de años las ecuaciones han permitido establecer relaciones entre cantidades matemáticas diversas, modelar patrones de procesos y situaciones de la vida cotidiana. Algunas de ellas resultan de dominio popular como la que modela el teorema de Pitágoras, clasificada como una de las ecuaciones que cambiaron al mundo[4], dados los avances en el desarrollo de la ciencia que propició su empleo.

Ecuaciones lineales y modulares

Ecuaciones lineales

Son numerosas las personas aficionadas a los pasatiempos matemáticos, sobre todo porque les resultan instructivos. A Marta, por ejemplo, le gustan los cuadrados mágicos (figura 2.23), pero no conocía aquellos en los que aparecen variables y ha solicitado ayuda, ¿puedes tú hacerlo?

$2x + 2$	x	$x + 1$
$x - 2$	$x + 2$	$5x - 6$
$3x - 3$	$2x + 1$	$x - 1$

Fig. 2.23

[4] Ian Stewart: *17 ecuaciones de cambiaron al mundo*, www.librosmaravillosos.com

Recuerda que...

El principio de los cuadrados mágicos es que la suma de las cantidades en cada fila, en cada columna y diagonalmente es la misma, y a ese resultado se le llama **número mágico**.

¿Qué conocimientos debe tener María para hallar el valor de x?

Si conoces el principio de los cuadrados mágicos no tardarás en igualar las sumas de dos filas, de dos columnas o de las dos diagonales:

$2x + 2 + x + x + 1 = x - 2 + x + 2 + 5x - 6$

Luego, para hallar el valor de la variable debemos resolver una ecuación lineal.

Recuerda que...

Una ecuación es una igualdad que contiene por lo menos una variable, que se denomina incógnita. Los valores de las variables que convierten la ecuación en una proposición verdadera son las soluciones de la ecuación. Estas soluciones se llaman también raíces de la ecuación.

De la historia

El uso de la incógnita x tiene su historia que se remonta a 1700 a.n.e.; cuando los árabes utilizaban el término "shay" que significaba "la cosa", para identificar lo desconocido. Al traducir esta palabra en España se escribió "xay" y poco a poco para abreviar su escritura, se fue remplazando por su letra inicial y se convirtió en el símbolo universal de la incógnita.

La ecuación planteada para resolver el problema del cuadrado mágico es lineal y tiene como solución $x = 3$.

Para verificar si el valor hallado es solución de la ecuación se realiza la comprobación:

MI: $2x + x + 2 + x + x + 1 = 2(3) + 2 + 3 + 3 + 1 = 15$

MD: $x - 2 + x + 2 + 5x - 6 = 3 - 2 + 3 + 2 + 5(3) - 6 = 15$

Como MI = MD, la solución es $x = 3$ y el número mágico que buscaba Marta es 15.

Aplica tus conocimientos

Construye el cuadrado mágico que tiene a 15 como número mágico.

De la historia

El matemático inglés Robert Recorde (figura 2.24) en el siglo XVI edita su obra principal *The Whetstone of Witte* y se hace famoso poque usa por primera vez el símbolo "=" para sustituir el "ae" de la igualdad que se usaba hasta entonces. Las ecuaciones que hasta ese momento se escribían con abreviaturas de palabras, pueden verse con dos líneas paralelas horizontales.

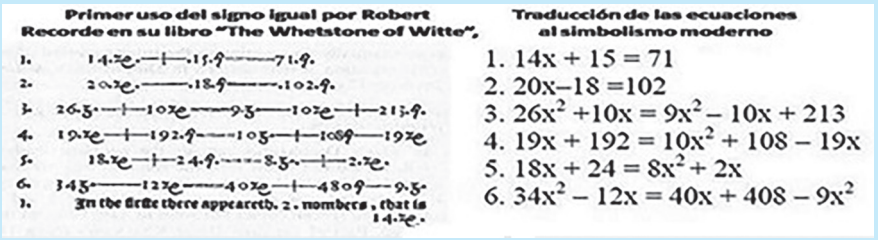
La palabra ecuación proviene del latín *aequatio* que significa nivelación, igualación, repartición igual.



Fig. 2.24

▲ ¿Conoces la diferencia que existe entre las ecuaciones de la antigüedad y las actuales?

Saber más



Primer uso del signo igual por Robert Recorde en su libro "The Whetstone of Witte",

1. 14.ae.—|—.15.q——71.q.
2. 20.ae.——.18.q——.102.q.
3. 26.c.—|—10ae——9.c——10ae—|—213.q.
4. 19.ae—|—192.q——10.c.—|—108q—19ae
5. 18.ae—|—24.q.——8.c.—|—2.ae.
6. 34.c——12ae——40ae—|—408q—9.c.
7. In the firſte there appeareth. 2. nombers, that is 14.ae.

Traducción de las ecuaciones al simbolismo moderno

1. $14x + 15 = 71$
2. $20x - 18 = 102$
3. $26x^2 + 10x = 9x^2 - 10x + 213$
4. $19x + 192 = 10x^2 + 108 - 19x$
5. $18x + 24 = 8x^2 + 2x$
6. $34x^2 - 12x = 40x + 408 - 9x^2$

Las ecuaciones se encuentran presentes no solo en los textos científicos, existen escritores que hacen referencia a estas en sus textos literarios.

Con seguridad conoces la mundialmente famosa y valiosa obra de Miguel de Cervantes y Saavedra "El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha" (figura 2.25). *Pues bien, en su capítulo treinta y tres, Cervantes por medio del personaje de Lotario expresa una valoración matemática, que dice así:*



Fig. 2.25

Les han de traer ejemplos palpables, fáciles, inteligibles, demostrativos, indubitables, con demostraciones matemáticas que no se pueden negar, como cuando dicen:

"Si de dos partes iguales quitamos partes iguales, las que quedan también son iguales; y, cuando esto no entiendan de palabras, como en efecto, no lo entienden, háseles[5] de mostrar con las manos."

Si leíste con detenimiento esta cita, por favor responde a las siguientes preguntas:

¿Cómo expresas esta afirmación utilizando variables?

¿A qué proceder matemático está asociada la cita y qué utilidad tiene? ¿Cómo la puedes ejemplificar?

Esta cita está muy relacionada con las transformaciones equivalentes que realizas al resolver una ecuación.

Recuerda que...

Las transformaciones equivalentes son aquellas operaciones que aplicamos a cada miembro de una ecuación (adición, sustracción, multiplicación y división), que no modifican el conjunto solución.

Teorema 2.2 (Tranformación equivalente en una ecuación)

Si a ambos miembros de una ecuación se les adiciona, sustrae, multiplica o divide por una expresión algebraica, la ecuación que se obtiene es equivalente a la anterior.

En el caso de la multiplicación o de la división la expresión algebraica debe ser diferente de cero.

Observa que:

Al multiplicar por una expresión algebraica ambos miembros de una ecuación, no siempre la ecuación que se obtiene es equivalente a la original

Por ejemplo:

Al multiplicar por x ambos miembros de la ecuación $\frac{4}{x}-3=x$ se obtiene la ecuación $4 - 3x = x^2$, que al transformarla resulta $x^2 + 3x - 4 = 0$ la que tiene como soluciones $x_1 = -4$ o $x_2 = 1$. Ambas son soluciones de la ecuación original por tanto $\frac{4}{x}-3=x$ y $x^2 + 3x - 4 = 0$ son ecuaciones equivalentes.

[5] Háseles, es una forma antigua de expresión, utilizada en España.

Sin embargo, si en la ecuación $\frac{x^2-6}{x-3}-6=\frac{x}{x-3}$ multiplicamos por $x-3$ ambos miembros se obtiene $x^2-6-6x+18=x$ que al transformarla resulta $x^2-7x+12=0$ cuyas soluciones son $x_1=4$ o $x_2=3$. La ecuación original admite la solución $x_1=4$, pero no la solución $x_2=3$ pues anula los denominadores; luego, las ecuaciones $\frac{x^2-6}{x-3}-6=\frac{x}{x-3}$ y $x^2-7x+12=0$ no son ecuaciones equivalentes dado que $x_2=3$ es una raíz extraña que se introduce al multiplicar por $x-3$.

Estos teoremas resultan muy útiles, porque permiten transponer de un miembro a otro utilizando la operación inversa.

En las ecuaciones puedes encontrar algunas operaciones indicadas en cualquiera de los miembros, estas se deben realizar generalmente antes de efectuar las transformaciones equivalentes.

Recuerda que...

Para resolver una ecuación lineal debes:

- Observar si existen operaciones indicadas, en caso de que existan realízarlas primero.
- Reducir los términos semejantes en cada miembro de la ecuación.
- Transponer los términos que contienen variables hacia un miembro y los términos independientes hacia el otro.
- Reducir nuevamente los términos semejantes si es necesario.
- Despejar la variable aplicando la operación inversa correspondiente.
- Hallar el valor de la variable.
- Comprobar en la ecuación original, para tener seguridad de la respuesta.
- Escribir la solución o el conjunto solución.

Ejemplo 2.19

Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación: $(x-2)^2=(3-x)^2+1$

Resolución:

Transformaciones	Sugerencias de procedimiento
$(x-2)^2=(3-x)^2+1$	En ambos miembros de la ecuación aparecen operaciones indicadas que debes realizar.
$x^2-4x+4=9-6x+x^2+1$	Para realizar estas operaciones puedes utilizar la igualdad $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

$x^2 - 4x + 4 = 10 - 6x + x^2$	Antes de transponer, es aconsejable que reduzcas los términos semejantes en cada miembro.
$-4x + 6x = 10 - 4$	Observa que x^2 aparece en los dos miembros de la ecuación por lo que al transponerlos se anulan.
$2x = 6$	Reduce nuevamente y halla el valor de la variable.
$x = 3$	Valor de la incógnita o raíz de la ecuación.
Comprobación:	Para realizar la comprobación siempre debes utilizar la ecuación original.
$(x - 2)^2 = (3 - x)^2 + 1$ MI: $(x - 2)^2 = (3 - 2)^2$ $= (1)^2 = 1$ MD: $(3 - x)^2 + 1 = (3 - 3)^2 + 1$	Observa que en ambos miembros se obtiene el mismo resultado, por tanto, el valor de la variable hallado es una solución de la ecuación.
$0 + 1 = 1$ $S = \{3\}$	El conjunto solución, que en este caso es el conjunto unitario, está compuesto por todas las soluciones de la ecuación. ♦

En la resolución de ecuaciones es necesario analizar el dominio de la variable, bien sea por la estructura algebraica que tiene la ecuación o por la situación en que está involucrada.

Ejemplo 2.20

a) Expresar una fórmula para calcular el perímetro P de un rectángulo de lados a y b.
b) Despejar la variable a que permite calcular la longitud del lado a del rectángulo.

Resolución:

a) $P = 2(a + b)$	Esta fórmula es una ecuación, en la que, por su estructura, las variables a y b pueden tomar cualquier valor real, pero de acuerdo con la situación planteada el dominio de estas es otro, porque deben tomar valores positivos y no pueden ser mayores que el perímetro P: $0 < a < P$ y $0 < b < P$.

b) $P = 2(a + b)$ Para despejar la variable "a"

$\frac{P}{2} = a + b$ se dividen ambos miembros por 2

se sustrae en ambos miembros b

$a = \frac{P}{2} - b$ Dicho en otras palabras, al transponer se aplican las operaciones inversas ♦

Las ecuaciones, en general son utilizadas como modelos matemáticos para expresar relaciones que forman parte de estudios científicos.

Ejemplo 2.21



Fig. 2.26

El biólogo A. E. Dolber en 1898 comprobó que se puede determinar la temperatura ambiente con el chirrido de los grillos (figura 2.26) en el campo, y publicó un trabajo en el que utiliza la fórmula $T = 50 + \frac{x - 40}{4}$, en la que x representa el número de chirridos consecutivos y T la temperatura en grados Fahrenheit. ¿Qué valores puede tomar la variable x de acuerdo con la situación planteada?

Resolución:

Por la posición que ocupa la variable en la ecuación puede tomar cualquier valor real, pero por lo que representa solo tiene sentido para valores enteros positivos o lo que es lo mismo, para todo número natural diferente de cero, es decir $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. ♦

Reflexiona

¿Toda ecuación es una fórmula o toda fórmula es una ecuación?

De la historia

En Grecia en el siglo III de nuestra era, el matemático Diofanto de Alejandría (figura 2.27) escribió la obra *Aritmética*, trabajó en la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas y utilizó la palabra *arithmos*, que significa número, para representar la incógnita.



Fig. 2.27

Una aplicación interesante de las ecuaciones lineales es la que se utiliza en la farmacología o la química en la preparación de mezclas y disoluciones.

Ejemplo 2.22

¿Cuántos litros de una solución de alcohol al 90 %, hay que añadirle a 15 L de una solución al 20 % para obtener una solución nueva al 50 %?

Resolución:

Para resolver este problema es recomendable interpretar los datos en una tabla como la siguiente:

Soluciones	Cantidad de alcohol (L)	Cantidad de alcohol que aporta (L)
Solución al 90 %	x	$0{,}9x$
Solución al 20 %	15	$0{,}2 \cdot 15 = 3$
Solución al 50 %	$x + 15$	$0{,}5\,(x + 15)$

La suma de la cantidad de alcohol que aporta cada porción, tomada de las soluciones que se deben mezclar, será la cantidad de alcohol de la nueva solución. Esta relación se representa por la ecuación $0{,}9x + 3 = 0{,}5\,(x + 15)$

$0{,}9x + 3 = 0{,}5\,(x + 15)$
$0{,}9x + 3 = 0{,}5x + 7{,}5$
$0{,}9x - 0{,}5x = 7{,}5 - 3$
$x = 11{,}25$

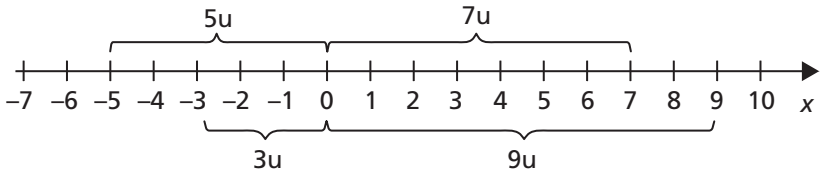
Respuesta: Se deben añadir 11,25 L de solución al 50 %. ♦

Ecuaciones modulares

El concepto de módulo o valor absoluto y su significado geométrico (figura 2.28) es conocido por ti, luego recordarás que $|a| = c$ representa que la distancia de a hasta cero en la recta numérica, es c.

▲ ¿Cuál es el significado geométrico de la ecuación $|ax + b| = c$?

Ecuaciones como la citada en la interrogante, que contienen la variable dentro del signo de módulo, se definen como **ecuaciones modulares**. En estas ecuaciones es posible determinar la solución gráfica y analítica.



$|-5| = 5$ $|-3| = 3$ $|0| = 0$ $|7| = 7$ $|9| = 9$

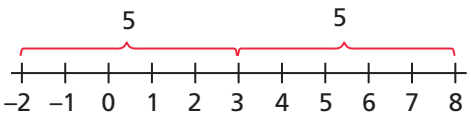
Fig. 2.28

Ejemplo 2.23

Resolver gráficamente la ecuación $|x - 3| = 5$ y escribir analíticamente el conjunto solución de la ecuación.

$|x - 3|$ Geométricamente $|x - 3|$ significa la distancia entre x y 3.

$|x - 3| = 5$ en $|x - 3| = 5$, x es un número cuya distancia desde 3, es 5.



De la representación gráfica se puede concluir que

$x_1 = -2$ y $x_2 = 8$

$S = \{-2;8\}$ Es el conjunto solución.

Analíticamente una ecuación modular se resuelve aplicando la interpretación geométrica de módulo dada por la definición.

Ejemplo 2.24

Hallar el conjunto solución de las ecuaciones siguientes:

a) $|x - 1| = 2$ b) $|2x - 5| - 12 = 0$

Resolución:

a) $|x - 1| = 2$

$x - 1 = 2$ o $-(x - 1) = 2$ Aplicando la definición de módulo de un número real.

$-x + 1 = 2$ Eliminando paréntesis en la segunda ecuación.

$x = 3$ $x = -1$ Despejando x en ambas ecuaciones.

Comprobación para $x_1 = 3$ — Realizando la comprobación para los valores de x encontrados.

MI :$|x - 1| = |3 - 1| = |2| = 2$
MD: 2
MI = MD

Comprobación para $x_2 = -1$

MI :$||x - 1| = |-1 - 1| = |-2| = 2$ — Como ambos miembros son iguales, los valores encontrados satisfacen la ecuación.
MD: 2
MI = MD
$S = \{-1; 3\}$ — Escribir el conjunto solución.

b) $|2x - 5| - 12 = 0$

$|2x - 5| = 12$ — Transponiendo el 12 al segundo miembro.

$2x - 5 = 12$ — Aplicando la definición de módulo.

$2x = 17$ — Resolviendo la ecuación.

$$x = \frac{17}{2}$$

o

$-(2x - 5) = 12$ — Aplicando la definición de módulo.

$2x - 5 = -12$ — Multiplicando ambos miembros por (–1).

$2x = -12 + 5$ — Transponiendo el –5 al segundo miembro.

$2x = -7$ — Resolviendo la ecuación.

$$x = -\frac{7}{2}$$

Comprobación para $x_1 = \frac{17}{2}$

MI: $\left|2 \cdot \frac{17}{2} - 5\right| - 12 = |17 - 5| - 12 = 0$
MI:$12 - 12 = 0$
MD = 0
MI = MD

Comprobación para $x_2 = -\frac{7}{2}$

MI : $\left|2\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)-5\right|-12=|-7-5|-12$ Como ambos miembros son iguales, los valores encontrados satisfacen la ecuación.

MI: |–12|-12=0

MD = 0

MI = MD

$S=\left\{-\frac{7}{2};\frac{17}{2}\right\}$ Escribir el conjunto solución.

Generalmente, para determinar la solución de una ecuación modular se emplea el método analítico.

Ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas fueron utilizadas desde la antigüedad para resolver problemas algebraicos enunciados en sus inicios, en versos o en prosa, uno de ellos es el problema indio enunciado en prosa, que emplea en su procedimiento de solución, una ecuación cuadrática, problema recogido de los manuales matemáticos de la India titulado *El enjambre de abejas*[6], que te propongo resolver.

Un grupo de abejas cuyo número era igual a la raíz cuadrada de la mitad de todo su enjambre; se posó sobre un jazmín, habiendo dejado muy atrás a $\frac{8}{9}$ *del enjambre; solo una abeja del mismo enjambre revoloteaba en torno a un loto, atraída por el zumbido de una de sus amigas que cayó imprudentemente en la trampa de la florecita, de dulce fragancia. ¿Cuántas abejas formaban el enjambre?*

La solución de las ecuaciones cuadráticas puede obtenerse por descomposición factorial o mediante la fórmula general.

Recuerda que...

Una ecuación cuadrática en una variable real es la que tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$ *(a, b, c* números reales y $a \neq 0$) o se puede reducir a ella mediante transformaciones equivalentes.

Las soluciones de una ecuación cuadrática dependen del valor del discriminante $D = b^2 - 4ac$.

[6] Y. Perelman: *Álgebra recreativa.*

En este caso:

Si $D > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes.
Si $D = 0$ tiene una sola solución real.
Si $D < 0$ no tiene soluciones reales.
Para determinar las soluciones, cuando existen, se utiliza la fórmula

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \; a \neq 0$$

¿Sabías que...?



Fig. 2.30

Un delfín practicando saltos alcanzó su récord (figura 2.29) que puede calcularse por medio de la fórmula $h = 8t - 2t^2$, donde t es el tiempo y h la altura alcanzada.

Ejemplo 2.25

Hallar el conjunto solución de las ecuaciones siguientes:

a) $2x^2 - x - 1 = 0$ b) $(4x^2 - 3)^2 + (2x + 6)^2 = 125$
c) $x^2 - 1 = 2x$ d) $-x^2 = x + 4$

Resolución:

a) $2x^2 - x - 1 = 0$
$(2x + 1)(x - 1) = 0$
$2x + 1 = 0$ o $x - 1 = 0$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \text{ o } x_2 = 1$$

$$S = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$$

b) $(4x - 3)^2 + (2x + 6)^2 = 125$

$16x^2 - 24x + 9 + 4x^2 + 24x + 36 = 125$

$20x^2 - 80 = 0$

La resolución de una ecuación cuadrática mediante la descomposición factorial se basa en la siguiente propiedad de los números reales:

$a \cdot b = 0$ si y solo si $a = 0$ o $b = 0$

Por tanto para aplicar el procedimiento de resolución hay que igualar a cero la ecuación.

Procedimiento

- Desarrollar los binomios al cuadrado.
- Reducir términos semejantes e igualar a cero la ecuación.

$x^2 - 4 = 0$

- Dividir por 20 ambos miembros para simplificar la ecuación

$(x - 2)(x + 2) = 0$

- Descomponer en factores el miembro izquierdo.

$x - 2 = 0$ o $x + 2 = 0$

- Igualar a cero cada factor y hallar el valor de la variable.

$x_1 = 2$ o $x_2 = -2$

- Despejar la variable en cada ecuación

$S = \{-2; 2\}$

- Escribir el conjunto solución

c) $x^2 - 1 = 2x$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$a = 1$, $b = -2$ y $c = -1$

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-1) = 8 > 0$

$\sqrt{D} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2 \cdot 1{,}41 = 2{,}82$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \approx \frac{2 + 2{,}82}{2} = 2{,}41$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \approx \frac{2 - 2{,}82}{2} = -0{,}41$$

$S = \{-0{,}41; 2{,}41\}$

En este caso es recomendable aplicar la fórmula general porque la descomposición factorial no resulta tan simple.

d) $-x^2 = x + 4$

$x^2 + x + 4 = 0$

$a = 1$, $b = 1$ y $c = 4$

$D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(4) = -15$

Como, $D < 0$ entonces la ecuación no tiene soluciones reales y por tanto $S = \varnothing$

Se trata de un caso en el que el cálculo del discriminante es indispensable, porque se infiere inmediatamente que el conjunto solución es vacío. ♦

Ejemplo 2.26

Hallar todos los valores reales de la variable x para los cuales se satisface la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Resolución:

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
$(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0$
$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$
$x^2 - 1 = 0$ o $x^2 - 4 = 0$
$(x + 1)(x - 1) = 0$; $(x + 2)(x - 2) = 0$
$x = -1$ o $x = 1$; $x - 2$ o $x = 2$

La ecuación se satisface para:

$x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$; $x_4 = 2$ ♦

Las ecuaciones que se pueden representar mediante la forma $a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$ se denominan **bicuadráticas**. Se resuelven de manera análoga a las cuadráticas, pero el conjunto solución puede ser vacío, de dos elementos y de cuatro elementos.

¿? ¿Sabías que...?

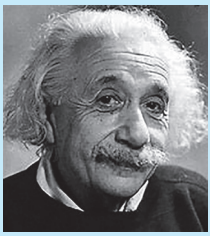


Fig. 2.30

Albert Einstein (figura 2.30) mediante su ecuación universal brinda un mensaje de la importancia del amor entre los seres humanos.

Decía Einstein: Para dar visibilidad al amor, he hecho una simple sustitución en mi ecuación más célebre. Si en lugar de $E = mc^2$ aceptamos que la energía para sanar el mundo puede obtenerse por medio del amor multiplicado por la velocidad de la luz al cuadrado, llegaremos a la conclusión de que el amor es la fuerza más poderosa que existe, porque no tiene límites. ...Si queremos que nuestra especie sobreviva, si queremos salvar el mundo y cada ser sintiense que en él habita, el amor es la única y la última respuesta... cada individuo lleva en su interior un pequeño, pero poderoso generador de amor cuya energía espera ser liberada. (Fragmento de la última carta a su hija)

El asistente matemático GeoGebra te permite conocer el conjunto solución de una ecuación.

▲ ¿Cómo hacerlo?

1. Abre "Cálculo simbólico (CAS)" como muestra la figura 2.31.

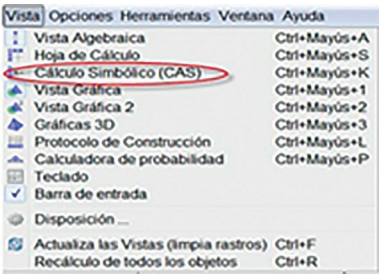


Fig. 2.31

2. Da entrada a la ecuación, ejecuta la herramienta "Resuelve" y de esta forma obtendrás las soluciones (figura 2.32).

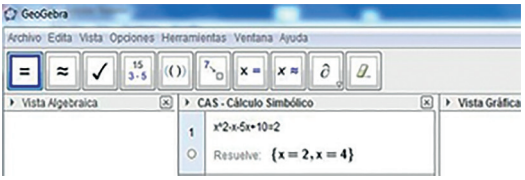


Fig. 2.32

Ejemplos de problemas que pueden ser resueltos mediante ecuaciones

Un grupo de egresados de la carrera de Matemática acordaron reunirse para celebrar los cinco años de graduados. En el restaurante seleccionado el costo individual del buffet es $ 500.00 pero como dos de ellos cumplen año ese día, los restantes deciden asumir sus gastos, por lo que ahora cada uno debe pagar $ 100.00 más.

¿Cuántos jóvenes integran el grupo? ¿A cuánto equivale el gasto total?

Una situación como esta puede constituir un problema, en el cual se deben utilizar las ecuaciones para resolverlo, pero antes debes tener en cuenta algunas acciones generales.

1. Realizar una lectura completa del texto de manera que comprendas la situación que se plantea.
2. Determinar los datos que se dan y qué es lo que se debe hallar.
3. Buscar las relaciones entre los datos que se ofrecen en el problema y qué relación tienen estos con los elementos que se deben determinar.
4. Declarar, si es necesario, las variables para representar las incógnitas que se deben hallar.
5. Plantear un modelo matemático que permita resolver el problema (una ecuación, un sistema de ecuaciones o un procedimiento aritmético).
6. Resolver y comprobar si las soluciones satisfacen la situación descrita en el texto.

En el caso del problema planteado podemos realizar un análisis mediante las interrogantes siguientes:

¿Cuántos jóvenes conforman el grupo?

¿Cuál es el costo total del buffet?

¿Cuántos de los que conforman el grupo van a pagar? ¿Se modifica la cantidad que se debe pagar?

Las respuestas a estas preguntas te ayudarán a conformar la vía de solución que vas a utilizar.

Cantidad de jóvenes que tiene el grupo: x

Cantidad de jóvenes que van a asumir los gastos: $x - 2$

Como el costo total no varía se obtiene la ecuación $600(x - 2) = 500x$

$$600x - 1\,200 = 500x$$
$$100x = 1\,200$$
$$x = 12;$$
$$12 \cdot 500 = 6\,000$$

Comprobación:

Como son doce jóvenes pagando $ 500.00 cada uno, el costo es de $ 6 000.00, si fueron solo 10 y pagan $ 600.00 se obtiene el mismo costo.

Respuesta:

El grupo está integrado por 12 jóvenes y debe pagar $ 6 000.00 en total.

Ejemplo 2.27

A un parque que tiene 400 m de largo y 320 m de ancho se le quiere duplicar su área, conservando su forma rectangular, como muestra la figura 2.33. Para lograr lo que se desea, se le añaden al terreno dos franjas de igual ancho a dos lados consecutivos. Hallar el ancho de cada franja.

Resolución:

En este caso es recomendable ilustrar esta situación gráficamente

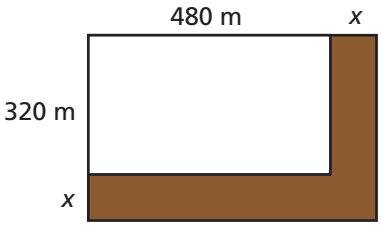


Fig. 2.33

Ancho de las franjas: x

Área del parque sin ampliar:

$A = 480 \cdot 320\ m^2 = 153\,600\ m^2$

Área del parque después de ser ampliado:

$$(x + 480)(x + 320) = 2 \cdot 153\,600$$
$$x^2 + 800x + 153\,600 = 2 \cdot 153\,600$$
$$x^2 + 800x - 153\,600 = 0$$

Ahora, mediante el GeoGebra se obtienen las soluciones de la ecuación (figura 2.34).

Como la longitud es una magnitud positiva el valor que satisface el problema es $x = 160$, por tanto el ancho de la franja es 160 m. ♦

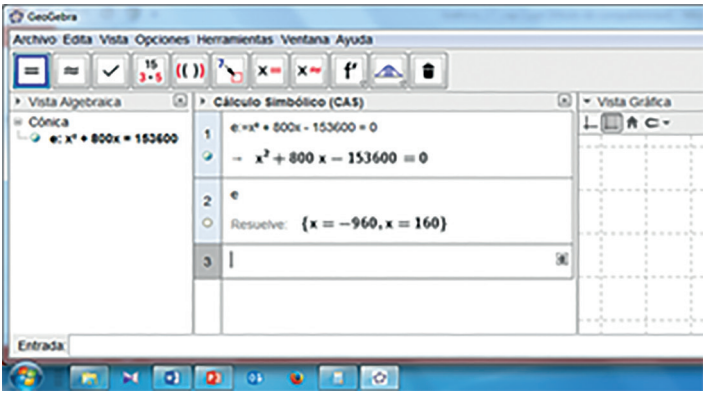


Fig. 2.34

El discriminante de una ecuación cuadrática permite determinar el número de soluciones reales que tiene, las cuales se pueden hallar utilizando la fórmula general, pero, ¿cómo determinar, sin sustituir en la ecuación, si los valores hallados son realmente las soluciones de la ecuación?

Retomemos el problema del enjambre de abejas.

Si x representa el número de abejas del enjambre, la ecuación que se obtiene es:

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+\frac{8}{9}x+2=x$$

Como puedes observar la ecuación que modela la situación no es una ecuación cuadrática ya que no es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, pero se puede transformar a esta forma introduciendo una variable auxiliar para simplificar el cálculo. Para ello, se puede hacer $y=\sqrt{\frac{x}{2}}$. Para eliminar la raiz se pueden elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad, por ser la potenciación su operación inversa, luego:

$(y)^2=\sqrt{\frac{x}{2}}^2$ sustituyendo en la ecuación original, se tiene: $y+\frac{8}{9}\cdot 2y^2+2=2y^2$ al multiplicar la ecuación por 9 y reducir términos semejantes se obtiene: $2y^2 – 9y – 18 = 0$

Al resolver la ecuación las raíces son: $y_1 = 6$; $y_2 = -\frac{3}{2}$, y por tanto los valores de $x_1 = 72$ y $x_2 = 4{,}5$, pero el número de abejas que es lo que se busca debe ser un valor entero y positivo, por lo que se desecha $x_2 = 4{,}5$, y solo es válido $x_1 = 72$. Es decir, son 72 abejas, al comprobar según el texto del problema, 72 cumple las relaciones expresadas.

Respuesta: formaban el enjambre 72 abejas.

Analiza detenidamente el siguiente teorema:

Teorema 2.2 (Teorema de Vieta sobre las raíces)

Los números x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ si y solo si se cumple: $x_1 + x_2 = -p$ y $x_1 \cdot x_2 = q$

Demostración:

Sean x_1 y x_2 las soluciones de la ecuación $x^2 + px + q = 0$, entonces

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D},$$

Y $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}$ y el discriminante es $D = \frac{P^2}{4} - q$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} - \frac{p}{2} - \sqrt{D} = -2\frac{p}{2} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right) = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2$$

$$= \frac{p^2}{4} - D = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q$$

Luego se cumple que $x_1 + x_2 = -p$ y $x_1 \cdot x_2 = q$ ♦

¡Atención!

Si la ecuación tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, para aplicar el teorema de Vieta sobre las raíces es necesario dividir ambos miembros por el primer coeficiente, en este caso se obtiene que $p = \frac{b}{a}$ y $q = \frac{c}{a}$.

Ejemplo 2.28

1. Hallar una ecuación de segundo grado cuyas raíces son:

a) $x_1 = -5$ y $x_2 = 3$

$x_1 + x_2 = -5 + 3 = -2 = -p$

$x_1 \cdot x_2 = (-5)(3) = -15 = q$

Ecuación: $x^2 + 2x - 15 = 0$

b) $x_1 = 2$ y $x_2 = -\frac{3}{4}$

$x_1 + x_2 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = -p$

$x_1 \cdot x_2 = (2)\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2} = q$

Ecuación: $x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{3}{2} = 0$

Ahora multiplicando por 4 ambos miembros se obtiene $4x^2 - 5x - 6 = 0$ ♦

2. Halla el valor de k en la ecuación $x^2 + kx - 4 = 0$ si una de sus raíces es $x_1 = -1$ y escribe la ecuación.

Resolución:

Este ejemplo se puede resolver por diferentes vías, pero en este caso aplicaremos el teorema de Vieta en una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + px + q = 0$.

Sean $x_1 = -1$ y x_2 las raíces de la ecuación $x^2 + kx - 4 = 0$

$x_1 \cdot x_2 = -4 \cdot x_2$ $\qquad$ $x_1 + x_2 = -k$

$-1 \cdot x_2 = -4$ $\qquad$ $-1 + 4 = -k$

$x_2 = 4$ $\qquad$ $k = -3$

El valor de k es -3 y la ecuación: $x^2 - 3x - 4 = 0$ ♦

Ecuaciones racionales enteras en una variable con grado mayor que dos

Las ecuaciones algebraicas en una variable real son aquellas en que se realizan con la variable operaciones racionales de adición, sustracción, multiplicación, potenciación y división (se excluye la posibilidad de que el divisor sea cero). Son operaciones llamadas racionales.

Dentro de las ecuaciones algebraicas se diferencian las ecuaciones racionales enteras, que reciben este nombre porque con la variable solo se realizan las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y potenciación con exponente natural.

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ con $a_n \neq 0$

$n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ ($i = 1; 2; 3; \ldots n$) donde n es el grado de la ecuación.

Las ecuaciones lineales y cuadráticas son casos particulares de ecuaciones racionales enteras.

De la historia

El matemático italiano Ludovico Ferrari (1522-1565) (figura 2.35) es valorado como uno de los mejores exponentes del renacimiento. Fue el primero en encontrar una fórmula para resolver una ecuación de cuarto grado de la forma:

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

Fuente: *Ecuaciones y matemáticos* de Luis J. Davidson San Juan



Fig. 2.35

Para la resolución de ecuaciones de grado superior al tercero aplicarás en lo adelante lo que estudiaste sobre la descomposición en factores y la divisón de un polinomio por un binomio, en particular el método o regla de Ruffini.

Ejemplo 2.29

Resolver la ecuación: $x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 24x - 32 = 0$

Para resolver la ecuación vas aplicar el método de Ruffini (ejemplo 2.26) del cual se obtiene la ecuación $(x-2)^2(x+2)(x-4) = 0$

Luego son raíces de la ecuación: $x_{1,2} = 2$, $x_3 = -2$ y $x_4 = 4$

¿Sabías que...?

El matemático chino Chin Kiu Shao pudo determinar que $x = 840$ es raíz de la ecuación: $763x^2 - x^4 - 40\,642\,569 = 0$

Chin obtiene un valor exacto realizando cómputos en el orden de los billones y teniendo en cuenta que los símbolos matemáticos de la numeración china eran varillas de bambú; lógicamente en esa época no exitían dispositivos de cálculo excepto el *asua phan* (ábaco).

La resolución de ecuaciones racionales ayuda a perfeccionar la técnica de cálculo, por ejemplo, fue posible determinar el valor de π con un gran número de cifras decimales y otros tipos de situaciones.

Retomaremos la problemática planteada en el subepígrafe Descomposición factorial de polinomios, que se refiere al modelo matemático que se emplea para el estudio ecológico de un supuesto ecosistema, se emplean algoritmos matemáticos y se obtiene la ecuación en la que es necesario determinar el valor de variable *P* (cantidad de población de una especie).

$$9P - 27P^2 + 26P^3 - 9P^2 + 27P^3 - 27P^4 = \frac{2}{3}$$

Para conocer el valor de *P* se resuelve la ecuación de grado cuatro siguiente:

Se reducen términos semejantes.

$$-27P^4 + 54P^3 - 36P^2 + 9P - \frac{2}{3} = 0$$

Se multiplica la ecuación por tres, para eliminar el denominador.

$$-81P^4 + 162P^3 - 108P^2 + 27P - 2 = 0$$

Se aplica al método de Ruffini para factorizar el polinomio.

$$\left(P - \frac{1}{3}\right)\left(P - \frac{2}{3}\right)\left(P - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(P - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

De las soluciones encontradas se escogen las soluciones positivas menores que uno, porque según los especialistas, los valores entre cero y uno garantizan y posibilitan la sobrevivencia de la especie.

Luego son soluciones:

$\frac{1}{3}; \frac{2}{3}$ y $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

De ellas $\frac{2}{3}$ es un valor especial porque muestra mayor estabilidad en el tiempo.

Aplica tus conocimientos

¿Cuál es la ecuación que tiene como raíces $x_1 = -2$; $x_2 = -1$ *y* $x_3 = 3$ *?*

Investiga y aprende

En el libro *Ecuaciones y Matemáticos* de Luis J. Davidson San Juan (figura 2. 36), se proponen algunos problemas relacionados con la resolución de ecuaciones polinómicas.



Fig. 2.36

I. Utiliza los medios de información que consideres necesarios o visita la biblioteca y expresa brevemente qué representó el autor de este libro, para la Matemática en Cuba (destaca sus principales aportes).

II. Solicita en la biblioteca de tu escuela u otro sitio, el libro antes mencionado y:

a) Resume por escrito tres de los aspectos tratados en el libro que más te hayan llamado la atención sobre el desarrollo la Matemática que brinda el Capítulo 3, enmarca la época.

b) Lee con cuidado y fundamenta si consideras posible o no, que el matemático italiano Girolamo Cardano podía resolver en aquellos momentos el problema que le planteó el matemático D. Colla. Fundamenta tu respuesta.

c) Encuentra la solución al problema propuesto por Tartaglia a Ferrari, que aparece en el Capítulo 6.

Inecuaciones

Inecuaciones lineales. Representación gráfica

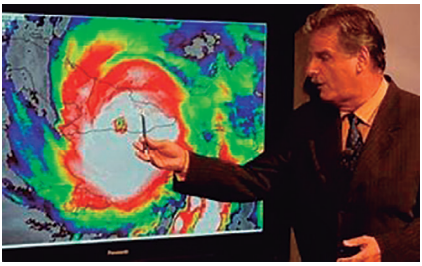


Fig. 2.37

Para comprender y explicar los fenómenos que ocurren en la naturaleza, y en la sociedad en general, se requiere de mediciones y comparaciones entre cantidades y magnitudes. Así, el hombre ha construido diferentes tipos de escalas para medir la temperatura, la fuerza del viento o la intensidad de un terremoto, entre otras. Por ejemplo, existen escalas como la de Beaufort (almirante de la marina francesa) que a partir de la observación clasificó distintos grados de fuerza del viento, es decir, los efectos que el viento puede producir en virtud de la velocidad.

La tabla que aparece a continuación brinda cierta información, obtenida a partir del conocimiento de las desigualdades, y que se pueden asociar con los partes meteorológicos que nos ofrecen nuestros especialistas.

Fuerza y nombre	Velocidad (m/s)	Velocidad (km/h)	Efectos
Calma	$v < 0,45$	$v < 1,62$	El mar se ve como un espejo.
Huracanado	$28,40 < v < 32,40$	$102,2 < v < 368,0$	Graves estragos. Daños en todas partes, frecuente en la temporada ciclónica.
Huracán	$v > 32,40$	$v > 368,0$	Tempestad con daños catastróficos, como en los huracanes tropicales.

En grados anteriores estudiaste las desigualdades para comparar dos números, por ejemplo $-40 < 90$, la cual se lee como –40 es menor que 90. Otro ejemplo de desigualdad también lo es $-10 < -8 < 7$, en este caso se dice que –8 es mayor que –10 y menor que 7.

¿Qué diferencia existe entre estas desigualdades y las que aparecen en la tabla anterior?

Como puedes apreciar, en la tabla aparece la variable *v*, que representa la velocidad del viento, *¿cuántos valores reales puede tomar la variable v en cada uno de los casos?*

Definición 2.3

Una inecuación es una desigualdad en la que aparece al menos una variable.

Son ejemplos de inecuaciones:

a) $2x-3 \leq 5x+1$ b) $(x+4)^2 < 3x^2-7$

c) $3x-y > 9y+2$ d) $\frac{6x}{x+1} \geq 1-2x$

Resolver una inecuación significa determinar el conjunto de valores reales que la satisfacen; todos esos valores reales conforman el conjunto solución.

¿Sabías que...?

Estos símbolos (figura 2.38) se deben al inglés William Oughtrid (1574-1660). Utilizando esta forma, los matemáticos en el siglo XVI y parte del XVII expresaban la relación mayor y menor, posteriormente el matemático inglés Tomas Harrit (1560-1621), a finales del siglo XVII, introduce el empleo de los signos > (mayor que) y < (menor que) y que el francés Pierre Bouguer (1698-1758) comienza a emplear desigualdades no estrictas utilizando los signos, comienza el empleo de ≥ (mayor e igual que) y ≤ (menor e igual que).

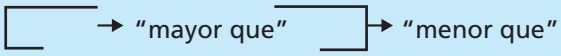


Fig. 2.38

Ejemplo 2.30

Expresar en el lenguaje algebraico los conjuntos de números reales representados gráficamente (figura 2.39).

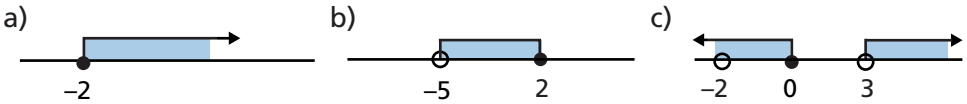


Fig. 2.39

Resolución:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\}$
$A = [-2; \infty]$

b) $B = \{x \in \mathbb{R}: -5 < x \leq 2]$
$B = (-5; 2]$

c) $C = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 0 \text{ o } x > 3; x \neq -2\}$
$C = (-\infty;0] \cup (3;\infty) \setminus \{-2\}$
$C = (-\infty;-2) \cup (-2;0] \cup (3;\infty)$

Para responder este ejemplo es necesario recordar que:

- En la representación gráfica el círculo con relleno indica que el elemento pertenece al conjunto y si no pertenece se utiliza un círculo sin relleno.
- En la representación conjuntista, para indicar si el elemento pertenece se utiliza el corchete y si no pertenece, el paréntesis. ♦

Propiedades de las inecuaciones

▲ ¿Te ha sucedido alguna vez, que al subir la escalera los peldaños son incómodos? ¿Sabes por qué?

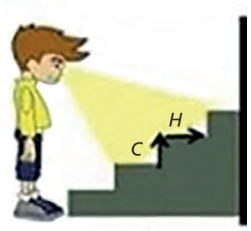


Fig. 2.40

Resulta que en los planos de una vivienda, para qué la escalera sea cómoda debe cumplir que: si se mide en centímetros en cada peldaño el lugar donde se apoya el pie llamado huella (H) *y la altura del peldaño* (C) *(figura 2.40), debe cumplirse que la suma de las longitudes de dos veces la altura del escalón y una de la huella*[7] *debe estar entre los sesenta y los sesenta y cinco centímetros, luego, si transitas por una escalera de un edificio, singular o antiguo, y notas incomodidad al subir es porque no han cumplido con esta relación matemática.*

¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta relación?

Para dar solución a la situación planteada lo primero que debes hacer es expresar en lenguaje algebraico la relación, que, de acuerdo con esta norma para la construcción de escalera, indica el problema. En este caso la expresión algebraica es $60 \leq 2C + H \leq 65$.

▲ Si se fija un valor para la huella ¿cómo determinas el valor de la altura? y si te dan la altura, ¿cuál debe ser la longitud de la huella?

[7] Fernando Corbalán: *Las matemáticas en nuestra vida cotidiana.*

Recuerda que...

Propiedades de las desigualdades:

Para todos los números reales a, b, c se cumple:

Si $a < b$ y $b < c$ entonces, $a < c$
Si $a < b$ entonces, $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$
Si $a < b$ y $c > 0$ entonces, $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
Si $a < b$ y $c < 0$ entonces, $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Reflexiona

¿Cómo se expresa la propiedad de monotonía si la relación es $a > b$?

Estas propiedades te permiten determinar el conjunto solución de una inecuación, pero debes conocer el procedimiento para resolver una inecuación lineal como te mostramos a continuación:

- Efectúa las operaciones indicadas en cada miembro de la inecuación si existen.
- Reduce los términos semejantes en cada miembro.
- Transpone todos los términos que contienen a la variable para un mismo miembro y los números para otro.
- Despeja la variable.
- Escribe el conjunto solución.

Si se divide o se multiplica ambos miembros de la inecuación por un número negativo, cambia el sentido de la desigualdad.

Dos **inecuaciones** son **equivalentes** si tienen el mismo dominio de definición y las mismas soluciones.

Ejemplo 2.31

Hallar el conjunto solución de una inecuación lineal con una variable

a) $2x+1<4$ b) $(x+1)^2-4(x-4)\geq(x+5)(x-5)$

Resolución:

Como no existe ninguna operación indicada, solamente debes despejar la variable.

a) $2x+1<4$

$2x<4-1$

$2x<3$

$x<\frac{3}{2}$

$S=\left\{x\in\mathbb{R}:x<\frac{3}{2}\right\}$

El conjunto solución de esta inecuación es $S=\left\{x\in\mathbb{R}:x<\frac{3}{2}\right\}$, el cual se puede representar utilizando una vista gráfica del GeoGebra.

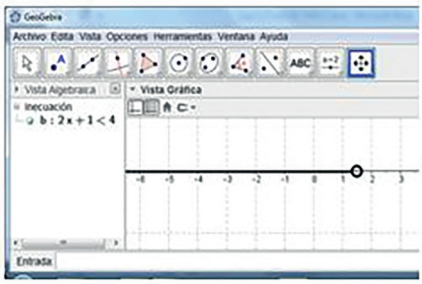


Fig. 2.41

Procedimiento

1) Escribir la inecuación en la barra de entrada.
2) Ejecutar Enter.
3) Ocultar el eje de las ordenadas.

b) $(x+1)^2-4(x-4)\geq(x+5)(x-5)$

$x^2+2x+1-4x+16\geq x^2-25$

$x^2-2x+17\geq x^2-25$

$x^2-2x-x^2\geq-17-25$

$-2x\geq-42$

$x\leq 21$ ♦

Para ello, una vez reducidos los términos semejantes debes dividir por un número negativo, esto hace que cambie el sentido de la desigualdad, por lo que se obtiene:

$S=\{x\in\mathbb{R}:x\leq 21\}$

Solución gráfica:



Fig. 2.42

¿Sabías que...?

El símbolo que hoy usamos (∞) para indicar infinito, se llama *lemniscata* que significa lazo y fue introducido en el año 1665 por el matemático John Wallis, pero el nombre le fue puesto cuarenta años más tarde por el matemático Bernoulli.

Ejemplo 2.32

El promedio de cinco notas de un estudiante en la asignatura Matemática para obtener la evaluación de Bien, debe ser a partir de 80 puntos e inferior a 90. Si en cuatro de ellas las calificaciones obtenidas son 96; 70; 81 y 95, ¿en qué rango debe encontrarse la quinta nota de la última prueba para obtener la evaluación de Bien?

Resolución:

Como el promedio no toma necesariamente valores enteros, entonces esta situación se puede expresar mediante la desigualdad que se observa y que da origen a dos inecuaciones:

$$80 \leq \frac{96+70+81+95+x}{5} < 90$$

Primera vía de solución:

Como aparece una doble desigualdad podemos resolverlas por separado.

$$\frac{96+70+81+95+x}{5} \geq 80 \qquad \frac{96+70+81+95+x}{5} < 90$$

$$\frac{342+x}{5} \geq 80 \qquad \frac{342+x}{5} < 90$$

$$342+x \geq 400 \qquad 342+x < 450$$

$$x \geq 58 \qquad x < 108$$

La solución de la inecuación se obtiene mediante la intersección de los dos conjuntos obtenidos, en este caso $58 \leq x < 108$ (figura 2.43), pero la solución del problema requiere de otro análisis.



Fig. 2.43

Respuesta del problema:
Si el estudiante obtiene 58 puntos, que es la menor nota que puede alcanzar, el promedio es 80 y si alcanza 100, que es la mayor nota que puede alcanzar, el promedio es 88,4. Por tanto, el rango de nota para obtener la evaluación de Bien, es: $58 \leq x \leq 100$. ♦

Segunda vía de solución:

Como aparece una doble desigualdad podemos resolverlas de manera integrada.

$$80 \leq \frac{342 + x}{5} < 90$$

$$400 \leq 342 + x < 450 \mid -342$$

$$58 \leq x < 108$$

Para la respuesta al problema, se mantiene el análisis expuesto anteriormente. ♦

Inecuaciones modulares

Especialistas encargados de analizar el consumo de agua diario por la población, de una determinada ciudad, consideran que este está dado por la expresión $|x - 375\,000| < 100\,000$

Donde x representa la cantidad de galones de agua que consume la población en un día. ¿Cómo determinar la menor y mayor cantidad de galones de agua que consumen los pobladores de esta ciudad en un día?

¿Qué significa esta expresión $|x - 375\,000| < 100\,000$ *?*
¿Qué procedimiento debes aplicar para resolverla?
¿Qué debes saber?

Para que puedas resolver inecuaciones donde la variable está dentro del signo de módulo o valor absoluto, debes conocer qué significa $|x| \leq a$ y $|x| \geq a$.

¿Cómo proceder?

La relación que existe entre valor absoluto o módulo de un número real y la distancia permite utilizar los valores absolutos para describir desigualdades y ello nos lleva a las propiedades siguientes:

Si a es un número positivo ($a > 0$) y x un número real cualquiera, entonces:

$|x| \leq a$ si y solo si $-a \leq x \leq a$

$|x| \geq a$ si y solo si $x \leq a$ o $x \geq a$

Ejemplo 2.33

Determinar el conjunto de valores reales que satisface la inecuación

a) $|x-5|<4$ b) $|2x-1|\geq 3$

Resolución:

De acuerdo con las propiedades anteriores, tenemos

a) $-4 < x-5 < 4$. El conjunto solución de esta inecuación se obtiene mediante la intersección de las soluciones de las inecuaciones $x-5<4$ y $x-5>-4$. La solución geométrica la puedes observar en la figura 2.44

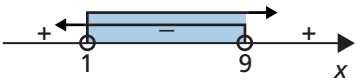


Fig. 2.44

$x-5<4 \qquad x-5>-4$

$x<9 \qquad x>1$

$S=\{x\in\mathbb{R}: 1<x<9\}$ ♦

También puede resolverse de manera integrada:

$-4<x-5<4$

$-4+5<x<4+5$

$1<x<9$

b) El conjunto solución de la inecuación $|2x-1|\geq 3$ se obtiene de la unión de las soluciones que se obtienen al resolver $2x-1\leq -3$ y $2x-1\geq 3$ las inecuaciones y luego se procede de la siguiente manera:

$2x-1\leq -3$ o $2x-1\geq 3$

$2x\leq -2 \qquad$ o $\qquad 2x\geq 4$

$x\leq -1 \qquad$ o $\qquad x\geq 2$

$S=\{x\in\mathbb{R}: x\leq -1 \text{ o } x\geq 2\}$ ♦

Retomemos el problema del consumo de agua.

Si aplicas la propiedad $|x|\leq a$ si y solo si $-a\leq x\leq a$, obtienes:

$-100\,000 < x-375\,000 < 100\,000$

$-100\,000+375\,000 < x < 100\,000+375\,000$

$275\,000 < x < 475\,000$

Luego, la menor cantidad de galones de agua que consumen los pobladores de esa ciudad en un día es aproximadamente de 275 000 galones y la mayor es de 475 000.

Inecuaciones cuadráticas. Interpretación gráfica de las soluciones

La efectividad de un calmante suministrado por medio de suero, varía en el tiempo según la ecuación $C = t^2 - 2t + 5$ *donde* C *se mide en miligramos por litro (mg/L) y el tiempo* t*, en horas. Expertos determinaron que el calmante no produce daños colaterales y es efectivo si se suministra de 8 mg/L a 13 mg/L, ¿qué tiempo de efectividad tiene el calmante en este caso?*

¿Qué relación te permite determinar los posibles valores del tiempo?

La situación planteada puede representarse por $8 \le t^2 - 2t + 5 \le 13$ esto quiere decir que debes buscar los valores para los cuales: $t^2 - 2t + 5 \le 13$ y $t^2 - 2t + 5 \ge 8$.

▲ ¿Cómo resolver inecuaciones como estas?

Definición 2.4

Una inecuación cuadrática en una variable real es la que tiene, o se puede reducir, a cualquiera de las formas siguientes:

$ax^2 + bx + c > 0$ o $ax^2 + bx + c < 0$ (desigualdades estrictas)
$ax^2 + bx + c \ge 0$ o $ax^2 + bx + c \le 0$ (desigualdades no estrictas)

Con a, b, c números reales dados y $a \neq 0$

Las soluciones de las inecuaciones cuadráticas permiten explicar el signo de los valores funcionales en las funciones definidas en los reales por ecuaciones de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$ o $f(x) = (x + d)^2 + e$.

Ejemplo 2.34

Hallar el conjunto solución de la inecuación: $x^2 + 6x + 5 < 0$

Resolución:

Se trata de buscar todos los valores reales para los cuales la función *f*, dada por la ecuación $f(x) = x^2 + 6x + 5$ (función asociada a la inecuación), es negativa:

Si observas la representación gráfica de la función (figura 2.45) te percatarás que para los valores del dominio que se encuentran entre menos uno y menos cinco las imágenes de la función están por debajo del eje de las abscisas, esto significa que la función es negativa para los valores reales del dominio comprendidos entre sus ceros, o sea, en el intervalo $-5 < x < -1$.

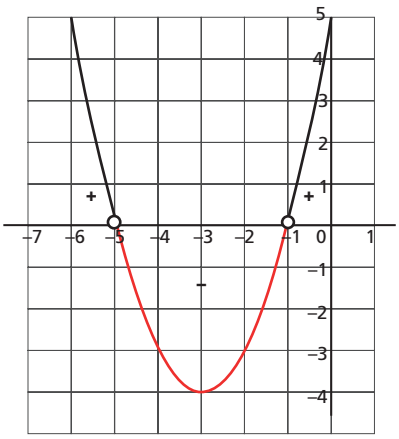


Fig. 2.45

Este resultado permite elaborar un método para resolver inecuaciones cuadráticas:

1) Transponer todos los términos al miembro izquierdo y descomponerlo en factores.

$x^2 + 6x + 5 < 0$

$(x+5)(x+1) = 0$

2) Hallar los ceros de las funciones asociadas, situarlos sobre la recta numérica y señalar con un círculo sin relleno si no puede ser solución, y con relleno en caso afirmativo

Ceros $x_1 = -5$; $x_2 = -1$

3) Colocar de derecha a izquierda el signo de la función asociada, en cada intervalo, si la parábola abre hacia arriba se comienza por "+"; si abre hacia abajo se comienza con "-".

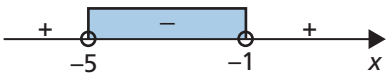


Fig. 2.46

4) Escribir el conjunto solución de la inecuación. ♦

$S = \{x \in \mathbb{R}: -5 < x < -1\}$

Se puede generalizar el procedimiento de resolución de las inecuaciones cuadráticas de la forma siguiente:

- Se trasponen todos sus términos para un solo miembro y se compara con 0.
- Se reducen los términos semejantes.
- Se hallan los ceros de la función cuadrática asociada a la inecuación.
- Se traza una recta numérica y se sitúan las raíces del trinomio.

– Se sitúan los signos de acuerdo con el signo de la función en cada uno de los intervalos.
– Se seleccionan el o los intervalos que satisfacen la inecuación, teniendo en cuenta que las raíces del trinomio pueden o no incluirse, en dependencia de si la desigualdad es estricta o no.

Ejemplo 2.35

Determinar el conjunto solución de las inecuaciones siguientes:

a) $x^2 \leq x+6$ b) $x^4+15x^2 \geq 16$ c) $5(x-2)+x-6 \geq 2(x-2)^2$

Resolución:

a) $x^2 \leq x+6$
$x^2 - x - 6 \leq 0$

Transponer todos los términos para un mismo miembro y comparar con cero.

$(x-3)(x+2) \leq 0$
$x_1 = 3$ o $x_2 = -2$

Descomponer en factores el trinomio
Buscar los ceros de la función asociada
Realizar el análsis de signos (figura 2.47).

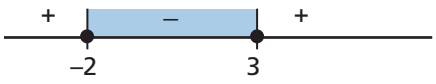


Fig. 2.47

$S = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 3\} = [-2;3]$ Escribir el conjunto solución.

b) $x^4+15x^2 \geq 16$
$x^4+15x^2-16 \geq 0$

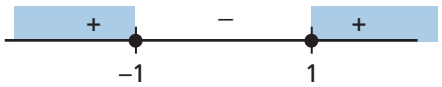
Transponer a un mismo miembro y comparar con cero.

Se obtiene un trinomio bicuadrático.

$(x^2+16)(x^2-1) \geq 0$
$(x^2+16)(x+1)(x-1) \geq 0$

El factor $(x^2 + 16)$ no se descompone y siempre toma valores positivos, luego solo se trabaja con los factores $(x + 1)$ y $(x – 1)$.

Ceros $x_1 = -1$ o $x_2 = 1$



Análisis de signos (figura 2.48)

Fig. 2.48

$S = \{x \in \mathbb{R} : -1 \geq x \geq 1\}$
$= (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$

Escribir el conjunto solución en una de sus notaciones.

c) $5(x-2)+x-6 \geq 2(x-2)^2$

$5x-10+x-6 \geq 2(x^2-4x+4)$

$6x-16 \geq 2x^2-8x+8$

$-2x^2+14x-24 \geq 0$

$x^2-7x+12 \leq 0$

$(x-4)(x-3) \leq 0$

Efectuar las operaciones indicadas en cada miembro de la desigualdad.

Transponer y comparar con cero.

Observar que el coeficiente del término cuadrático es negativo; además, existe un factor común numérico, por lo que es posible dividir la desigualdad por (–2) para simplifcar el proceso de resolución.

$(x-4)(x-3)=0$

Factorizar.

$x_1 = 4$ o $x_2 = 3$

Buscar los ceros de la función asociada y realizar el análisis de signo (figura 2.49).



Fig. 2.49

$S = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x \leq 4\}$ ♦

Escribir el conjunto solución analíticamente.

¡Atención! También es posible realizar el análisis de los signos a partir de $-2x^2+14x-24 \geq 0$

Reflexiona

¿Cuáles son las semejanzas y las diferencias que has observado entre el procedimiento de resolución de las inecuaciones cuadráticas con respecto a las lineales?

Ejemplo 2.36

Emplear el GeoGebra y hallar gráficamente el conjunto solución de la inecuación

$x^2 - x - 2 \geq 0$

Resolución:

La figura 2.50 muestra el conjunto solución de la inecuación con la aplicación del GeoGebra, luego, en notación constructiva, el conjunto solución es:

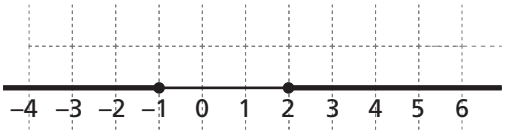


Fig. 2.50

$S = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -1 \text{ o } x \geq 2\}$ ♦

Aplica tus conocimientos

¿Cuál es el conjunto solución de las siguientes inecuaciones?

a) $(x-4)^2 \geq 0$ *b)* $(x-4)^2 < 0$

c) $x^2 - x + 1 > 0$ *d)* $x^2 - x + 1 < 0$

Explica las semejanzas y diferencias que se pueden establecer entre los conjuntos solución de las inecuaciones anteriores.

Del software

Para comprender la matemática
Módulo: Trabajo con variables. Resolver los ejercicios 12; 13 y 19

Reflexiona sobre lo aprendido

¿Qué diferencia existe entre el procedimiento de solución de una ecuación cuadrática y una inecuación cuadrática?

¿Cuándo aplicas el teorema de Vieta?

¿Cuál es el procedimiento de solución de una inecuación cuadrática?

¿Cómo aplicas el concepto de valor absoluto al resolver una ecuación modular?

¿Qué diferencia existe entre el proceso de resolución de las ecuaciones cuadráticas, modulares y lineales?

Ejercicios del epígrafe 2.2

Ejercicios con Ecuaciones lineales y modulares

1. Analiza y selecciona cuál de los valores de la variable que se indican, satisfacen a cada una de las ecuaciones que aparecen a continuación:

1.1 $5x + 6x = 10x + 5$

a) $x = -5$ b) $x = \frac{1}{5}$ c) $x = 5$ d) $x = -\frac{1}{5}$

1.2 $21 - 6x = 27 - 8x$

a) $x = 3$ b) $x = -3$ c) $x = \frac{1}{3}$ d) $x = -\frac{1}{3}$

2. ¿Cuáles de las parejas de ecuaciones que aparecen a continuación son equivalentes?

a) $5x - 36 = 5x$; $x + 5 = x + 1$

b) $2x - 3 = 7$; $x(x-3) = x^2 + 8 + 3x$

c) $\frac{x}{2} + \frac{2x}{2} = 14$; $3x^2 + 4x = 84$

3. Una de las ecuaciones que aparecen a continuación tiene como solución a $x = \frac{1}{2}$. Determina de cuál se trata.

a) $\frac{x-1}{2} = 1$ b) $\frac{x+4{,}5}{8} = 1$ c) $\frac{x-1}{2} + \frac{x+9{,}5}{8} = 1$

4. ¿Cuál de las transposiciones de términos son incorrectas para resolver la ecuación $3x - 7 = \frac{5}{2}$? Expresa por escrito por qué es erróneo.

a) $3x = \frac{5}{2}$ b) $3x = \frac{5}{6} - 7$ c) $3x = \frac{2-42}{2}$ d) $3x = -\frac{-37}{2}$

5. ¿Qué valor de la variable satisface cada una de las ecuaciones siguientes?

a) $3x + 101 - 4x - 33 = 108 - 16x - 100$ b) $16 + 7x - 5 + x = 11x - 3 - x$

c) $x + 3(x-1) = 6 - 4(2x+3)$ d) $2(3x+3) - 4(5x-3) = x(x-3) - x(x+5)$

e) $(x-2)^2 - (3-x)^2 = 1$

6. Utiliza el asistente matemático GeoGebra para determinar el conjunto solución de las ecuaciones siguientes:

a) $(x+1)(x-2) - (4x-1)(3x+5) - 6 = 8x - 11(x-3)(x+7)$

b) $5(1-x)^2 - 6(x^2 - 3x - 7) = x(x-3) - 2x(x+5)$

c) $(3x+1)^2 - 3(2x+3) + 42 = 2x(-x-5) - (x-1)^2$

7. Si sabes que el número del siguiente cuadrado mágico es 36,

$3(2x+1)$	$3-x$	$4(x+1)-1$
$x+3$	$3(x+1)$	$5(x+1)-2$
$2+(2x+1)$	$7x+3$	3

únete a dos compañeros y responde las siguientes interrogantes:

a) ¿Cuál es el valor de la variable x?

b) Si x toma el valor –2, ¿cuál es el número del cuadrado mágico?

8. Determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones modulares.

a) $|x|=8$ b) $|x|=\frac{3}{4}$ c) $|x|+5=9$

d) $|x+3|=5$ e) $|x-6|=-1$ f) $|3x+2|=10$

g) $|x-9|-7=16$ h) $|12x+1|+4=34$ i) $|x|+5=-8$

Ejercicios con ecuaciones cuadráticas

9. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $3x^2-7x+2=0$ b) $x^2+11x=-24$

c) $(x+4)^2=2x(5x-1)-(x-2)$ d) $x(x+3)=5x+3$

e) $7(x+3)-5(x^2-1)=x^2-5(x+2)$ f) $5x(x+1)-2(2x^2-7x)=-8$

10. ¿Cuántos valores reales son solución de la ecuación $(x-2)^2=x^2-4x+4$?

11. ¿Qué valor puede tomar la variable para que la igualdad $x^2-3=x(x+1)$ sea verdadera?

12. Determina el conjunto solución de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2+6x+4=0$ b) $x^2+2\sqrt{3}x+2=0$ c) $x^2-2\sqrt{2}x+2=0$

13. En la figura 2.51 se muestra un cuerpo formado por dos pirámides de alturas iguales y bases cuadradas iguales superpuestas. Si cada arista de la base está dada por la expresión $(x + 1)$, ¿qué valor debe tomar x para que el volumen del cuerpo sea de 900 dm^3?

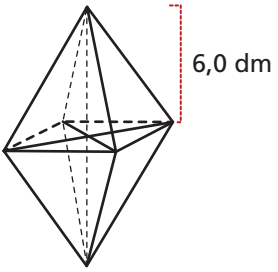


Fig. 2.51

14. * Escribe la ecuación que permite determinar las longitudes del cuadrado sombreado sabiendo que el área de la figura completa es 21 u^2 (figura 2.52).

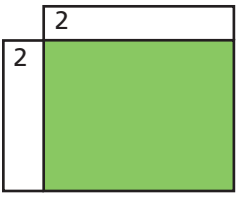


Fig. 2.52

15.* Un médico le dio a su paciente un pomo de 30 tabletas al que le faltan algunas y le recetó que se tomara en 7 días todas las tabletas que posee el pomo. La receta dice que debe tomar una parte de las tabletas que quedan (cada día) en el pomo, del siguiente modo:

El primer día, tomar la séptima parte de la cantidad de las tabletas; el segundo día, la sexta parte de las que quedaron; el tercer día, la quinta parte; el cuarto día, la cuarta parte; y así sucesivamente hasta el séptimo día en el que tomó tres tabletas y el pomo quedó vacío.

a) ¿Cuántas tabletas faltaban en el pomo cuando el médico se lo entregó al paciente?
b) ¿Cuántas debe tomar el paciente cada día?

16. Del *software Para comprender la matemática,* en el módulo formulación de problemas resolver el 3.

17. Los estudiantes de un politécnico asumen la tarea de restaurar en tres años cierta cantidad de obras de valor patrimonial. El primer año restauraron el triplo de las obras restauradas; en el segundo y en el tercero restauraron el 20 % de las restauradas el primer año. ¿Cuántas obras más fueron restauradas en el primer año en relación con el segundo, si se restauraron 667 obras en total?

18. Hasta el mes de julio del 2020, veintidós brigadas del contingente médico cubano Henry Reeve habían prestado su ayuda en América

Latina, el Caribe, África, Europa y el Medio Oriente para apoyar el combate a la pandemia Covid-19 que azotó al mundo en el año 2020. Se conoce que, hasta esa fecha, 31 colaboradores se encontraban en América Latina, en África el número de colaboradores representó la tercera parte del total de colaboradores disminuido en 18, mientras que la cifra del personal de la salud en Europa en conjunto con el Medio Oriente, superó en 67 al 20 % del total. En cuanto al Caribe, la cantidad de colaboradores superó en 132, a los integrantes de la brigada que brindó sus servicios en África.

a) ¿Cuántos integrantes del contingente Henry Reeve prestaron sus servicios hasta esa fecha?
b) Si la brigada médica que colaboró en Lombardía, Italia, atendió a más de 5 500 enfermos, ¿cuántos de estos enfermos ya se encontraban en casa si aproximadamente uno de cada tres enfermos atendidos por el personal cubano, recibieron el alta médica?
c) Haz tu valoración acerca de la participación de nuestros médicos cubanos en el combate a la pandemia en diversos países del mundo

Fuente: Periódico *Granma* 27 de abril 2020 (la primera parte).

19. Los estudiantes de una escuela pedagógica dedicaron tres fines de semana a recolectar materia prima para entregarla a una industria. El primer fin de semana recolectaron el triplo de lo que lograron recolectar en la segunda semana. La cantidad de materia prima recolectada en la tercera semana fue el 50 % de lo recolectado en la segunda. Si entre los tres fines de semana recolectaron 900 kg de materia prima en total, ¿cuál fue el fin de semana en que recolectaron mayor cantidad de materia prima y a cuántos kilogramos equivale la recolección?

20. En el área de salud en nuestro país se cuenta con 866 tipos de medicamentos básicos. Una parte de ellos se distribuyen por medio de las farmacias y los restantes solo se utilizan en los hospitales. La mitad de la cantidad de medicamentos de los que solo se utilizan en los hospitales supera en 25 al 70 % de los que se distribuyen en las farmacias. ¿Cuántos de estos tipos de medicamentos se distribuyen por las farmacias?

21. En el mes de noviembre, el 25 % del total de trabajadores de una empresa ya había dado su aporte en la recaudación de fondos para los damnificados por un huracán, en diciembre aportaron la mitad del resto y en enero lo hicieron 116 trabajadores. Actualmente solo falta la octava parte de la cantidad de los trabajadores por dar su aporte.

a) ¿Cuántos trabajadores tiene la empresa?
b) ¿Qué tanto por ciento del total de trabajadores dio su aporte en el mes de diciembre?

22. En un preuniversitario se crearon cursos optativos: la cuarta parte de la cantidad de los estudiantes matriculados prefirieron el de Ajedrez; la tercera parte del resto, el turismo; la quinta parte matriculó en el de Pedagogía y los 96 restantes, en el de Medicina.

a) ¿Cuál es la matrícula de cada curso?
b) ¿Cuál es la matrícula del centro si los matriculados en estos cuatro cursos representan el 80 % de esta?

23. Luis resolvió la tarea de Historia, que orientó su profesor, de la siguiente forma: El primer día contestó el 40 % del total de preguntas, el segundo día la tercera parte del resto, el tercer día 18 preguntas y 10 preguntas el último día, pero le faltaron 2 preguntas por resolver, porque tenía dudas sobre los contenidos que le exigía la tarea.

a) ¿Cuántas preguntas tenía la tarea?
b) ¿Qué tanto por ciento del total de preguntas no pudo responder?

24. Selecciona la respuesta correcta.

El conjunto solución de la ecuación $(x+5)^2-(x+1)^2=24$ es:
a) $S=\{-5;0\}$ b) $S=\{0:-1\}$ c) $S=\{0\}$ d) $S=\varnothing$

25. Sin resolver la ecuación, averigua si las parejas de números que se dan en cada caso son raíces de las ecuaciones correspondientes.

a) $x^2-7x+28=0;$ 1 y 3

b) $x^2-2x-3=0;$ $3-\sqrt{7}$ y $3+\sqrt{7}$

c) $10x^2-29x+10=0;$ $\frac{2}{5}$ y $\frac{5}{2}$

26. Halla la ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$ si se conoce la suma s y el producto p de sus raíces:

a) $s = 11$ y $p = 30$ b) $s = 20$ y $p = 64$ c) $s = 19$ y $p = -120$
d) $s = 2$ y $p = -15$ e) $s = -19$ y $p = 60$ f) $s = a$ y $p = -2a$
g) $s = 7b$ y $p = 10b^2$

27. Escribe en cada caso una ecuación de segundo grado que tenga como raíces:

a) $x_1 = -2$ y $x_2 = 5$ b) $x_1 = 2$ y $x_2 = -3$ c) $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$
d) $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$ e) $x_1 = \frac{3}{4}$ y $x_2 = \frac{x}{8}$ f) $x_1 = a^2$ y $x_2 = a^2$
g) $x_1 = 14\sqrt{3}$ y $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ h) $x_1 = a^4$ y $x_2 = b^4$ i) $x_1 = 2\sqrt{5}$ y $x_2 = \sqrt{5}$

28. Un trabajador por cuenta propia ofrece el 30 % de descuento al precio que había fijado para cierto artículo y aun así obtiene una utilidad (ganancia) de un 10 %. Si el cuentapropista compró el artículo en $ 35.00, ¿cuál es el precio que le había fijado al artículo?

Ejercicios con Inecuaciones

29. Escribe en el lenguaje común los conjuntos de números reales que aparecen representados en la recta numérica.

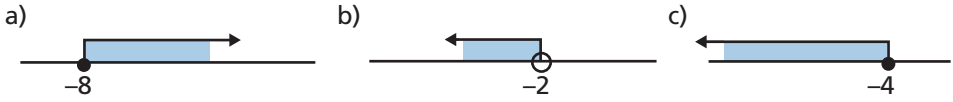


Fig. 2.53

30. Escribe en lenguaje algebraico los conjuntos de números reales que aparecen representados en la recta numérica.

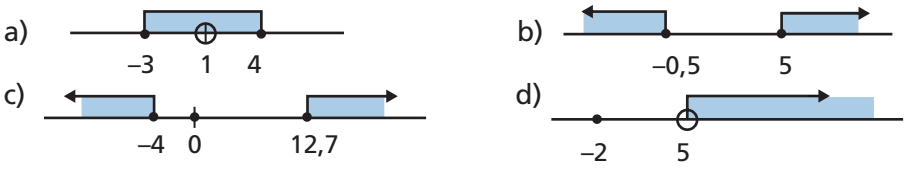


Fig. 2.54

31. Selecciona la respuesta correcta.

31.1 La solución de la inecuación $3x - 24 \leq 4 - 2x$ es:

a) $x \geq \frac{28}{5}$ b) $x \geq 28$ c) $x \leq \frac{28}{5}$ d) $x = \frac{28}{5}$

31.2 Son solución de la inecuación $\frac{x}{2} + 3 < 2x$ los valores reales:

a) $x \leq 2$ b) $x \geq 2$ c) $x < 2$ d) $x > 2$

32. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $5x - 1 < 7x + 9$

b) $11x + 7 < 3x - 2$

c) $6 - 8x + 3 \leq -9x + 7 - x$

d) $5x + 4 \geq 3(x - 7)$

e) $9x + 8 - 4x < 3x + 12$

f) $5(x + 4) - 2(x - 3) > 8$

g) $4(2x + 1) \geq 6 - (4 - 3x)$

h) $6 - 3(x + 2) \leq 4(x - 3) + 5(x + 3)$

i) $(x - 5)(x - 3) - (x - 10) < 1$

j) $(x - 3)^2 - (x - 4)(x + 2) \leq 5$

k) $3x + \frac{7x}{6} > 5 + \frac{2x}{3} + \frac{2(2x + 5)}{9}$

l) $\frac{(8x - 1)(2x + 5)}{4} - (2x + 3)^2 < -2x - 7{,}5$

33. Resuelve las siguientes inecuaciones. Utiliza el asistente matemático GeoGebra y representa en el sistema de coordenadas la solución de las siguientes inecuaciones:

a) $2x - 1 \leq 3$ b) $8 - x \leq 6$ c) $5x + 1 \geq 4$ d) $2 - 3x > -4$

34. Expresa en el lenguaje algebraico cada conjunto de números reales.

a) Mayores e iguales a 3,5.

b) Menores que $\frac{1}{2}$ o mayores que –2.

c) Menores que 5 o mayores que –4 y distintos que –1.

d) Menores que –1 o mayores que 4.

e) Mayores que $-\sqrt{2}$ o menores que $-\sqrt{2}$.

35. Selecciona la respuesta correcta en cada caso.

35.1 Si $x \geq -3$ entonces:

a) $-2x \geq 6$ b) $-2x \geq -6$ c) $-2x \leq 6$ d) $-2x \leq -6$

35.2 Si $y < 3$ entonces:

a) $\frac{y}{5} > 3$ b) $\frac{y}{5} < \frac{5}{3}$ c) $\frac{y}{5} < \frac{3}{5}$ d) $\frac{y}{5} > \frac{3}{5}$

35.3 Si $z \geq 3$ entonces:

a) $\frac{1}{z} > \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{z} \leq \frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{z} > 3$ d) $\frac{1}{z} \leq -3$

36. Halla analíticamente el conjunto solución de las siguientes inecuaciones modulares.

a) $|3x-2| \leq 11$ b) $|4x-3| < 0$ c) $|5x+3| \geq 0$

d) $|5x+2| \geq 8$ e) $|7-3x| > 2$ f) $\left|\frac{2x+1}{5} - \frac{2-x}{3}\right| > 1$

37. Determina el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 - 9x < 0$ b) $3x^2 > 11x - 6$

c) $9a^2 + 6a \geq -4$ d) $x^2 - 4 < 4 - 2x$

e) $x^2 + 3 \leq 0$ f) $(2x-4)(x+3) > (x-4)(x+6) - 3x^2$

38. Halla el conjunto solución de las inecuaciones siguientes. Utiliza el asistente GeoGebra para obtener la representación gráfica.

a) $x^2 - 10x + 25 \geq 0$ b) $x^2 - 4x < 0$

c) $2x^2 - 1 > x$ d) $x^2 + 5 \leq 0$

e) $25x^2 - 10x + 1 \geq 0$ f) $x^2 > 2x - 5$

g) $3x^2 - 4x \geq -1$ h) $(7+x)^2 + (7-x) \leq 70$

i) $(2x+1)(x-5) < (x-2)^2 - (5x-1)$

39. Elabora una inecuación cuadrática cuyo conjunto solución sea el que aparece representado en cada caso (figura 2.55). Comparte la respuesta con tu profesor y tus compañeros de grupo.

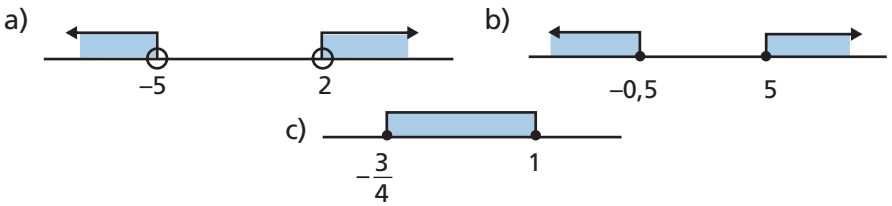


Fig. 2.55

40. Expresa algebraicamente el dominio de definición de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{2x-3}$ b) $\sqrt{3x+\frac{1}{2}}$ c) $\sqrt{8x-4}$

41. Lee detenidamente el siguiente texto:

Las confituras deben comerse como algo ocasional, porque el alto consumo de azúcar refino, entre el 20 % y el 25 % de los requerimientos totales, se relaciona con diversos trastornos de salud como el aumento del colesterol, la obesidad y la *diabetes mellitus*, entre otras. (Fuente*:* Revista *Energía y Tú*).

a) Elige una variable y expresa la desigualdad que represente lo que se considera alto consumo de azúcar refino.

42. ¿Cuántas personas trabajan en el departamento de mantenimiento de cierta empresa si se conoce que al salir de vacaciones la cuarta parte de ellos, los que quedan son menos de 18 trabajadores y si toman las vacaciones la tercera parte del total, los que quedan son más de 14?

2.3 Fracciones algebraicas. Ecuaciones e inecuaciones fraccionarias

El trabajo con fracciones comunes, lo conoces desde los primeros grados; en este epígrafe ampliarás este concepto porque aprenderás a resolver operaciones con fracciones donde intervienen las variables.

Fracción algebraica. Simplificación de fracciones algebraicas

¿Qué diferencia existe entre las expresiones $A=\frac{3x-7}{4}$ y $B=\frac{5x+2}{x+1}$?

Definición 2.5

Si P y Q son expresiones algebraicas y $Q\neq 0$, entonces el cociente indicado $\frac{P}{Q}$ es una **fracción algebraica** cuando el denominador Q contiene por lo menos una variable.

Son ejemplos de fracciones algebraicas: $\frac{2}{a-b}$; $43xy^{-1}$ y $\frac{x-5}{x}$.



De la historia

El francés Albert Girard (1595-1632) enuncia el teorema fundamental del algebra, introduce la raya "—" colocada entre el numerador y el denominador de las fracciones algebraicas o numéricas.

Al intervenir variables en el denominador de estas fracciones, es necesario analizar su **dominio de definición**, esto quiere decir, que hay que buscar los valores admisibles del dominio de definición de las variables.

Ejemplo 2.37

¿Cuál es el dominio de definición de las siguientes fracciones algebraicas?

a) $\frac{x^2-9}{x(x+2)}$ b) $\frac{5b}{b^2-2b+1}$

Resolución:

a) Hallar el dominio de definición de una fracción algebraica significa determinar los valores admisibles de las variables. En este caso se puede comprobar, a simple vista, que si $x=0$ o $x=-2$ el denominador es cero, por tanto, la fracción se indefine. Luego el dominio de definición de la fracción algebraica es el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ o } x \neq -2\}$.

b) En este caso el procedimiento es análogo al anterior. Si $b^2-2b+1=0$ se tiene que $(b-1)^2=0$, de donde $b=1$. Entonces el dominio de definición es el conjunto $\{b \in \mathbb{R} : b \neq 1\}$ ♦

En algunos problemas con fracciones algebraicas se utilizan determinadas propiedades que deben conocer.

Sea $\frac{P}{Q}$; $Q \neq 0$, una fracción algebraica, entonces:

1) $\frac{P}{Q}=0$ si y solo si $P=0$ *y* $Q \neq 0$

2) $\frac{P}{Q}$ no está defindа si y solo si $Q=0$

3) $-\frac{P}{Q}=\frac{-P}{Q}=\frac{P}{-Q}$; $Q \neq 0$

Ejemplo 2.38

Indicar para cada una de las fracciones algebraicas que aparecen a continuación:

– el dominio de definición

– los valores que hacen cero la fracción

a) $\frac{b}{4(b-3)}$ b) $\frac{(x-5)(x+1)}{(x+1)(x-2)}$ c) $\frac{x(4-x)^2}{(x+2)(x+4)}$ d) $\frac{a^2+ab+b^2}{a}$

Resolución:

Fracción	Dominio de definición	Valores que hacen cero la fracción
a) $\frac{b}{4(b-3)}$	Observa que cuando $b = 3$ el denominador se anula e indefine la fracción, luego: $\text{Dom}: \{b \in \mathbb{R} : b \neq 3\}$ o $\mathbb{R} \setminus \{3\}$	En una fracción cuando el numerador es cero, el cociente es cero, luego para $b = 0$ se anula la fracción ya que es un valor que anula al numerador y no al denominador.
b) $\frac{(x-5)(x+1)}{(x+1)(x-2)}$	Fijate que cuando $x = -1$ o $x = 2$ el denominador se hace cero por tanto, se indefine la fracción, luego: $\text{Dom}: \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \text{ o } x \neq 2\}$ o $\mathbb{R} \setminus \{-1;2\}$	Como $x = -1$ es un valor que no puede estar en en dominio, el valor que anula o hace cero la fracción es $x = 5$.
c) $\frac{x(4-x)^2}{(x+2)(x+4)}$	$\text{Dom}: \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2 \text{ o } x \neq -4\}$ o $\mathbb{R} \setminus \{-2;-4\}$	Cuando $x = 0$ o $x = 4$ la fracción se hace cero.
d) $\frac{a^2+ab+b^2}{a}$	$\text{Dom}: \{a,b \in \mathbb{R} : a \neq 0\}$ $\text{Dom}: \mathbb{R} \setminus \{0\}$	Como puedes observar el trinomio del numerador no tiene descomposición; esto quiere decir que para cualquiera sean los valores de a y b el valor que se obtiene siempre es positivo, luego la fracción no se hace cero. ♦

Es importante que no pierdas de vista que para analizar el dominio y (o) los valores que anulan a una fracción algebraica, si la expresión no está factorizada, es necesario descomponerla en factores primos el numerador y el denominador para buscar los ceros.

Signos de una fracción algebraica

En una fracción algebraica deben considerarse tres signos: el signo de la fracción, el signo del numerador y el signo del denominador. Luego, para realizar cambios de signo, estos deben ser una cantidad par para no alterar la fracción.

Si el numerador y el denominador son polinomios, para cambiar el signo del denominador (numerador) hay que cambiarle el signo a cada término del polinomio.

Así, en la fracción $\frac{4x}{1-x}$, se obtiene: $\frac{4x}{1-x} = -\frac{-4x}{1-x} = \frac{-4x}{x-1} = -\frac{4x}{x-1}$

En la fracción $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-5)}$, donde el numerador y el denominador están formados por factores, se tiene:

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-5)} = \frac{(1-x)(x-2)}{(3-x)(x-5)} = \frac{(1-x)(2-x)}{(x-3)(x-5)} = -\frac{(1-x)(2-x)}{(3-x)(x-5)} \blacklozenge$$

Reflexiona

Explica por qué son verdaderas.

$$\frac{x-9}{2-x} = -\frac{x-9}{x-2} = -\frac{9-x}{2-x} = \frac{9-x}{x-2}$$

Simplificación de fracciones algebraicas

▲ ¿Qué significa simplificar una fracción algebraica?

Simplificar una fracción algebraica consiste en dividir el numerador y el denominador por un mismo factor que les sea común.

Si k, A y B son expresiones algebraicas ($k \neq 0$ y $B \neq 0$), entonces $\frac{A:k}{B:k} = \frac{A}{B}$

Para efectuar la simplificación, el numerador y el denominador deben estar expresados como productos. En el trabajo algebraico cuando es posible

simplifcar los factores comunes que aparecen en el numerador y en el denominador de las fracciones algebraicas, se facilita el trabajo algebraico.

Ejemplo 2.39

Determinar el dominio de definición, simplificar tanto como sea posible y hallar su valor numérico para los valores de la variable indicados en cada caso.

$$A=\frac{a^2-2a+1}{a^2-a};\ a=2 \text{ y } a=1 \quad B=\frac{x^2+x-12}{3-x};\ x=0{,}5 \text{ y } x=3$$

Resolución:

a) $A=\dfrac{a^2-2a+1}{a^2-a}=\dfrac{(a-1)^2}{a(a-1)}=\dfrac{a-1}{a}$

Dom $A=\{a\in\mathbb{R}: a\neq 0 \text{ o } a\neq 1\}$

Si $a=2$ entonces $A=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$

Si $a=1$ entonces A no está definida.

b) $B=\dfrac{x^2+x-12}{3-x}=\dfrac{(x+4)(x-3)}{-(x-3)}=-\dfrac{(x+4)(x-3)}{x-3}$

$B=-(x+4)$

Dom $B=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 3\}$

Si $x=0{,}5$ entonces $B=-(0{,}5+4)=-4{,}5$

Si $x=3$ entonces B no está definida. ♦

¡Atención!

Los cálculos se facilitan cuando utilizamos la fracción simplificada, pero la igualdad que se obtiene al simplificar una fracción algebraica, solo se satisface en el dominio de definición de la fracción original.

Operaciones con fracciones algebraicas

Multiplicación y división de fracciones algebraicas

Al igual que las operaciones con fracciones comunes, se realizan las operaciones de multiplicación y división de fracciones algebraicas.

Recuerda que...

Para multiplicar dos fracciones debes efectuar la multiplicación de los numeradores y de los denominadores y realizar las simplificaciones correspondientes.

Por ejemplo: a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{10}{21}$ b) $\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{7}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$ (antes de multiplicar puedes simplificar el 5 con el 15)

Para realizar una división de fracciones se multiplica el dividendo por el recíproco del divisor. Por ejemplo $\frac{3}{10}:\frac{2}{5}=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{2}=\frac{3}{4}$

Ejemplo 2.40

Realizar las operaciones indicadas:

a) $\frac{x+3}{x-1}\cdot\frac{x}{x-4}$ b) $\frac{2x^2-5x-12}{4x^2+12x+9}:\frac{x^3-64}{x^2+4x+16}$

Resolución:

a) $\frac{x+3}{x-1}\cdot\frac{x}{x-4}=\frac{x(x+3)}{(x-1)(x-4)}=\frac{x^2+3x}{x^2-5x+4}$

b) $\frac{2x^2-5x-12}{4x^2+12x+9}\cdot\frac{x^2+4x+16}{x^3-64}=\frac{(2x+3)(x-4)}{(2x+3)^2}\cdot\frac{x^2+4x+16}{(x-4)(x^2+4x+16)}=$

$=\frac{1}{2x+3}$♦

¡Atención!

Para multiplicar fracciones debes realizar los siguientes pasos:

- Factorizar los numeradores y los denominadores de las fracciones.
- Simplificar los factores comunes a los numeradores y denominadores.
- Multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador.

En el caso de la división de fracciones algebraicas se procede de forma análoga a la división de fracciones comunes, es decir, debes multiplicar por el reciproco del divisor.

Adición y sustracción de fracciones algebraicas

La adición y sustracción de fracciones algebraicas es muy similar a la que has realizado en grados anteriores con las fracciones comunes.

Recuerda que...

Para adicionar o sustraer fracciones debes buscar el denominador común (mínimo común múltiplo).

Ejemplo: $\frac{11}{12}+\frac{5}{8}=\frac{22+15}{24}=\frac{37}{24}$; m.c.m. $(8 \text{ y } 12)=24$

Para adicionar y sustraer fracciones algebraicas se procede de forma similar a la acostumbrada con fracciones comunes, para ello se descompone cada denominador en factores irreducibles, y hallamos el mcm como el producto de los factores irreducibles comunes y no comunes a su mayor exponente. Por ejemplo, el mcm de ab^2c^3 y a^5b es $a^5b^2c^3$ y el mcm de x^2 y x^2+2x es: $x^2(x+2)$. En este caso primeramente debes descomponer en factores x^2+2x como $x(x+2)$ y una vez descompuesto en factores se determina el mcm.

Ejemplo 2.41

Determina el mínimo común múltiplo de:

a) $x^2;\ x-1;x^2-x$ b) $x^2-16;\ x^2-8x+16$

Resolución:

a) Solo es necesario factorizar: $x^2-x=x(x-1)$

El mcm es $x^2(x-1)$

b) $x^2-16=(x+4)(x-4);\quad x^2-8x+16=(x-4)^2$

El mcm es $(x+4)(x-4)^2$ ♦

Adicionar o sustraer fracciones algebraicas no es más que aplicar el procedimiento siguiente:

- Descomponer en factores primos los numeradores y denominadores de las fracciones algebraicas y simplificar si es posible.
- Determinar el mcm de los denominadores, que será el denominador común.
- Dividir el denominador común por cada uno de los denominadores y ampliar los numeradores.

- Efectuar los productos indicados en el numerador y reducir los términos semejantes, en caso de que existan.
- Simplificar el resultado si es posible.

Ejemplo 2.42

Efectuar:

a) $\dfrac{16x+24}{8x^3+27}+\dfrac{3}{4x^2-6x+9}$ b) $\dfrac{a^2}{a^2-2a+1}-\dfrac{1}{a-1}$ c) $\dfrac{a+3}{a^2-a-6}-\dfrac{a+5}{a^2+2a-15}$

Resolución:

a) $\dfrac{16x+24}{8x^3+27}+\dfrac{3}{4x^2-6x+9}$

Para efectuar la suma se procede de la forma siguiente:

$\dfrac{16x+24}{(2x+3)(4x^2-6x+9)}+\dfrac{3}{4x^2-6x+9}$

Descomponer en factores los denominadores.

$\dfrac{16x+24+3(2x+3)}{(2x+3)(4x^2-6x+9)}$

Determinar el mínimo común múltiplo de los denominadores, es decir, los factores comunes y no comunes y ampliar los numeradores.

$\dfrac{16x+24+6x+9}{(2x+3)(4x^2-6x+9)}$

Efectuar las operaciones indicadas en el numerador.

$\dfrac{22x+33}{(2x+3)(4x^2-6x+9)}=\dfrac{22x+33}{8x^3+27}$

Reducir términos semejantes y expresar la fracción resultante.

b) $\dfrac{a^2}{a^2-2a+1}-\dfrac{1}{a-1}$

$=\dfrac{a^2}{(a-1)^2}-\dfrac{1}{a-1}$

Factorizar los denominadores

$=\dfrac{a^2-(a-1)}{(a-1)^2}$

Seleccionar los factores comunes a su mayor exponente y ampliar las fracciones.

$=\dfrac{a^2-a+1}{(a-1)^2}$

Reducir términos semejantes y obtener el resultado.

c) $\dfrac{a+3}{a^2-a-6}-\dfrac{a+5}{a^2+2a-15}$

$=\dfrac{a+3}{(a-3)(a+2)}-\dfrac{a+5}{(a-3)(a+5)}$ Factorizar los denominadores.

$=\dfrac{(a+3)(a+5)-(a+5)(a+2)}{(a-3)(a+2)(a+5)}$ Determinar el mcm y ampliar los numeradores.

$=\dfrac{(a+5)(a+3-a-2)}{(a-3)(a+2)(a+5)}$ En este caso puedes descomponer en factores extrayendo factor común (como el segundo producto del numerador está precedido del signo "–" se cambia el signo de los dos términos y se reducen los términos semejantes).

$=\dfrac{1}{(a-3)(a+2)}$ Simplificar.

Otra vía de solución:

c) $\dfrac{a+3}{(a-3)(a+2)}-\dfrac{a+5}{(a-3)(a+5)}$ Observar que en este caso es posible simplificar antes de operar.

$=\dfrac{a+3}{(a-3)(a+2)}-\dfrac{1}{(a-3)}$ Simplificar la fracción sustraendo.

$=\dfrac{a+3-a-2}{(a-3)(a+2)}$ Determinar el mcm y ampliar los numeradores prestando atención al signo menos que precede al binomio para realizar el cambio de signo.

$=\dfrac{1}{(a-3)(a+2)}$ Reducir términos semejantes en el numerador de la fracción. ♦

Aplica tus conocimientos

¿Qué fracción se obtiene como resultado al efectuar $\dfrac{2}{m+n}+\dfrac{3}{n^2-m^2}$?

¿Qué valores no admiten las variables de la expresión anterior?

Operaciones combinadas con fracciones algebraicas

En las operaciones con fracciones algebraicas, puedes encontrar con frecuencia las opereciones combinadas, como sucede cuando operas con los números reales, luego se procede de forma análoga respetando el orden de las operaciones.

Recuerda que...

Para resolver operaciones combinadas con números reales:

- Se resuelven las operaciones indicadas entre signos de agrupación (paréntesis, corchetes, llaves).
- Se realizan la potenciación y la radicación en el orden en que aparecen.
- Se efectúan las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen.
- Se realizan las sumas algebraicas que resulten al final.

Calcular:

$$0{,}75-\left(\frac{1}{2}\right)^2\div\frac{3}{8}-\frac{5}{6}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}-\frac{5}{6}=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=\frac{9-8-10}{12}=-\frac{9}{12}=-\frac{3}{4}$$

Ejemplo 2.43

Efectúa las operaciones indicadas.

a) $\dfrac{3y^2-3y+3}{1+y^3}+\dfrac{ay-5a+2by-10b}{30-16y+2y^2}:\dfrac{3a^2+6ab}{2ay^2-4ay-6a}$

b) $\left(\dfrac{c^2-2c}{3c^2-7c+2}+\dfrac{4}{3c-1}\right)\cdot\dfrac{9c^2-1}{c^3+64}$

Resolución:

a) $\dfrac{3y^2-3y+3}{1+y^3}+\dfrac{ay-5a+2by-10b}{30-16y+2y^2}:\dfrac{3a^2+6ab}{2ay^2-4ay-6a}$

Observar que se trata de la adición de una fracción y la división de dos fracciones algebraicas.

$=\dfrac{3\left(y^2-y+1\right)}{(1+y)\left(1-y+y^2\right)}+\dfrac{a(y-5)+2b(y-5)}{2\left(y^2-8y+15\right)}\cdot\dfrac{2a\left(y^2-2y-3\right)}{3a(a+2b)}$

Plantear la multiplicación por el recíproco.

$$\frac{3}{y+1}+\frac{(y-5)(a+2b)}{2(y-5)(y-3)}\cdot\frac{2a(y-3)(y+1)}{3a(a+2b)}$$

Realizar la multiplicación primero según el orden de las operaciones y simplificar.

$$\frac{3}{y+1}+\frac{y+1}{3}=\frac{9+y^2+2y+1}{3(y+1)}=\frac{y^2+2y+10}{3y+3}$$

Efectuar la adición siguiendo el procedimiento indicado.
En este caso no es posible más simplificación.

b) $\left(\frac{c^2-2c}{3c^2-7c+2}+\frac{4}{3c-1}\right)\cdot\frac{9c^2-1}{c^3+64}$

Observar que la adición se encuentra entre un signos de agrupación, por tanto se realiza la adición primero.

$$\left(\frac{c^2-2c}{3c^2-7c+2}+\frac{4}{3c-1}\right)=\frac{c(c-2)}{(3c-1)(c-2)}+\frac{4}{3c-1}$$

Como es posible simplificar en la primera fracción se factorizan numerador y denominador.

$$=\frac{c}{3c-1}+\frac{4}{3c-1}=\frac{c+4}{3c-1}$$

Puedes apreciar que los denominadores son iguales, luego se suman los numeradores.

$$\frac{c+4}{3c-1}\cdot\frac{9c^2-1}{c^3+64}$$

Plantear la multiplicación del resultado de la adición con la otra fracción.

$$=\frac{c+4}{3c-1}\cdot\frac{(3c+1)(3c-1)}{(c+4)(c^2-4c+16)}$$

Factorizar y simplificar

$$=\frac{3c+1}{c^2-4c+16}$$

Obtener la fracción simplificada. ♦

Ecuaciones e inecuaciones fraccionarias

Ecuaciones fraccionarias

Las conexiones eléctricas que se realizan, en la construcción de una edificación, deben responder a leyes o propiedades y los elementos que intervienen en ellas también las deben cumplir para obtener los resultados deseados. Así sucede que al colocar en paralelo dos resistores, la resistencia total R satisface la relación $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ *donde* R_1 *y* R_2 *representan la resistencia en Ohm de ambos resistores.*

Si R_2 *tiene 5* Ω *más que* R_1 *y la resistencia total es 6* Ω*, ¿cuál es el valor* R_1 *y* R_2*?*

¿Qué tipo de ecuación permite establecer la relación entre las resistencias?

¿Qué procedimiento debes seguir para determinar los valores que te piden?

Como se puede observar, en la ecuación que se obtiene en la situación anterior aparecen fracciones algebraicas, por tanto, se trata de una **ecuación fraccionaria**. Para resolver este tipo de ecuación es necesario eliminar los denominadores para transformarla en una ecuación entera.

El procedimiento para resolver ecuaciones fraccionarias consiste en:

- Determinar el dominio de definición de la ecuación, previa descomposición en factores de los numeradores y los denominadores de las fracciones algebraicas.
- Simplificar de ser posible en cada fracción.
- Buscar el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores o el denominador común.
- Eliminar los denominadores multiplicando ambos miembros de la ecuación por el mcm para obtener una ecuación entera.
- Efectuar los productos indicados en el numerador y reducir los términos semejantes.
- Resolver la ecuación obtenida.
- Comprobar si las soluciones pertenecen al dominio de definición de la ecuación original comparando con el dominio de definición o mediante la comprobación.

¡Atención!

En el proceso de resolución se pueden introducir raíces que no son soluciones de la ecuación original (raíces extrañas), por tanto, es necesario realizar la comprobación. Además, la comprobación permite detectar posibles errores en la aplicación del procedimiento.

Ejemplo 2.44

Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones fraccionarias.

a) $\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}=0$ b) $\frac{x^2+7}{x^2-2x-15}+\frac{3}{x-5}=-\frac{2}{x+3}$

Resolución:

a) $\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}=0$

$\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)(x-1)}=0 \mid \cdot(x+1)(x-1)$

$3(x-1)-1=0$

$3x-4=0;\ x=\frac{4}{3}$

El mcm de los denominadores es $(x+1)(x-1)$, luego, si multiplicamos por él ambos miembros de la ecuación, se eliminan los denominadores y se obtiene una ecuación entera .

Comprobación

MI: $\frac{3}{\frac{4}{3}+1}-\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2-1}=\frac{3}{\frac{4}{3}+1}-\frac{1}{\frac{16}{9}-1}=\frac{3}{\frac{7}{3}}-\frac{1}{\frac{7}{9}}=\frac{9}{7}-\frac{9}{7}=0$; MD : 0

Como ambos miembros son iguales, $x=\frac{4}{3}$ satisface la ecuación, por tanto, el conjunto solución es $S=\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

b) $\frac{x^2+7}{x^2-2x-15}+\frac{3}{x-5}=-\frac{2}{x+3}$

¿Cuál es el dominio de definición de la ecuación?

Dominio de definición $\{x\in\mathbb{R}: x\neq 5 \text{ o } x\neq -3\}$

¿Cuál es el mínimo común múltiplo de: $x^2-2x-15;\ x-5;\ x+3$?

$x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$

Mínimo común múltiplo: $(x+3)(x-5)$

$$\frac{x^2+7}{(x+3)(x-5)}+\frac{3}{x-5}=-\frac{2}{x+3}\ |\cdot(x+3)(x-5)$$

$$x^2+7+3(x+3)=-2(x-5)$$

$$x^2+7+3x+9=-2x+10$$

$$x^2+3x+16=-2x+10$$

$$x^2+5x+6=0$$

$$(x+2)(x+3)=0$$

$$x_1=-2 \quad \text{o} \quad x_2=-3$$

–3 no pertenece al dominio de definición de la ecuación, por tanto, no es solución. ♦

Comprobación para $x=-2$

$$\text{MI}: \frac{(-2)^2+7}{-7}+\frac{3}{-7}$$

$$=-\frac{11}{7}-\frac{3}{7}=-\frac{14}{7}=-2$$

$$\text{MD}: -\frac{2}{-2+3}=-2$$

MI = MD

$$S=\{-2\}$$

Ejemplo 2.45

Resolver la ecuación $\frac{1}{6}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_1+5}$ si se sabe que $R_1>0$.

Resolución:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_1+5}\ |\cdot 6R_1(R_1+5)$$

$$R_1(R_1+5)=6(R_1+5)+6R_1$$

$$R_1^2+5R_1=6R_1+30+6R_1$$

$$R_1^2+5R_1=12R_1+30$$

$$R_1^2-7R_1-30=0$$

$$(R_1-10)(R_1+3)=0$$

$$R_1=10 \quad \text{o} \quad R_1=-3$$

Pero, como $R_1>0$, entonces la solución es $R_1=10$

Retomando la situación planteada al inicio del epígrafe, comprueba si la ecuación y su solución se corresponden con la situación planteada. ♦

Ejemplo 2.46

Para un proyecto ecológico en la comunidad, una empresa quiere aportar $ 24 000.00 distribuidos en asignaciones de igual cantidad de dinero. Antes de iniciar su aporte la empresa decidió disminuir en dos la cantidad de asignaciones que había programado inicialmente por lo que debía asignar $ 600.00 más en cada una. Esta decisión de la empresa reduce el tiempo de entrega lo cual trae beneficios para el proyecto. ¿En cuántas asignaciones la empresa realizará el pago del dinero en la nueva propuesta? ¿Qué cantidad de dinero se aportará en cada una de las asignaciones?

Resolución:

Declaración de la variable

Cantidad de asignaciones programadas inicialmente: x

Cantidad de dinero que debía pagar inicialmente la empresa por cada asignación: $\frac{24\,000}{x}$

Cantidad de dinero que debía pagar la empresa por cada asignación en la nueva propuesta: $\frac{24\,000}{x-2}$

Ecuación: $\frac{24\,000}{x}+600=\frac{24\,000}{x-2}$

$$\frac{24\,000}{x}+600=\frac{24\,000}{x-2}\,|\cdot x(x-2)$$

$$24\,000(x-2)+600x(x-2)=24\,000x$$

$$24\,000x-48\,000+600x^2-12\,000x=24\,000x$$

$$600x^2-12\,000x-48\,000=0\;|:600$$

$$x^2-2x-80=0\;;\quad (x-10)(x+8)=0$$

$$x_1=10\quad \text{o}\quad x_2=-8$$

Como la cantidad de asignaciones programadas es una cantidad positiva, se asume $x=10$, pues el valor de la variable que tiene sentido en esta condición es:

$$\frac{24\,000}{10-2}=\frac{24\,000}{8}=3\,000$$

Respuesta: la empresa realizará el pago del dinero en 8 asignaciones y en cada una pagará $ 3 000.00 ♦

Inecuaciones fraccionarias

Científicos del área de América Latina consideran que con ciertos medicamentos se logran efectos favorables, si su concentración en el torrente sanguíneo no excede de un determinado valor llamado nivel terapéutico mínimo. Si se supone que la concentración C *de un fármaco cuando transcurren* t *horas después que se ha ingerido está dada por:* $C=\frac{20t}{t^2+4}$ *y sabiendo que su valor terapéutico mínimo es de* $4\,mg/L$, *¿en qué intervalo de tiempo se considera efectivo el medicamento?*

La situación planteada conduce a una desigualdad en la que uno de sus miembros es una fracción algebraica. En este caso estamos en presencia de una **inecuación fraccionaria** con una variable real.

Para determinar el intervalo de tiempo en que el medicamento es efectivo la situación se modela mediante la inecuación: $\frac{20t}{t^2+4} > 4$

Las inecuaciones fraccionarias se expresan como un cociente de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ o $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$; $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ o $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$; donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x)$ no es de grado cero. Para resolverla se realizan los siguientes pasos:

- Se transponen todos sus términos para un solo miembro y se compara con 0.
- Se realizan las operaciones indicadas y se reducen los términos semejantes.
- Se hallan los ceros del numerador y del denominador.
- Se traza una recta numérica y se sitúan los ceros hallados teniendo en cuenta que los ceros del denominador siempre se excluyen.
- Si los coeficientes de las variables de mayor grado tienen el mismo signo, los signos de los intervalos que se determinan irán variando de forma alternada de derecha a izquierda, comenzando por el signo más
- Si los coeficientes de las variables de mayor grado tienen signo diferente, se multiplica la inecuación por –1, con lo cual se cambia también el sentido de la desigualdad y se reduce este caso al anterior. De no multiplicarse la inecuación por –1, los signos de los intervalos que se determinan irán variando de forma alternada de derecha a izquierda, comenzando por el signo menos.
- Se selecciona el o los intervalos que satisfacen la inecuación y se forma el conjunto solución, teniendo en cuenta que los ceros del numerador pueden o no incluirse en dependencia de que la desigualdad sea estricta o no.

Ejemplo 2.47

Resolver las inecuaciones siguientes:

a) $\frac{2x-3}{x-3} > 0$ b) $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$ c) $\frac{2x-5}{x-1} \leq -1$

d) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+7x+12} \leq 0$ e) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+x+1} < 2$

Resolución:

$$\frac{2x-3}{x-3} > 0$$

a) Resolver la inecuación, significa hallar todos los valores reales de la variable para los cuales el cociente $\frac{2x-3}{x-3}$ es positivo.

En este caso al numerador y al denominador no hay que factorizarlos.

Calculados los ceros del numerador y el denominador tenemos:

Ceros del numerador: $2x - 3 = 0 \quad x = \frac{3}{2}$

Ceros del denominador: $x - 3 = 0 \quad x = 3$

Realizar el análisis de signos (figura 2.56):

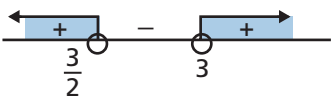


Fig. 2.56

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x < \frac{3}{2} \text{ o } x > 3 \right\} \quad \text{o} \quad S = \left(-\infty; \frac{3}{2} \right) \cup (3; \infty)$$

b) $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$

Puedes observar que uno de los coeficientes de las variables es negativo, luego, una vía de solución es colocar los signos de derecha a izquierda comenzando por el signo menos (–).

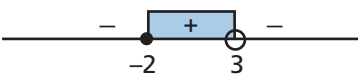


Fig. 2.57

Resolución utilizando la primera vía: $S = \{ x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 3 \}$

Otra vía: consiste en transformarlo multiplicando por –1 ambos miembros de la inecuación para obtener la inecuación:

$$\frac{x+2}{x-3} \leq 0$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 3 \}$$

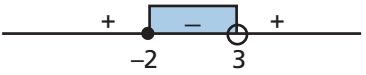


Fig. 2.57 A

c) $\frac{2x-5}{x-1} \leq -1$

Realizar la transformación necesaria para comparar con cero, realizar las operaciones en el miembro izquierdo:

$$\frac{2x-5}{x-1}+1\leq 0;$$

$$\frac{2x-5+x-1}{x-1}\leq 0$$

$$\frac{3x-6}{x-1}\leq 0$$

$$\frac{3(x-2)}{x-1}\leq 0$$

$$S=\{x\in\mathbb{R}: 1<x\leq 2\}$$

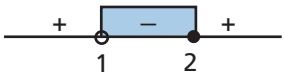


Fig. 2.58

d) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+7x+12}\leq 0$

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+4)}\leq 0$$

Descomponer en factores los trinomios del numerador y del denominador.

Determinar los ceros del numerador y del denominador, para hacer el análisis de los signos. Debes observar que hay un cero doble, luego se repite el signo menos en –3.

$x=-3;\ x=1$ y $x=-4$

$S=\{x\in\mathbb{R}: -4<x\leq 1; x\neq -3\}$

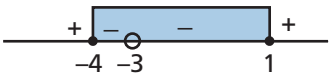


Fig. 2.59

e) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x+1}<2$

El procedimiento es análogo al anterior, pero debes prestar atención en algunos de los pasos:

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2+x+1}-2<0$$

$$\frac{x^2+5x+6-2\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1}<0$$

$$\frac{x^2+5x+6-2x^2-2x-2}{x^2+x+1}<0$$

$$\frac{-x^2+3x+4}{x^2+x+1}<0$$

En el numerador $-x^2+3x+4$ el coeficiente de la variable de mayor grado es negativo, el cual se trasformó en positivo multiplicando

por –1 ambos miembros de la inecuación. En este caso se invirtió el sentido de la desigualdad.

El denominador es un trinomio que no tiene descomposición factorial, por tanto no se anula para ningún valor real de la variable (si hallamos el discriminante obtenemos $D = -3 < 0$, entonces no tiene soluciones reales).

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + x + 1} > 0$$

$$\frac{(x-4)(x+1)}{x^2 + x + 1} > 0$$

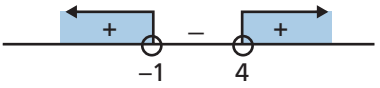


Fig. 2.60

$S = \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ o } x > 4\}$ ♦

Reflexiona sobre lo aprendido

¿Qué condiciones debe cumplir una inecuación fraccionaria para que tenga solución?

¿Cuál es el procedimiento de solución de una inecuación fraccionaria?

¿Qué diferencia existe entre el proceso de resolución de las ecuaciones cuadráticas, modulares y lineales con respecto a una ecuación fraccionaria?

Ejercicios del epígrafe 2.3

Fracción algebraica. Simplificación de fracciones algebraicas

1. Sea la fracción algebraica: $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - x}$. Analiza y determina cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas. Argumenta tu selección.

a) Su dominio de definición es $\{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\}$. .
b) La fracción toma valor cero para $x_1 = -1$ o $x_2 = 4$.
c) Se indefine para $x_0 = 1$.
d) No tiene simplificación.

2. De la fracción algebraica $\frac{a^3 - 8}{a(a-4)}$ selecciona las respuestas correctas en cada caso.

I) Se anula si: $a_0 = 0$; $a_1 = 2$; $a_2 = -2$ o $a_3 = -4$
II) Se indefine para: $a_0 = 0$; $a_1 = -4$; $a_2 = -2$ o $a_3 = 4$

3. Para la fracción $\frac{x^2+10x+25}{6(x-3)}$ identifica cuáles de las proposiciones que aparecen a continuación son verdaderas y cuáles son falsas. Argumenta tu elección.

a) Toma valor cero para qualquier valor real de la variable.

b) Está definida para todos los valores reales de la variable.

c) Puede ser expresada como $-\frac{(x+5)^2}{6(3-x)}$

4. Selecciona la respuesta correcta:

4.1 Al simplificar la fracción algebraica $\frac{2x^2+2x}{2x^2}$ se obtiene:

a) $\frac{x+1}{x}$ b) x c) $\frac{2x}{x}$ d) $\frac{2x+1}{x}$

4.2 La expresión simplificada de la fracción $\frac{x^2-3x}{x^2-2x-3}$ es:

a) $\frac{3x}{2x-3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{x}{x+1}$

4.3 Cuando simplificas la fracción algebraica $\frac{4x^2-y^2}{y^2-4x^2}$ el resultado es:

a) 1 b) –1 c) $\frac{2x-y}{y-2x}$ d) $\frac{2x-y}{2x+y}$

5. Simplifica cada una de las fracciones algebraicas siguientes:

a) $\frac{(2b-1)^2}{4b^2-1}$ b) $\frac{a^2-b^2}{a^2+ab}$ c) $\frac{x^2-4}{-5x+10}$ d) $\frac{2x^2-3xy-4x+6y}{8x^3-27y^3}$

6. Haz corresponder a la fracción algebraica de la columna A la que le corresponde simplificada en la columna B.

A	B
$A=\frac{3x^3+9x^2}{x^2+6x+9}$	$E=-\frac{x+3}{x+4}$
$B=\frac{x^2-4x+4}{4x^2-x^4}$	$F=-\frac{x-2}{x^2(x+2)}$

A	B
$C = \dfrac{x^2 - 8x + 16}{8 + 2x - x^2}$	$G = \dfrac{2 - x}{x^2(x + 2)}$
$D = \dfrac{x^2 - x - 12}{16 - x^2}$	$H = \dfrac{3x^2}{x + 3}$
	$I = -\dfrac{x - 4}{x + 2}$

Operaciones con fracciones algebraicas

7. Selecciona cuál de las fracciones que aparecen a continuación se obtiene al calcular $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3} \cdot \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 5x + 6}$

a) $\dfrac{x - 4}{x + 2}$ b) $-\dfrac{x(x + 4)}{x + 2}$ c) $\dfrac{x(x + 4)}{x + 2}$ d) $x\dfrac{x - 4}{x - 2}$

8. Efectúa las operaciones siguientes:

a) $\dfrac{2x^2 + 2x}{2x^2} \cdot \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3}$

b) $\dfrac{3x^2 + 5x - 2}{x^4 + 2x^2 - 15} : \dfrac{9x^2 - 6x + 1}{x^4 + 5x^2}$

c) $\dfrac{m^2 + 4m}{m^2 - m - 20} \cdot \dfrac{m^2 - 25}{5m^2 + 25m}$

d) $\dfrac{x^2 + 16x + 64}{x^2 + 3x + 9} \cdot \dfrac{x^2 - 7x - 8}{x + 8} \cdot \dfrac{x^3 - 27}{x^3 + x^2 - 64x - 64}$

e) $\dfrac{3a^2 + 16a - 12}{27a^3 - 8} \cdot \dfrac{a^2 + 8a + 16}{a^2 + 4a} : \dfrac{a^3 - 28a - 48}{9a^2 + 6a + 4}$

f) $\dfrac{t^2 - 2t - 24}{t^2 - 2t - 15} : \dfrac{5t^2 - 29t - 6}{t - 5}$

g) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 - 2x - 3} \cdot \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 5x + 6}$

h) $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{2a + 4b - ax - 2bx} : \dfrac{(x + 1)^2}{a + 2b}$

9. Sean las fracciones $M = \dfrac{y^2 - 1}{y^3 - y^2 + 3y - 3}$ y $N = \dfrac{3y^2 + 9y}{y^2 + 4y + 3}$. Calcula y simplifica $M \cdot N$.

10. Comprueba que al calcular $\frac{a^2-b^2}{2a+2b}\cdot\frac{a^3+b^3}{4a-4b}:\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$ se obtiene como resultado

$$\frac{(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)}{8}$$

11. Dados $A=\frac{10x^2-13x-14}{x+y}$ y $B=\frac{49-100x^2}{7x-10x^2+7y-10xy}$.

Verifica que $A : B = x - 2$

12. Efectúa y simplifica: $\frac{a^3+5a^2+2a-8}{3a^2+11a-4}\cdot\frac{9a^2-1}{6a+12}$.

13. Dados: $A(x)=\frac{x^4-81}{x^3-3x^2-x+3}$; $B(x)=\frac{x^4+18x^2+81}{x-1}$, selecciona la respuesta correcta.

13.1 La expresión $A(x)$ se anula para:

a) $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$ b) $x_1 = 1$; $x_2 = -1$ y $x_3 = 3$ c) $x_1 = 0$ d) $x_1 = -3$

13.2 Los valores inadmisibles de son:

a) $x_1 = 3$ b) $x_1 = 1$ c) $x_1 = 3$; $x_2 = 1$ y $x_3 = -1$ d) $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$

13.3 Al calcular $A(x) : B(x)$ se obtiene como resultado

a) $\frac{x+3}{x^2+9}$ b) $\frac{x+3}{x+1}$ c) $\frac{x^2+9}{x-3}$ d) $\frac{x+3}{(x+1)\left(x^2+9\right)}$

14. Dadas las expresiones algebraicas:

$M(x) = \frac{x^4-27x}{x^3-3x^2-x+3}$ y $N(x)=\frac{3x^2-2}{x-2}$

a) La expresión $M(x)$ se anula para:

I. $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$ II. $x_0 = 3$

III. $x_0 = 0$ IV. $x_1 = 1$; $x_2 = -1$ y $x_3 = 3$

b) Los valores inadmisibles de $M(x)$ son

I. $x_0 = 3$ II. $x_1 = 3$; $x_2 = 1$ y $x_3 = -1$

III. $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ IV. $x_0 = 0$

c) Calcula y simplifica $M(x):\frac{x^2+3x+9}{x-1}$

d) Verifica que el conjunto numérico más restringido al que pertenece el valor numérico de $N(\sqrt{2})+\sqrt{4\sqrt{4}}$ es al conjunto de los números enteros.

15. Sean las expresiones algebraicas

$N(x) = \dfrac{x-2}{2x+10}$ y $M(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3+4x^2-11x-30}$.

a) ¿Para qué valores reales de x están definidas las expresiones $N(x)$ y $M(x)$?

b) Calcula y simplifica $(x-3)\,M(x) : N(x)$.

16. Prueba que para todo valor admisible de las variables se cumple que:

$$\frac{x^2-9x-22}{r^2-36} : \frac{mx-11m}{r^2+11r+30} \cdot \frac{r-6}{3x+6} = \frac{r+5}{3m}$$

17. Halla $P(a)$ si $P(a) = \dfrac{4a^2-9}{2a^2+11a+12} \cdot \dfrac{8a^2-32a}{a^2+2a-8} : \dfrac{a-4}{a^2+8a+16}$.

18. Verifica que $A : B : C = \dfrac{x-3}{2a}$, si:

$A = \dfrac{xa^2-2a^2+x-2}{3a-6}$; $B = \dfrac{a^3+a}{6a-12}$ y $C = \dfrac{4x-8}{x-3}$.

19. Sea $M = \dfrac{9a^2-4b^2}{a^2-10ab+25b^2} : \dfrac{6a^3+17a^2b-14ab^2}{2a^2-3ab-35b^2}$

a) Simplifica M.

b) Calcula el valor numérico de M para $a = 3{,}5$ y $b = -1$.

20. Si $A = 3x^3 - 9x^2 - 30x$, $B = 2x^3 - 5x^2 - 23x - 10$ y $Q = \dfrac{A}{B}$.

a) Identifica cuál de las expresiones algebraicas tiene como dominio de definición al conjunto de los números reales.

b) Simplifica Q.

21. Sean $R = y^3 - 3y^2 + 4$ y $S = y^3 - 2y^2 - 4y + 8$.

a) Calcula $M = \dfrac{R}{S}$.

b) Demuestra que si $R = M : \dfrac{y^2+8y+7}{3y^3+27y^2+42y}$, entonces R es un número real para todos los valores admisibles de la variable y.

22. Identifica en las expresiones algebraicas de la columna A cuáles de los múltiplos comunes que les corresponden en la columna B son incorrectos. Escribe el menor múltiplo común que le corresponde.

A	B
Expresiones algebraicas	Múltiplo
a) $a;a^2;2a;5a$	$2a^2$
b) $x;y;x+y;xy$	$xy(x+y)$
c) $x-4;(x-4)^2$	$x-4$
d) $a^2-b^2;a-b$	$a-b$
e) $5;m+n;m^2+2mn+n^2$	$5(m+n)^2$
f) $x^2+y^2;(x+y)^2;x+y$	$(x^2+y^2)(x+y)^2$

23. Efectúa las sumas siguientes:

a) $\frac{a}{x^2}-\frac{20}{12x}$ b) $\frac{c-3}{18c^2}+\frac{c+6}{9c^2}$ c) $\frac{5a}{a+b}-\frac{8ab+2b}{(a+b)^2}$

d) $\frac{3a}{a-2}+\frac{2a-3ab}{a^2-4+ab-2b}$ e) $\frac{x-5}{x^2-11x+30}-\frac{x-5}{x^2-6x}$

f) $\frac{(2x+5)^2}{x^3-2x^2-3x+6}-\frac{x-5}{x^2-3}$ g) $\frac{5}{12-3x}+\frac{x+2}{x^2-4x}$

h) $\frac{2x+1}{x^2+1}+\frac{4}{x}$ i) $\frac{2}{x-3}+\frac{3}{2-x}-\frac{4x-7}{x^2-5x+6}$

24. Resuelve las operaciones siguientes:

a) $\frac{4}{a}-\frac{3}{3a+2}-\frac{2}{a(3a+2)}$ b) $\frac{3a}{a-b}-\frac{b}{a^2-b^2}$

c) $\frac{3}{5a}-\frac{2}{10b}+\frac{5b-a}{15ab}$ d) $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}$

e) $\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x(x-1)}-\frac{2x^2+1}{x(x^2-1)}$ f) $\frac{3x}{2yz}-\frac{3y}{5xz}+\frac{4z}{3x^2}$

g) $\frac{c-d}{c+d}-\frac{c^2-d^2}{(c+d)^2}$

h) $\frac{9}{y^2+3y-40}+\frac{y}{y^2+3y-40}-\frac{y+1}{y^3+4y^2-37y-40}$

i) $\frac{5}{b^2+8b-20}+\frac{2}{-b-10}$ j) $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}-\frac{x+5}{1-x}$

25. Efectúa:

a) $\frac{x^2+4x+3}{2x^2+x-1}\cdot\frac{2x-1}{x^2-2x+1}-\frac{2x-1}{x^2-2x+1}$

b) $\frac{2x^2-4x+8}{x^3+8}:\left(\frac{2x-11}{2x^2+7x+6}+\frac{5}{x+2}\right)$

c) $\dfrac{c^2-16}{c^2-4c}\cdot\dfrac{3c}{c^2+3c-4}-\dfrac{4}{c^2-1}$

d) $\dfrac{3y^2-3y+3}{1+y^3}+\dfrac{ay-5a+2by-10b}{30-16y+2y^2}:\dfrac{3a^2+6ab}{2ay^2-4ay-6a}$

Ecuaciones e inecuaciones fraccionarias

26. A continuación se presentan los pasos seguidos por un estudiante al aplicar el procedimiento de resolución para determinar el conjunto solución de la ecuación $\dfrac{3}{x-4}-\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{21}{x^2-x-12}$. En tu libreta, explica con tus palabras los pasos seguidos en el procedimiento de resolución.

Pasos seguidos por el estudiantes	
1	$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$
2	Dom = $\{x \in \mathbb{R}: x \neq -3; x \neq 4\}$
3	mcm $(x - 4)(x + 3)$
4	$3(x + 3) - 2(x - 4) = 21$
5	$3x + 9 - 2x + 8 = 21$
6	$x = 4$
7	$S = \varnothing$

27. Resuelve y describe con tus palabras en tu libreta el procedimiento seguido para determinar el conjunto solución de la ecuación:

$\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x^2-2}{x^2-2x}=0$

28. Determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones.

a) $\dfrac{3}{2x+1}-\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{x+3}{4x^2-1}$

b) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{4}{4x^2-4}$

c) $\dfrac{3}{4y-1}=\dfrac{2}{4y+1}$

d) $\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{x+3}{x-3}=\dfrac{x^2+3}{x^2-9}$

e) $\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{7}{x+2}$

f) $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x^2-1}=0$

g) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x^2-1}=0$

h) $\dfrac{5}{x+1}-\dfrac{3}{1-x}=\dfrac{6}{1-x^2}$

i) $\dfrac{(2x-1)^2}{x^2+4x+4}=\dfrac{8x-4}{x+2}-3$

j) $\dfrac{1}{2x-3}-\dfrac{3}{2x^2-3x}=\dfrac{5}{x}$

k) $\dfrac{3x-1}{x+3}-\dfrac{2x+3}{1-x}=\dfrac{5x^2-2x-24}{x^2+2x-3}$

l) $\dfrac{6x^2-3x+4}{3x^2+5x-9}=2$

m) $\dfrac{6}{x+4}-\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{7x^2+50}{3\left(x^2-16\right)}=\dfrac{4}{3}$

n) $\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{4}{3-x}=\dfrac{4}{x^2-9}$

ñ) $\dfrac{x^2+7}{x^2-2x-15}+\dfrac{3}{x-5}=-\dfrac{2}{x+3}$

29. Despeja las variables indicadas a la derecha de cada fórmula.

a) $i=\dfrac{E}{r+R}\,;r$

b) $u=\dfrac{v}{1+v}\,;v$

c) $R=\dfrac{r_1\cdot r_2}{r_1+r_2}\,;r_2$

d) $\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{p'}+\dfrac{1}{p}\,;\,p'$

30. Resuelve las ecuaciones que aparecen a continuación y determina a qué dominio numérico más restringido pertenecen los valores de x que son solución de la ecuación:

a) $\dfrac{x+2}{x-3}=\dfrac{3x-4}{x+2}$

b) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{3}{x-3}$

c) $\dfrac{x+2}{x}+\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x}{x(x-2)}$

d) $\dfrac{x+5}{x-5}-\dfrac{2x}{x+5}+1=\dfrac{4x^2}{x^2-25}$

e) $\dfrac{x-3}{x-2}-\dfrac{2x-1}{3-x}=\dfrac{2x-3}{x^2-5x+6}$

f) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{2x+1}{x^2+2x}=\dfrac{x^3+3}{x^3-4x}$

31. Halla los valores de x que satisfacen las igualdades siguientes:

a) $\dfrac{3(x+1)}{x-1}=\dfrac{4x+1}{x+1}$

b) $\dfrac{15}{x}-\dfrac{11x+5}{x^2}=1$

c) $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{5x-6}{x^2-4}$

d) $\dfrac{(2x+1)^2}{x^2+4x+4}=\dfrac{8x-4}{x+2}-3$

e) $x+\dfrac{3}{x}=\dfrac{x^2+3+2x}{x}$

f) $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{3x^2}=\dfrac{x+15}{6x^2}$

g) $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{3}{x-7}=\dfrac{27}{x^2-5x-14}$

h) $\dfrac{x+7}{3x-3}-\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{4}{3}$

32. ¿Qué valores de $x\in\mathbb{R}$ tales que $x\in[-1;1]$ cumplen la condición $x^2-2x\geq 0$?

33. ¿Para qué valores reales de la variable no están definidas las siguientes expresiones? Escribe en tu libreta los pasos que seguiste para arribar a la respuesta.

a) $\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}$ b) $\sqrt{\frac{4x-3}{x}}$

34. Halla todos los valores reales de la variable x para los cuales se cumple cada una de las desigualdades.

a) $\frac{x+1}{x-2} > 0$ b) $\frac{x}{x-4} < 0$

c) $\frac{x-2}{3-x} \leq 0$ d) $\frac{x-1}{(x+4)^2} \leq 0$

e) $\frac{(x+9)^2}{5(x-7)} \geq 0$ f) $\frac{x-9}{4(x+2)} > 0$

g) $\frac{(x+5)^2}{6x} \leq 0$ h) $\frac{x-5}{(x-2)(4-x)} > 0$

35. Determina el conjunto solución de las inecuaciones siguientes:

a) $\frac{x+2}{x-1} > 0$ b) $\frac{2x-1}{x+6} \leq 1$ c) $\frac{x+1}{x} \geq 3$

d) $\frac{2(x+3)}{x-8} < -4$ e) $\frac{x-1}{5(x+1)} \geq -1$

36. Selecciona el conjunto de valores reales que es solución de cada una de las inecuaciones siguientes.

a) $\frac{x^2}{x^2+5x+4} \leq 0$

I. $(-4;-1) \cup \{0\}$ II. $(-4;-1] \cup \{0\}$

III. $(-4;-1)$ IV. $[-4;-1]$

b) $\frac{x^2+3x+7}{x^2+3x+2} \leq 0$

I. $(-\infty;-2] \cup (-1;\infty)$ II. $(-\infty;-2) \cup (-1;\infty)$

III. $(-2;-1)$ IV. $[-2;-1]$

c) $\frac{x^2-x-6}{x^2+2} < 0$

I. $(-\infty;-2) \cup (3;\infty)$ II. (-2)

III. $\mathbb{R}$ IV. $[-2;3]$

d) $\dfrac{x^2-9}{x-6}\geq 0$

I. $(3;\infty)$ II. $[-3;3]\cup(6;\infty)$

III. $(-\infty;3]$ IV. $(3;6]$

e) $\dfrac{x^2+2x+1}{(x-3)^2}>0$

I. $\mathbb{R}$ II. $\mathbb{R}\backslash\{3\}$

III. $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ IV. $\mathbb{R}\backslash\{-1;3\}$

37. Escribe el intervalo real que satisface la inecuación en cada caso.

a) $\dfrac{x^2-7x-8}{5(3-x)}\leq 0$ b) $\dfrac{x+1}{x-2}>3$ c) $\dfrac{x+3}{4}<\dfrac{x+3}{x}$

d) $\dfrac{1}{a+3}+\dfrac{1}{a-2}\leq 0$ e) $\dfrac{1-z}{4-3z}>\dfrac{3}{3z-4}$

38. Describe con tus palabras los pasos que se deben seguir para determinar el conjunto solución de la siguiente inecuación $\dfrac{4x-1}{2x-3}\leq 1$.

38.1 Determina su conjunto solución.

39. Asocia cada una de las inecuaciones con el conjunto solución que le corresponda.

a) $\dfrac{4a-1}{a-7}\geq 1$ $A=\{\ \}$

b) $\dfrac{3a+10}{a+7}<2$ $B=\{a\in\mathbb{R}:a\geq 2\}$

c) $\dfrac{5a^2+2a+2}{(a-1)^2}<1$ $C=\{a\in\mathbb{R}:a\leq -2 \text{ o } a>7\}$

d) $\dfrac{2a+1}{5}-\dfrac{2-a}{3}\geq 1$ $D=\mathbb{R}/\{-7\}$

e) $\dfrac{a^2+14a+49}{a^2+a+3}>0$ $E=\{a\in\mathbb{R}:-7<a<4\}$

f) $\dfrac{a^2+14a+49}{a^2+3a+2}<0$ $F=\{a\in\mathbb{R}:-2<a<-1\}$

40. Para qué valores reales de la variable la expresión $\dfrac{x^2-9}{2x^2+5x-3}$ es no negativa.

41. ¿Cuál es el dominio de definición de la expresión $\sqrt{\dfrac{x-4}{x^2+1}}$?

42. ¿Para qué valores de la variable no están definidas las expresiones siguientes?

a) $\sqrt{\dfrac{x+3}{2x-5}}$ b) $\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2+5x+6}}$ c) $\dfrac{\sqrt{x-7}}{x}$ d) $\dfrac{\sqrt{1-5x}}{x-2}$

43. Selecciona las respuestas correctas en cada una de las propuestas siguientes:

43.1 El subconjunto de valores reales positivos que pertenecen a la solución de la inecuación $\dfrac{x+3}{x-4}>0$ es:

a) $(-\infty;-3]\cup(4;\infty)$ b) $[4;\infty)$ c) $(4;\infty)$

43.2 Los valores reales que satisfacen la inecuación $\dfrac{x(x+1)}{(x-2)^2}\geq 0$ son:

a) $\{x\in\mathbb{R}: x\leq -1 \text{ o } x\geq 0\}$ b) $\{x\in\mathbb{R}: x\leq -1 \text{ o } x\geq 0;\ x\neq 2\}$

c) $\{x\in\mathbb{R}: -1\leq x\leq 0; x>2\}$ d) $\{x\in\mathbb{R}: -1< x< 0; x>2\}$

43.3 El conjunto de números naturales que pertenecen al intervalo para los cuales la fracción algebraica $\dfrac{x(1-x)}{x-3}$ es negativa es:

a) $\varnothing$ b) $\{x\in\mathbb{N}: x\geq 0; x\neq 3\}$ c) $\{x\in\mathbb{N}: x>3\}$ d) $\{2\}$

44* Únete con compañeros de tu aula y elabora por lo menos una inecuación fraccionaria, que tenga como conjunto solución el que se indica en casa caso.

a) $\{x\in\mathbb{R}: x\leq -3 \text{ o } x>0\}$ b) $\{x\in\mathbb{R}: x>0 \text{ o } x\neq 0\}$

c) $\{x\in\mathbb{R}: -5\leq x\leq 1\}$ d) $\{x\in\mathbb{R}: -2\leq x\leq 3; x\neq 0\}$

e) $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ f) $\mathbb{R}\setminus\{0;-2\}$

45. Los intervalos de la figura 2.61 representan el análisis de signo de las inecuaciones fraccionarias que aparecen en la columna B. Identifica a cuál de las inecuaciones corresponde cada uno.

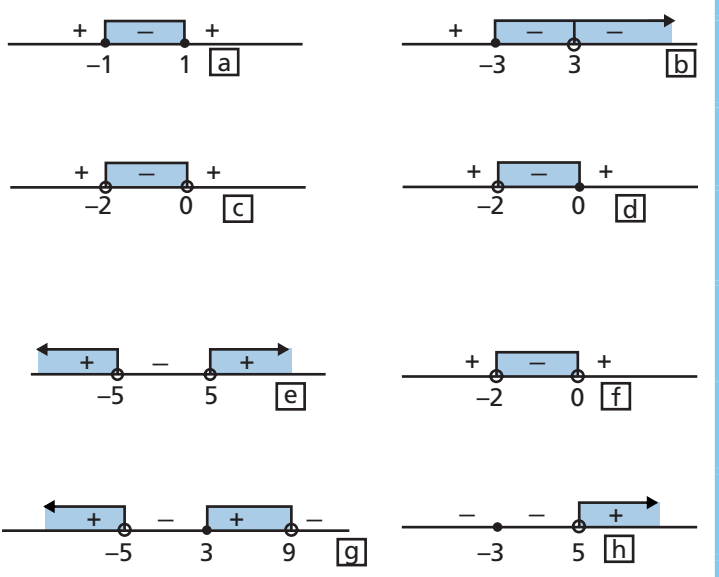
A	B
	a) $\frac{x+5}{x-5} > 0$
	b) $\frac{x}{x+2} \leq 0$
	c) $\frac{x+2}{x} < 0$
	d) $\frac{x^2-1}{x^2+1} \leq 0$
	e) $\frac{x^2+6x+9}{x-5} \geq 0$
	f) $\frac{x^2+4x+4}{x} < 0$
	g) $\frac{15x-5x}{x^2-81} \geq 0$
	h) $\frac{15x-5x}{x^2-9} \leq 0$

Fig. 2.61

46. Un estudiante resuelve la inecuación $\frac{x^2+2x-60}{x-4} < 1$ y obtiene como conjunto solución $(-\infty;8) \cup [-4;7]$. El profesor le dice que cometió errores.

Identifica los errores cometidos por el estudiante y elabora una inecuación fraccionaria que se corresponda, con la solución dada.

2.4 Sistema de ecuaciones lineales y cuadráticas

Para modelar y resolver diversas situaciones reales o hipotéticas, relacionadas con tu vida, la ciencia y la tecnología, tales como: problemas de tipo económico donde haces diferentes inversiones y obtienes distintas ganancias por concepto de interés, problemas de mezclas, aleaciones y disoluciones de sustancias y otros relacionados con compra de productos de diferentes precios y en diversas cantidades, necesitas de determinados conocimientos matemáticos que te ayudarán

a modelar situaciones como las descritas anteriormente, los que consolidarás o aprenderás en este epígrafe.

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

Una persona interesada en las plantas ornamentales conversa con su vecina, la cual le dice que fue a un vivero donde cada planta grande se vende a dos veces el precio de una pequeña, y agrega: compré cinco plantas grandes y tres pequeñas, aunque si hubiera comprado tres grandes y cinco pequeñas habría gastado $ 20.00 menos. Si se desea saber el precio de cada tipo de plantas:

¿Qué relaciones puedes establecer para dar solución a la situación planteada?

¿Por medio de qué vías pueden determinar el precio de los dos tipos de plantas?

De grados anteriores ya conoces los sistemas de ecuaciones con dos variables, estos generalmente se aplican cuando se desconocen dos de los elementos de una situación planteada.

Recuerda que...

Se denomina sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables reales a los sistemas que tiene la forma $\begin{cases} a_1x - b_1y = c_1 \\ a_2x - b_2y = c_2 \end{cases}$, con a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 valores reales, donde a_1, a_2, b_1 y b_2 no sean ceros simultáneamente.

Mediante un sistema de ecuaciones de este tipo podemos resolver la situación planteada al inicio del tema.

x: Precio de las plantas grandes

y : Precio de las plantas pequeñas

$x = 2y$ (porque el precio de una planta grande equivale a dos veces el precio de una pequeña)

Primera ecuación: $x - 2y = 0$

Segunda ecuación: $3x + 5y = (5x + 3y) - 20$

$$2x - 2y = 20$$

$$x - y = 10$$

Planteo del sistema: $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - y = 10 \end{cases}$

La situación planteada se reduce a la resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables y para resolverlo ya conoces el método aditivo y el de sustitución, que aprendiste en grados anteriores.

Resolvamos el sistema por el método sustitución y utiliza tú el aditivo.

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \ (1) \\ x - y = 10 \ (2) \end{cases}$$

Despejamos x en la ecuación (1): $x = 2y$

Sustituimos x en la ecuación (2): $2y - y = 10$

$y = 10$

Luego: $x = 2 \cdot 10 = 20$

Respuesta: las plantas grandes cuestan cada una $ 20.00 y las pequeñas, $10.00 cada una. ♦

Recuerda que...

El conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables reales puede tener solución única, infinitas soluciones o no tener solución. Esto se puede comprender si se realiza la interpretación geométrica de las soluciones.

¿Qué significado geométrico tiene la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos variables?

Si se despeja la variable y en una ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ se obtiene una ecuación cuyas soluciones representan una función lineal, luego, utilizando estos resultados podemos obtener la solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables como se lustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.48

a) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ x = -10 - y \end{cases}$

El sistema tiene una sola solución, porque las pendientes de las rectas que corresponden a cada una de las ecuaciones son desiguales (las rectas se cortan en un punto).

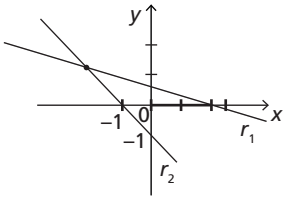


Fig. 2.62

r_1

x	0	2
$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0

r_2

x	0	−1
$y = -x - 1$	−1	0

b) $\begin{cases} y = -x \\ x = -1 - y \end{cases}$

El sistema no tiene solución porque las pendientes de las rectas que corresponden a las ecuaciones son iguales (las rectas son paralelas).

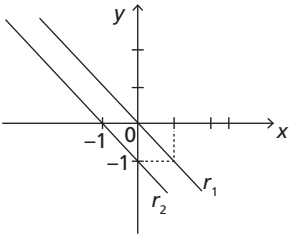


Fig. 2.63

r_1

x	0	1
$y = -x$	0	–1

r_2

x	0	–1
$y = -x - 1$	–1	0

c) $\begin{cases} 3y = -3x - 3 \\ x = -1 - y \end{cases}$

El sistema tiene infinitas soluciones porque las pendientes y los interceptos de las rectas con el eje de las ordenadas son iguales (las rectas son coindidentes). ♦

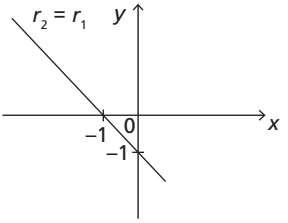


Fig. 2.64

r_1

x	0	1
$y = -\frac{3}{3}x - \frac{3}{3}$	–1	0

r_2

x	0	–1
$y = -x - 1$	–1	0

Reflexiona

¿Cuál es la relación entre los coeficientes de las variables de las ecuaciones en un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables reales para que el par de rectas que determina: a) se corten, b) sean paralelas o c) sean coincidentes?

Ejemplo 2.49

Sea el sistema: $\begin{cases} ay - (2a + b)x = b \\ -y - (a - b)x = a + b \end{cases}$

Determinar el valor de los parámetros a y b, para que el conjunto solución del sistema sea $S = \{(-2; -1)\}$

Resolución:

Como nos dan el conjunto solución del sistema, entonces los valores numéricos de las variables son $x = -2$ y $y = -1$, los cuales deben satisfacer

simultáneamente a las dos ecuaciones del sistema. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones y realizando las operaciones indicadas, se obtiene un sistema de ecuaciones en las variables a y b:

$$\begin{cases} -a+2(2a+b)=b & (1) \\ 1+2(a-b)=a+b & (2) \end{cases}$$

Efectuando se obtiene:

$$\begin{cases} 3a+b=0 & (1') \\ a-3b=-1 & (2') \end{cases}$$

Despejando en (1´) $b = -3a$ y sustituyendo en (2´) resulta:

$a - 3(-3a) = -1$

$a + 9a = -1$

$a = -0,1$

En consecuencia, $b = 0,3$.

Luego los valores de a y b son –0,1 y 0,3 respectivamente. ♦

Recuerda que...

En la aplicación del método de sustitución debes tener en cuenta los siguientes pasos:

- Despejar una variable en una de las ecuaciones.
- Sustituir la variable despejada en la otra ecuación y resolver la ecuación que se obtiene (obtener el valor de una variable).
- Sustituir el valor de la variable hallada en la ecuación donde se realizó el primer despeje y hallar su valor.
- Hacer la comprobación y dar la respuesta.

De la historia

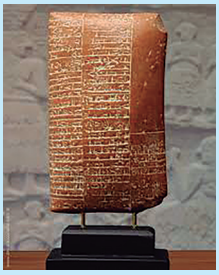


Fig. 2.65

Los babilonios conocían los sistemas de ecuaciones, ellos llamaban a la incógnita con palabras tales como longitud, anchura, área y volumen sin que tuviera relación con el problema que medía. De las tablillas babilónicas (figura 2.65) se pueden traducir relaciones como:

$\frac{1}{4}$ anchura + longitud = 7 manos;

longitud + anchura = 10 manos

Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables

En una mueblería se confeccionan tres tipos de muebles: sillas, sillones y sofás, para ello es necesario cierta cantidad de madera, plástico y aluminio, para cada tipo de mueble, como aparece en la siguiente tabla:

	Madera	**Plástico**	**Aluminio**
Sillas	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Sillones	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sofás	1 unidad	2 unidades	5 unidades

La mueblería tenía en existencia 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1 500 unidades de aluminio. Si se emplearon todas las unidades existentes de cada uno de los materiales, ¿cuántos muebles de cada tipo se confeccionaron?

¿Cómo podemos, utilizando variables, representar las relaciones que se establecen en el texto anterior?, ¿cuántas variables necesitas?

En este caso tienes tres incógnitas relacionadas en tres situaciones diferentes; luego los conocimientos hasta ahora no son suficientes para dar solución al este problema.

Definición 2.6

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables reales tiene la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Donde a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, y d_3 son coeficientes reales, los cuales en una misma ecuación no pueden ser simultáneamente nulos.

Son sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y=8 \\ x-y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=9 \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{6}-\frac{z}{8}=-1 \\ x-y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3z=-3 \\ 2y-z=12 \\ 2x-y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x+y}{3}=3z \\ 2x-y=2+z \\ x-\left(\frac{y+z}{5}\right)=0 \end{cases}$$

▲ ¿Qué significa resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables?

Seguramente estarás de acuerdo que significa encontrar las ternas ordenadas $(x; y; z)$ que satisfacen simultáneamente las tres ecuaciones.

▲ ¿Cuál es el procedimiento de resolución?

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres variables

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

- Debes tomar una pareja de ecuaciones y eliminar una variable, luego otras dos ecuaciones para eliminar la misma variable y de esta forma obtener dos nuevas ecuaciones con solo dos variables.
- Resuelves el sistema obtenido por uno de los procedimientos que ya conoces.
- Sustituyes los valores encontrados en una de las ecuaciones originales y hallas el valor de la otra variable.
- Realizas la comprobación en las tres ecuaciones originales del sistema.
- Escribes el conjunto solución.

Ejemplo 2.50

Determinar el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x-6y+2z=-2 \\ x+4y+3z=10 \\ 3x+5y+7z=13 \end{cases}$$

Resolución:

Si utilizas el procedimiento anterior puedes lograr el objetivo de encontrar la solución. Enumera las ecuaciones para facilitar su identificación. Veamos.

$$\begin{cases} 5x-6y+2z=-2 \ (1) \\ x+4y+3z=10 \ (2) \\ 3x+5y+7z=13 \ (3) \end{cases}$$

Toma las ecuaciones (1) y (2) para eliminar la variable *x*, observa que en la ecuación (2) la variable *x* tiene coeficiente 1.

$$\begin{cases} 5x-6y+2z=-2 \\ x+4y+3z=10 \end{cases}$$ Multiplica la ecuación (2) por –5

$$\begin{cases} 5x-6y+2z=-2 \\ -5x-20y-15z=-50 \end{cases}$$

$$\overline{-26y-13z=-52} \ | : -13$$

$$2y+z=4 \quad (4)$$

Toma las ecuaciones (2) y (3) y elimina la variable *x*.

$$\begin{cases} x+4y+3z=10 \\ 3x+5y+7z=13 \end{cases}$$ Multiplica la ecuación (2) por –3

$$\begin{cases} -3x-12y-9z=-30 \\ 3x+5y+7z=13 \end{cases}$$ Adiciona las ecuaciones

$$\overline{-7y-2z=-17} \quad (5)$$

Obtienes un sistema con las ecuaciones (4) y (5)

$$\begin{cases} 2y+z=4 \\ -7y-2z=-17 \end{cases}$$ Multiplica la ecuación (4) por 2

$$\begin{cases} 4y+2z=8 \\ -7y-2z=-17 \end{cases}$$ Adiciona las ecuaciones

$$-3y=-9$$

$y=\frac{-9}{-3}=3$ Sustituye *y* en la ecuación (4) para hallar valor de *z*

$$2(3)+z=4$$

$$z=-2$$

Para encontrar el valor de x sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales los valores encontrados. Escojamos la ecuación (3)

$$3x+5(3)+7(-2)=13$$
$$3x=12$$
$$x=4$$

Comprobación:

Sustituir $x = 4$; $y = 3$ y $z = -2$ en las tres ecuaciones del sistema original

En la ecuación (1) se tiene $5\cdot 4-6\cdot 3+2(-2)=20-18-4=-2$
En la ecuación (2) se tiene $4+4\cdot 3+3(-2)=4+12-6=10$
En la ecuación (3) se tiene $3\cdot 4+5\cdot 3+7(-2)=12+15-14=13$
El conjunto solución es $S=\{(4;3;-2)\}$ ♦



Saber más

Un sistema de tres ecuaciones lineales de la forma ($ax + by + cz = d$) con tres variables, geométricamente significa encontrar los puntos de un plano que satisfacen estas ecuaciones en el espacio:
(1) la solución es una terna ordenada (x; y; z) cuando los tres planos se intersecan en un punto.
(2) la solución es infinita, en este caso una recta (o un plano cuando estos son coincidentes).
(3) no tienen solución si los planos son paralelos, o por lo menos dos de ellos.

Ejemplo 2.51

Seleccionar la respuesta correcta en cada caso:

1. Los valores $x = 4$; $y = -3$ y $z = 1$ satisfacen al sistema:

a) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-3y-8z=9 \\ x+2y-z=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ 2x-3y-8z=9 \\ x+2y-z=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y=11 \\ 3x+5z=17 \\ 2x+5y+4z=-3 \end{cases}$

2. Si $x = 3$; $y = 5$ y $z = -2$ satisfacen al sistema $\begin{cases} x+az=-3 \\ by-z=12 \\ cx-y=1 \end{cases}$ entonces:

a) $a = -3$, $b = -5$ y $c = -2$ b) $a = 3$, $b = 5$ y $c = 2$ c) $a = -3$, $b = 2$ y $c = 2$

3. El conjunto solución (S) del sistema $\begin{cases} 2x - z = 14 \\ y - z = 1 \\ 3x - y + 5z = 53 \end{cases}$ es:

a) $S = \{10; -7; 6\}$ b) $S = \{(7; 10; 6)\}$ c) $S = \{(10; 7; 6)\}$

Resolución:

1. a) Los valores $x = 4$; $y = -3$ y $z = 1$ satisfacen a las ecuaciones $x + y - z = 0$ y $2x - 3y - 8z = 9$, pero no son solución de la ecuación $x + 2y - z = 5$ ya que si sustituyes la variable x por 4, la variable y por -3 y la variable z por 1 no obtienes una proposición verdadera, porque $4 + 2(-3) - 1 = -3$ y $-3 \neq 5$, luego los valores $x = 4$; $y = -3$, y $z = 1$ no son soluciones del sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y - 8z = 9 \\ x + 2y - z = 5 \end{cases}$

b) Los valores $x = 4$; $y = -3$ y $z = 1$ no satisfacen a ninguna de las ecuaciones del sistema, luego los valores $x = 4$; $y = -3$ y $z = 1$ no son solución del sistema $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2x - 3y - 8z = 9 \\ x + 2y - z = 5 \end{cases}$

c) Al sustituir los valores $x = 4$; $y = -3$ y $z = 1$ y en las ecuaciones $2x - y = 11$, $3x + 5z = 17$ y $2x + 5y + 4z = -3$ se obtienen igualdades verderas por tanto los valores $x = 4$; $y = -3$ y $z = 1$ son solución del sistema $\begin{cases} 2x - y = 11 \\ 3x + 5z = 17 \\ 2x + 5y + 4z = -3 \end{cases}$

2. Para determinar los valores de a, b y c, sustituimos las variables x, y, z por $x = 3$; $y = 5$ y $z = -2$ en el sistema $\begin{cases} 3 - 2a = -3 \\ 5b + 2 = 12 \\ 3c - 5 = 1 \end{cases}$ de donde resulta que:

$a = 3$, $b = 2$ y $c = 2$.

3. c) $S = \{(10; 7; 6)\}$. ♦

Ejemplo 2.52

Hallar el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 180 \\ y = 3z \\ y - z = 30 \end{cases}$$

Resolución:

$$\begin{cases} x + y + z = 180 \quad (1) \\ y = 3z \quad (2) \\ y - z = 30 \quad (3) \end{cases}$$

Primera vía de solución, por sustitución:

Despejas y en la ecuación (3): $y = z + 30$

Sustituyes la ecuación (2) y la ecuación (3) despejada en la ecuación (1):

$3z + z + 30 + z = 180 \quad (4)$

Resuelves la ecuación:

$5z = 180 - 30$

$5z = 150$

$z = 30$

Sustituyes z en la ecuación (2): $x = 3 \cdot 30 \rightarrow x = 90$

Sustituyes z en la ecuación (3) despejada: $y = 30 + 30 \rightarrow y = 60$

Luego $S = \{(90; 60; 30)\}$

Segunda vía de solución, por reducción:

Organizas la ecuación (2): $x - 3z = 0$

$$\begin{cases} x + y + z = 180 \quad (1) \\ x - 3z = 0 \quad (2) \\ y - z = 30 \quad (3) \end{cases}$$

Tomas las ecuaciones (1) y (2) y eliminas x, que es la variable que falta en la ecuación (3):

$$\begin{array}{ll} x + y + z = 180 & x + y + z = 180 \\ x - 3z = 0 \cdot |(-1) & \underline{-x + 3z = 0} \\ & y + 4z = 180 \quad (4) \end{array}$$

Resuelves el sistema formado por las ecuaciones (3) y (4):

$$\begin{array}{ll} y - z = 30 \cdot |(-1) & -y + z = -30 \\ \underline{y + 4z = 180} & \underline{y + 4z = 180} \\ & 5z = 150 \rightarrow z = 30 \end{array}$$

Después continúa como la primera vía. ♦

Ya estarás en condiciones de darle solución a la problemática planteada al inicio del subepígrafe sobre la cantidad de muebles que de cada tipo se podían confeccionar con las 400 unidades de madera, las 600 unidades de plástico y las 1 500 unidades de aluminio

Seguramente la declaración de la variable la hiciste de la siguiente manera:

Sean: x: cantidad de sillas que se confeccionaron
y: cantidad de sillones que se confeccionaron
z: cantidad de sofás que se confeccionaron

El planteo del sistema es el siguiente $\begin{cases} x+y+z=400 \\ x+y+2z=600 \\ 2x+3y+5z=1500 \end{cases}$

La resolución del sistema por cualquiera de los métodos estudiados condujo a obtener $x = 100$; $y = 100$ y $z = 200$ aunque por las características del sistema seguramente aplicaste el método aditivo.

Posteriormente comprobaste los valores de las variables en el texto del problema y finalmente estarás en condiciones de dar la respuesta como se ilustra a continuación

Respuesta: se confeccionaron en la mueblería 100 sillas, 100 sillones y 200 sófas

De la historia

Thymaridas de Paros (400 – 350 a. n. e.) (figura 2.66) encontró una fórmula para resolver determinados sistemas de n ecuaciones con n incógnitas, se creó entonces la regla conocida como "La flor de Thymaridas". En esa época Diophantes resuelve problemas matemáticos donde aparecen los sistemas de ecuaciones, pero nunca encontró un método general.

Fuente:<http://revistasuma.es/IMG/pdf/56/055-061.pdf>.

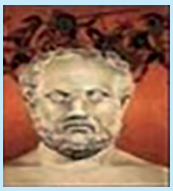


Fig. 2.66

Como te había comentado puedes emplear GeoGebra para resolver un sistema de ecuaciones

▲ ¿Cuál es el procedimiento usando GeoGebra?

Si quisiéramos determinar las coordenadas del punto de intersección de los planos dados por las ecuaciones $3x + 2y – 3z = 1$; $x + 3y – 2z = –3$ y

$4x - y - 5z = 4$. Procederemos de forma análoga a la resolución de ecuaciones utilizando los comandos Cálculo simbólico, Resuelva y Soluciones.

En este caso para determinar las coordenadas del punto de intersección, seguramente te diste cuenta que debes resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+2y-3z=1 \\ x+3y-2z=-3 \\ 4x-y-5z=4 \end{cases}$$

Para ello puedes proceder de la manera siguiente:

Escribe encerrado entre llaves y separado por comas las ecuaciones e igual las incógnitas.

$\{3x+2y-3z=1,\quad x+3y-2z=-3,\quad 4x-y-5z=4\},\{x,y,z\}$

El sistema devolverá como única solución

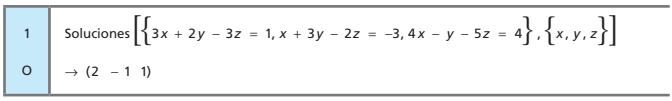


Fig. 2.67

Por tanto, los planos se intersecan en el punto de coordenadas (2;–1; 1).

Saber más



Fig. 2.68

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos o tres variables existe un método que se llama escalonado o Método de Gauss. Este consiste en obtener un sistema de ecuaciones equivalente al dado, pero escalonado. $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=p \\ b_2y+c_2z=q \\ c_3z=r \end{cases}$

Fuente: cide@dMatemática3^{0}ESD

Sistemas de ecuaciones cuadráticas

▲ ¿Qué es un sistema de ecuaciones cuadráticas?

Definición 2.7

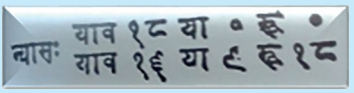
Se dice que un sistema de dos ecuaciones con dos variables es cuadrático, cuando al menos una de las ecuaciones que lo conforman es de grado dos.

▲ ¿Qué se entiende por resolver un sistema de ecuaciones cuadráticas?

Resolver un sistema de una ecuación lineal y una cuadrática o de dos ecuaciones cuadráticas con dos variables es hallar los pares ordenados $(x; y)$ que satisfacen simultáneamente a ambas ecuaciones.

En el sistema de ecuaciones formado por una ecuación lineal y una cuadrática se busca el punto de intersección de una recta con una curva de segundo grado. Si el sistema de ecuaciones está formado por dos ecuaciones cuadráticas, se buscan los puntos de intersección de dos curvas.

¿? ¿Sabías que...?



Los indios ya en el siglo XII estudiaron problemas con varias incognitas. Los representaban por los nombres abreviados de los colores: amarillo, rojo, negro, etc. y situaban los coeficientes a la derecha de las abreviaturas y marcaban los términos negativos con un punto que colocaban encima del coeficiente.

Para resolver un sistema formado por una ecuación lineal y una cuadrática	**Para resolver un sistema formado por dos ecuaciones cuadráticas**
1. Se despeja una variable en la ecuación lineal. 2. Se sustituye la variable despejada en la ecuación cuadrática. 3. Se resuelve la ecuación cuadrática obtenida. 4. Se calculan los valores de la otra variable. 5. Se determinan los pares ordenados 6. Se escribe el conjunto solución.	1. Se aplica el método conveniente para eliminar una de las variables. 2. Se obtiene el valor de una variable. 3. Se sustituye el valor de la variable en la otra ecuación. 4. Se determina el valor de la otra variable. 5. Se determinan los pares ordenados. 6. Se escribe el conjunto solución.

Ejemplo 2.53

Hallar el conjunto solución de los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} x^2 - 4y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 2y + y^2 = 1 \\ y - x = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ 5x^2 - 3y^2 = -28 \end{cases}$

Al igual que en los sistemas de ecuaciones lineales existen métodos de resolución analíticos y gráficos.

Resolución:

a) $\begin{cases} x^2 - 4y = 0 \ \ (1) \\ x + y = 3 \ \ (2) \end{cases}$

Despeja en (2)

$x + y = 3 \ \ (2)$

$y = 3 - x \ \ (3)$

Sustituye (3) en (1)

$x^2 - 4y = 0 \ \ (1)$

Ordenar

$x^2 - 4(3 - x) = 0 \ \ (1)$

$x^2 - 12x + 4x = 0$

$x^2 - 8x = 0$

$x(x - 8) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 8$

Sustituir en (3)

$y = 3 - x \ \ (3)$

Para $x_1 = 0$

$y = 3 - 0$

$y_1 = 3$

Para $x_2 = 8$

$y_2 = 3 - 8 = -5$

Respuesta: $S = \{(0; 3); (8; -5)\}$

b) $\begin{cases} x^2 - 2y + y^2 = 1 \ \ (1) \\ y - x = -3 \qquad (2) \end{cases}$

Despeja en (2)

$y - x = -3 \ \ (2)$

$y = x - 3 \ \ \ (3)$

Sustituye (3) en (1)

$x^2 - 2x + y^2 = 1 \ \ (1)$

$x^2 - 2x + (x - 3)^2 = 1$

$x^2 - 2x + x^2 - 6x + 9 - 1 = 0$

$2x^2 - 8x + 8 = 0 \mid : 2$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x - 2)^2 = 0$

$x_1 = 2$

Sustituir el valor de x en (3) y buscar y

$y = x - 3 \ \ (3)$

$y = 2 - 3 = -1$

Respuesta: $S = \{(2; -1)\}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ 5x^2 - 3y^2 = -28 \end{cases}$

En este sistema puedes aplicar el método aditivo, de manera análoga al trabajo con un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 & |\cdot(3) \\ 5x^2-3y^2=-28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2=60 \\ 5x^2-3y^2=-28 \end{cases}$$

$$8x^2 = 32$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$$

Sustituyendo $x_1 = 2$ en $x^2+y^2=20$

$$4+y^2=20$$

$$y^2=16$$

$$y_1 = 4 \qquad y_2 = -4$$

Sustituyendo $x_2 = -2$ en $x^2+y^2=20$

$$(-2)^2+y^2=20$$

$$4+y^2=20$$

$$y_1 = 4 \qquad y_2 = -4$$

$$S=\{(2;4);(2;-4);(-2;4);(-2;-4)\}\ \blacklozenge$$

Ejemplo 2.54

Hallar el o los puntos de intersección, si existen, de las curvas de ecuación:

$4x^2+4y^2+12y-7=0$ y $y=2x^2+3$

Resolución:

Ambas curvas no tienen puntos de intersección. Al sustituir; $y=2x^2+3$ en la ecuación $4x^2+4y^2+12y-7=0$ se obtiene una ecuación de cuarto grado, que no tiene solución real.

Este resultado se puede apreciar haciendo uso de un asistente matemático por ejemplo el GeoGebra.

Este asistente da la posibilidad de hacer el gráfico de curvas a partir de ecuaciones en las cuales no aparece expresada una variable en función de otra, de manera explícita. Una vez que se escribe cada una de las ecuaciones en la barra de entrada y se presiona Enter, entonces se grafican las curvas en la vista gráfica y se aprecian las ecuaciones en la vista algebraica. De este modo se puede obtener sucesivamente la gráfica de cada una de las curvas (figura 2.69).

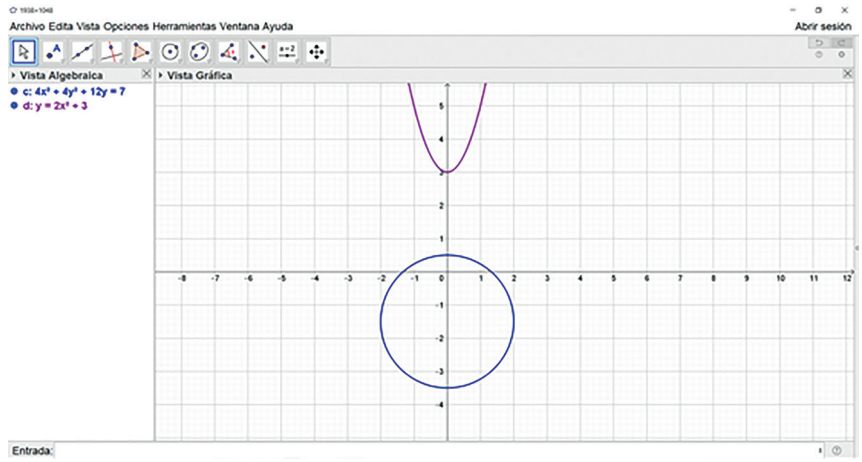


Fig. 2.69

GeoGebra 5 para computadora personal

Estas herramientas gráficas son especialmente útiles cuando las raíces de una ecuación son números irracionales o los puntos de intersección de dos o más curvas tienen coordenadas irracionales, y se quiere hallar valores aproximados.

Ejemplo 2.55

Determinar el conjunto solución del sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 11 \\ x \cdot y = 5 \end{cases}$

Resolución:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 11 \quad (1) \\ x \cdot y = 5 \quad (2) \end{cases}$$

Despejando en la ecuación (2) una de las variables, digamos en este caso la variable y se obtiene

$$y = \frac{5}{x} \quad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (1) y obtenemos:

$$x^2 + \frac{25}{x^2} = 11 \quad (4)$$

Multiplicando la ecuación (4) por el mcm de los denominadores resulta:

$$x^4 - 11x^2 + 25 = 0$$

Haciendo un cambio de variable $x^2 = z$ resulta: $z^2 - 11z + 25 = 0$

Luego resolvamos la ecuación $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$D = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 121 - 100 = 21$

$z_{1,2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{21}}{2} = \dfrac{11 \pm 4{,}6}{2}$

$z_1 = \dfrac{11 + 4{,}6}{2} \approx 7{,}8 \quad z_2 = \dfrac{11 - 4{,}6}{2} \approx 3{,}2$

Como $x^2 = z$ resulta:

$x_{1,2} = \pm\sqrt{7{,}8} \approx \pm 2{,}8 \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{3{,}2} \approx \pm 1{,}8$

Sustituyendo en la ecuación (2) y calculando obtenemos:

Para $x_1 \approx \pm 2{,}8$, $y_1 \approx \pm 1{,}8$
Para $x_2 \approx -2{,}8$, $y_2 \approx -1{,}8$
Para $x_3 \approx 1{,}8$, $y_3 \approx 2{,}8$
Para $x_4 \approx -1{,}8$, $y_4 \approx -2{,}8$

Respuesta: $S = \{(2{,}8;1{,}8);(-2{,}8;-1{,}8);(1{,}8;2{,}8);(-1{,}8;-2{,}8)\}$ ♦

Puedes comprobar la respuesta haciendo uso del GeoGebra (figura 2.70).

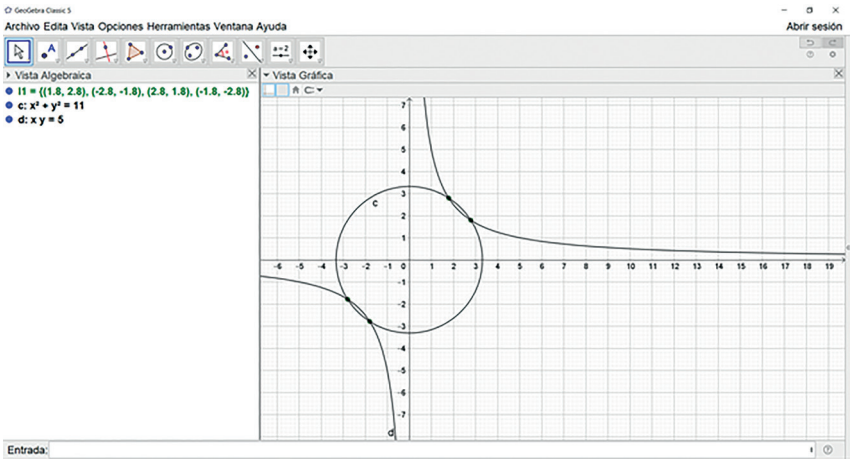


Fig. 2.70

Aplica tus conocimientos

Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 20 \\ y + x = k \end{cases}$ *determina para qué valores de k el sistema no tiene solución.*

Ejemplo 2.56

Cuando una persona camina *x* kilómetros por hora, el consumo de oxígeno en milímetros por minuto que requiere, está dada por la función cuadrática[8] de ecuación: $f(x)=\frac{5}{3}x^2+\frac{5}{3}x+10$ mientras que el consumo de oxígeno para una persona que corre *x* kilómetros esta dado por la función lineal de ecuación: $g(x)=11x+10$.

a) ¿Cuál es la velocidad que debe alcanzar la persona que corre y la que camina para que el consumo de oxigeno sea el mismo?
b) Representar gráficamente ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas.
c) ¿Qué sucede si las velocidades superan el consumo de oxígeno común encontrado en el inciso a)?

Resolución:

a) Se trata de buscar el punto de intersección de las graficas de las funciones *f* y *g* (una lineal y otra cuadrática), luego se forma el sistema:

$$\begin{cases} y=\frac{5}{3}x^2+\frac{5}{3}x+10 \\ y=11x+10 \end{cases}$$

$\frac{5}{3}x^2+\frac{5}{3}x+10=11x+10$ — Se emplea el método de igualación y se eliminan los denominadores para facilitar el cálculo

$5x^2-28x=0$
$x(5x-28)=0$ — Al factorizar el primer miembro de ecuación cuadrática que se obtiene

$x_1=0$ o $x_2=\frac{28}{5}$ — Al obtener los valores de *x* se obtiene

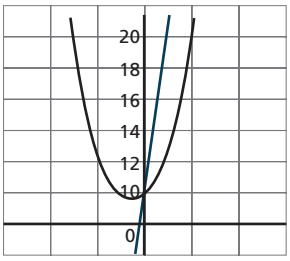


Fig. 2.71

El consumo de oxígeno es el mismo cuando la velocidad de las personas es de 5,6 km/h.

Posterior al punto donde el consumo de oxígeno coincide, gráficamente se puede apreciar mejor que es mayor el de la persona que camina. ♦

[8] Verónica Poblete Oviedo: *Matemática en la Salud,* Universidad de Santiago de Chile.

Resolución de problemas que se modelan mediante sistemas de ecuaciones

Para resolver un problema debes:

- comprender el problema, para lo cual debes hacer una lectura y análisis del texto
- tener en cuenta las partes lógicas (problemas parciales) en las que se puede subdividir el texto del problema.

La separación del texto en sus partes lógicas o problemas parciales es muy importante, porque así el texto queda dividido en partes más pequeñas, sin perder su idea central, lo cual facilita una mejor y más rápida comprensión.

¡Atención!

Para esta separación se pueden tener en cuenta los signos de puntuación y los conectores. Estas partes lógicas pueden ser escritas de manera separada para que nos facilite su comprensión.

▲ ¿Cómo lograr la comprensión del problema?

1. Algunas preguntas que te pueden ayudar en esta actividad son:
   ¿De qué trata el problema?
   ¿Qué me piden?
   ¿Qué información brinda el texto del problema?
   ¿Qué relaciones se establecen en el texto del problema?
   ¿Qué palabras clave aparecen en esta relación?
   ¿Cómo se representan las relaciones utilizando variables?
   ¿Cómo representar con variables a las incógnitas?
2. Volver a leer el problema, por medio de las partes lógicas que se relacionan en este y en función de lo que piden, realizar la declaración de las variables.
3. Proceder a traducir cada parte lógica del lenguaje común al lenguaje algebraico o viceversa.

Para ello debes utilizar las variables, que deben ser cuidadosamente seleccionadas de acuerdo con lo que se necesita traducir y declarando el significado que tendrán; en este proceso de traducir se escribirán

relaciones matemáticas, teniendo en cuenta las ideas expresadas en cada parte lógica, valorando, si es necesario, la posibilidad de elaborar una tabla o una figura para ayudar a comprender la situación.

Es muy importante una vez declaradas las variables, aunque sean cantidades desconocidas en valores, que se asuman como conocidas, para operar con ellas como si fueran números, o sea, buscar relaciones matemáticas entre ellas que permitan más tarde poder escribir la ecuación o el sistema de ecuaciones. Para ello:

- Te detienes en la primera parte lógica, precisa qué elementos se relacionan en esta, cuál es la relación que se establece entre los datos que se ofrecen en el problema y qué relación guardan estos datos con la(s) incógnita(s) determinada(s).
- Pasa al resto de las oraciones y procede al mismo análisis.
- Selecciona según lo planteado el modelo matemático (ecuación, sistema de ecuaciones o cálculo aritmético) que te permite modelar la situación planteada.
- Resuelve según sea el caso las relaciones determinadas.
- Te preguntas si es lógico el resultado obtenido en función de las condiciones del problema.
- Comprueba la solución en el texto del problema, verifica el razonamiento realizado, así como, el análisis de otras vías de solución y si la vía empleada fue, o no, la más racional.

Ejemplo 2.57

Dos brigadas de estudiantes de un IPU se propusieron recoger conjuntamente en un día 280 cajas de tomates. Después de terminar la jornada de la mañana, la Brigada 1 había recogido las dos quintas partes de la cantidad de cajas que se propuso y la Brigada 2 el 60 % de la cantidad de cajas propuestas, quedando por recoger entre las dos 142 cajas. ¿Cuántas cajas de tomates le faltan por recoger a cada brigada en la jornada de la tarde para completar el total de cajas que se propusieron?

Como puedes observar en el texto en las partes lógicas determinadas se declara la cantidad de cajas propuestas para recoger, por tanto, puedes declarar las variables:

Cantidad de cajas que se propuso recoger la brigada 1: a

Cantidad de cajas que se propuso recoger la brigada 2: b

Al separar las partes lógicas puedes determinar las relaciones entre las variables:

Dos brigadas de estudiantes de un IPU se propusieron recoger conjuntamente en un día 280 cajas de tomates. $a + b = 280$ (1)

Después de terminar la jornada de la mañana, la Brigada 1 había recogido las dos quintas partes de lo que se propuso $\frac{2}{5}a$ y la Brigada 2 el 60 %luego $b = \frac{60}{100}b = \frac{3}{5}b$.

Quedaban por recoger entre las dos 142 cajas. A la Brigada 1 le quedaban por recoger $\frac{3}{5}a$ y a la Brigada 2 le quedaban por recoger $\frac{2}{5}b$, obteniéndose la ecuación $\frac{3}{5}a+\frac{2}{5}b=142(2)$ y con las ecuaciones (1) y (2) formamos el sistema $\begin{cases} a+b=280(1) \\ \frac{3}{5}a+\frac{2}{5}b=142(2) \end{cases}$.

$$\begin{cases} a+b=280 & |(-3) \\ 3a+2b=710 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a-3b=-840 \\ 3a+2b=710 \end{cases}$$

$$-b=-130$$

$$a+b=280$$

$$a=280-130$$

$$a=150$$

Al resolver el sistema, sustituyendo en (1) $150+b=280$ y despejando b se obtiene $b = 130$.

Ahora, ¿cuántas cajas de tomates le faltan por recoger a cada brigada en la jornada de la tarde para completar el total de cajas que se propusieron?

La brigada 1 había recogido las dos quintas partes de lo que se propuso: $\frac{2}{5}a$, por tanto, como $a = 150$, entonces, $\frac{2}{5}(150)=60$, faltaban por recoger 150 – 60 = 90 cajas. La Brigada 2 el 60 % de la cantidad propuesta, es decir si $b = 130$, entonces $\frac{3}{5}(130)=78$, de ahí que le faltaban por recoger 130 – 78 = 52 cajas.

La comprobación la realizas en el texto del problema.

Dos brigadas de estudiantes de un IPU se propusieron recoger conjuntamente en un día 280 cajas de tomates: 150 + 130 = 280

Después de terminar la jornada de la mañana, la Brigada 1 había recogido las dos quintas partes de lo que se propuso y la Brigada 2 el 60 % de lo propuesto, quedando por recoger entre las dos 142 cajas: $\frac{3}{5}(150)+\frac{2}{5}(130)=90+52=142$

Respuesta: a la brigada 1 le faltaron por recoger 90 cajas de tomates y a la brigada 2, le faltaron 52 cajas de tomates por recoger.

El procedimiento descrito para la comprensión de un problema lo puedes adaptar a cualquier tipo de problema pues son acciones generales. ♦

Ejemplo 2.58

Un Ingeniero Agrónomo de una Cooperativa de Producción Agropecuaria (CPA) confeccionó la siguiente tabla para realizar un balance de la cantidad de tierras destinadas a la siembra de viandas y hortalizas en los años 2021 y 2022. ¿Cuántas hectáreas la CPA dedicó a la siembra de cada uno de estos cultivos en el año 2022?

Cantidad de hectáreas (ha) de tierra sembradas			
Año	**De hortalizas**	**De viandas**	**De los dos cultivos**
2021	x	y	30,9
2022	$x+25\%x=x+\frac{1}{4}x$	y	35,5

Si observas la tabla puedes comprender que la relación puede estar representada por el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y=30,9 & (1) \\ x+\frac{1}{4}x+y=35,5 & (2) \end{cases}$$

Al resolver el sistema se obtiene $x = 18,4$ y $y = 12,5$.

Para determinar la cantidad de hectáreas sembradas de hortalizas en el 2022 debemos sustituir en la expresión $x+\frac{1}{4}x$ y calcular obteniendo que:

$$x+\frac{1}{4}x=18,4+\frac{1}{4}(18,4)=18,4+4,6=23$$

Respuesta: en el año 2022 en la CPA sembraron 23 ha de hortalizas y 12,5 ha de viandas. ♦

Ejemplo 2.59

Cuando vayas a la playa, al campismo o simplemente cuando estés en casa, puedes preparar un sabroso jugo que se obtiene mezclando agua de coco, jugo de zanahoria y zumo de limón. Para obtener un vaso de jugo (200 mL) debes conocer en qué proporciones mezclarlos y cómo proceder. La tercera parte de la cantidad del agua de coco debe exceder en 5 mL a la cantidad de mililitros que se utilicen de zumo de limón; además, la cantidad de zumo de limón y de jugo de zanahoria deben estar en la razón 3:25. Se recomienda endulzar el jugo con miel de abejas y que al final se bata todo. Con la descripción realizada puedes determinar fácilmente las cantidades necesarias de cada producto para obtener un vaso de jugo. Entonces, ¿cuántos mililitros de cada ingrediente emplearías para obtener un litro de este sabroso jugo?[9]

Resolución:

Lee detenidamente la receta (el problema) para que encuentres qué necesitas hallar y cómo expresar los datos que te dan. De nuevo introduzcamos variables. ¿Cuáles son las cantidades de los ingredientes que se van a utilizar?

x: cantidad de mililitros de agua de coco para un vaso de jugo
y: cantidad de mililitros de jugo de zanahoria para un vaso de jugo
z: cantidad de mililitros de zumo de limón para un vaso de jugo
¿Cómo está conformada la mezcla?
$x + y + z = 200$ mL

¿Cómo expresar que la tercera parte de la cantidad de agua de coco excede en 5 mL a la cantidad de mililitros de zumo de limón?

$$\frac{x}{3} - 5 = z \quad \text{o} \quad \frac{x}{3} = z + 5$$

La razón entre la cantidad de zumo de limón y de jugo de zanahoria quedaría expresada como $\frac{z}{y} = \frac{3}{25}$.

Luego se puede plantear el sistema siguiente para averiguar el valor de las incógnitas.

[9] Datos tomados de la *Revista Energía y tú.* 2009

$$\begin{cases} x + y + z = 200 \\ \dfrac{x}{3} - 5 = z \\ \dfrac{z}{y} = \dfrac{3}{25} \end{cases}$$

De la resolución del sistema se obtiene $x = 60$; $y = 125$ y $z = 15$.

Mediante la comprobación en el texto del problema se verifica que los valores obtenidos satisfacen las condiciones de este:

Para obtener un vaso de este sabroso jugo se deben emplear:

60 mL de agua de coco

125 mL de jugo de zanahoria

15 mL de zumo de limón

Como se debe buscar la cantidad necesaria para un litro (1000 mL) y este contiene 5 vasos, deben multiplicarse cada una de las cantidades obtenidas por cinco.

Respuesta: para un litro de jugo deben utilizarse 300 mL de agua de coco, 625 mL de jugo de zanahoria y 75 mL de zumo de limón. ♦

Puedes comprobar también que la resolución ha sido correcta usando la opción Resolver en la vista de Cálculo Simbólico del asistente matemático GeoGebra (figura 2.71 A).

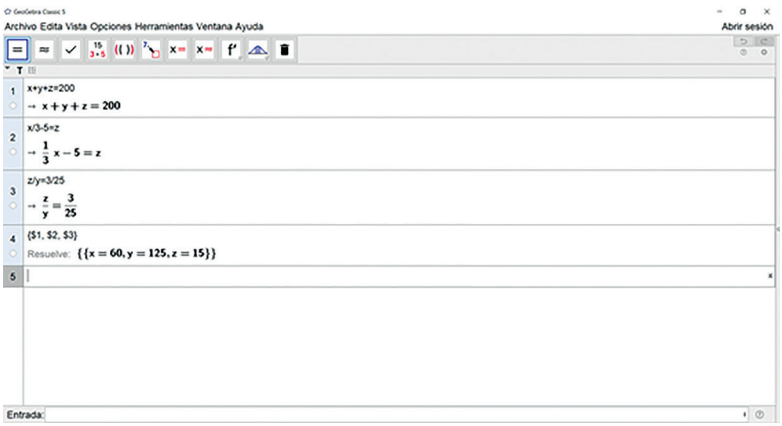


Fig. 2.71 A

Basta agregar las ecuaciones en cada fila, seleccionarlas y utilizar la herramienta Resuelve.

Aplica tus conocimientos

Imagina que fuiste a una librería a comprar algunos útiles escolares con unos amigos. Uno de ellos compró 10 gomas de borrar, 4 carpetas y 3 marcadores, por lo que pagó $ 125.00; el otro pidió 5 gomas de borrar, 2 carpetas y un marcador, por lo que pagó $ 57.50; mientras que tú pediste una goma de borrar y 3 marcadores, pagando $ 31.50.

a) ¿Cuáles son las ecuaciones que representan la compra que realizó cada uno?
b) ¿Cuál es el sistema de ecuaciones con el cual podrías resolver esta situación?
c) ¿Cuáles son los costos de cada goma de borrar, carpeta y marcador
d) Describe el procedimiento seguido.
c) Valora si existe otra vía de solución. En caso afirmativo descríbela.

En uno de los tratados chinos del siglo III a.n.e. (El capítulo nueve del arte matemático) se encuentra un famoso problema, llamado "El problema del bambú roto" que dice así:

Hay un bambú de diez pies[10] *de altura que está roto (figura 2.72), de tal manera que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base. ¿A qué altura se ha roto?*



Fig. 2.72

Para la solución se ha planteado el sistema:

$$\begin{cases} 3^2 + y^2 = x^2 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

a) Analiza junto a otros de tus compañeros o compañeras la fundamentación del sistema planteado para resolver el problema.
b) Determina la solución del problema.

Del software

Para comprender la Matemática
Módulos:
Trabajo con variables: Ejercicios 3, 4,18 y 16
Interpretación y formulación de problemas: Ejercicios 15,16,17,18 y 20

[10] Datos tomados de la *Revista Energía y tú.* 2009

Reflexiona sobre lo aprendido

¿Qué significado geométrico tiene la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables?

¿Qué procedimiento te permite resolver un sistema de tres ecuaciones con tres variables?

¿Qué características tienen los sistemas de ecuaciones cuadráticas?

¿Cuáles son las acciones que se deben seguir para dar solución a los problemas?

Ejercicios del epígrafe 2.4

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

1. Selecciona la respuesta correcta en cada caso.

1.1 Los valores $y = 0{,}5$ y $z = 0{,}2$ son solución del sistema:

a) $\begin{cases} 0{,}2y - 0{,}5z = 0{,}02 \\ 7y - 2z = -2{,}4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y - 1 = 2(z + 6) \\ y - 6 = 3(1{,}2z) \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0{,}6y + 5z = 1{,}3 \\ 2y - 0{,}3z = 0{,}94 \end{cases}$

1.2 El sistema de ecuaciones $\begin{cases} -4a + \frac{9}{5}b = 0{,}8 \\ 5a - 2b = 9 \end{cases}$

a) Tiene solución única. b) No tiene solución. c) Tiene infinitas soluciones.

2. Halla el conjunto solución de los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 4y = -15 \\ 2x + 3y = -11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 7 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{2} - 5y = 11 \\ 4x - 3y = 14 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{x - 3y}{7} = 2x + 7 \\ \frac{x + y}{3} = \frac{x - y}{5} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \frac{x - y}{5} + y = 6 \\ \frac{x + y}{3} = 15 \end{cases}$

3. Los valores de las variables s y t dependen de los valores de a y c de la ecuación $s = at + c$. Selecciona cuáles son los valores de a y c respectivamente si se sabe que si $t = 1$ el valor de $s = 4$, si $t = 2$ el valor de $s = 6{,}5$.

a) $5\ y\ \frac{3}{2}$ b) $\frac{2}{5}y - \frac{3}{5}$ c) $\frac{2}{5}\ y\ \frac{3}{5}$ d) $\frac{5}{2}\ y\ \frac{3}{5}$

Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables

4. Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} x+y+z=7 \\ 6x+2y+2z=6 \\ 2x+4y+z=12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+3y-z=5 \\ 3x-5y+8z=17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 3x\quad -z=-1 \\ 2x+7y\quad =6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4y+3z=25 \\ 2x+3y\ =9 \\ 4x-2z=-2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3D+4E+F=-9 \\ E+F=0 \\ -2D+9E+F=-4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2D+5E-5F=-5 \\ D+3F=-3 \\ 2E-F=12 \end{cases}$

5. Halla los valores de las variables que satifacen los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} x+y+z=7 \\ 3x+3+y=z \\ 2x+4y-12=-z \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2D+F=2 \\ 3E-2F=22 \\ 2D-E=13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2D-E=1 \\ D+3F=-3 \\ 2E-F=12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 3x-5z=-1 \\ 2x+7y=6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2D+5E-5F=-5 \\ D+4F=3 \\ E+3F=9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ x+y=\dfrac{1}{2} \\ x-3y+4z=2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x-y+z=4 \\ -x+3y-2z=1 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x+3y+z=11 \\ x-2y+3z=6 \\ -x+y-z=-2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 7-\dfrac{5x+3y-6z}{2}=2(3-y) \\ x-y-z=1 \\ \dfrac{6x-y-5z}{45}=0 \end{cases}$

6. Determina las ternas que satisfacen los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} 3x+2y-5z=3 \\ x-2y+3z=1 \\ x+2y-2z=13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-2z=1 \\ 2x+2y-z=6 \\ 3x+4y-3z=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-2y-z=1 \\ y+2z=5 \\ z=3 \end{cases}$

7. * Determina gráficamente (haciendo uso de GeoGebra) el punto de intersección de los tríos de planos dados por sus ecuaciones que aparecen a continuación:

a) $x+2y-z=1$ $\quad y+4z=-7$ $\quad z=-2$

b) $4x+8y-4z=4$ $\quad 3x+8y+5z=-11$ $\quad -2x+y+12z=-17$

7.1 Comprueba analíticamente la solución gráfica obtenida.

8.* Trabaja en equipo y determina los valores de *a*, *b* y *c* para que el sistema de ecuaciones que aparece a continuación tenga como solución (1; 1;-2).

$$\begin{cases} ax+by+cz=5 \\ \dfrac{bx}{2}+ay-cz=0 \\ ax+cy=0 \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones cuadráticas

9. Selecciona la respuesta correcta. Dado el sistema $\begin{cases} x-y=2 \\ y^2-x=4 \end{cases}$ las soluciones son:

a) los pares ordenados (5; 3) y (–5; –2)

b) $x = 3$ y $y = -2$

c) los pares ordenados (5; 3) y (0; –2)

d) $x_1 = 5$; $x_2 = 0$ y $y_1 = 3$; $y_2 = -2$

10. Halla el conjunto solución de los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} y^2-4x=0 \\ x+y=3 \end{cases}$ $\quad$ b) $\begin{cases} y^2+2x=2 \\ x+y=2 \end{cases}$ $\quad$ c) $\begin{cases} xy=-4 \\ x+3y=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} xy=32 \\ x-y=0 \end{cases}$ $\quad$ e) $\begin{cases} x^2+4x+4=y \\ y-4=x \end{cases}$ $\quad$ f) $\begin{cases} x^2+y^2-4x-4=0 \\ y+x=2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x^2+y=4 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ $\quad$ h) $\begin{cases} x^2-4y^2=13 \\ x+2y=13 \end{cases}$ $\quad$ i) $\begin{cases} x^2+5y^2=24 \\ 4x-3y=14 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x^2+3y^2=12 \\ 5x^2-y^2=44 \end{cases}$ $\quad$ k) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=52 \\ x+y=8 \end{cases}$

11. Determina los pares ordenados que se obtienen al resolver los sistemas que aparecen a continuación

a) $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$ $\quad$ b) $\begin{cases} x^2=y \\ x-y+2=0 \end{cases}$ $\quad$ c) $\begin{cases} y=x^2+5 \\ y=x-10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x^2+2y^2=59 \\ x^2-4y^2=-55 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x^2-5y^2=52 \\ 3x^2-7y^2=80 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y=29 \\ xy=100 \end{cases}$

12. Identifica cuáles son las soluciones de cada uno sistemas de ecuaciones siguientes:

Sistemas	Soluciones
a) $\begin{cases} x^2-y^2=16 \\ x-y=4 \end{cases}$	A. $(-1;3)\,y\,(-21;-7)$
b) $\begin{cases} x^2-y^2=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$	B. $(0;3)\,y\,(0;-3)$
c) $\begin{cases} y^2+2x=7 \\ x-2y=-7 \end{cases}$	C. $(4;0)$
d) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ 4y^2=36-9x^2 \end{cases}$	D. $(4;3),(4;-3)(-4;3)\,y\,(-4;-3)$

13. Construye:

a) Un sistema de ecuaciones lineales y un sistema cuadrático cuyo conjunto solución sea $S=\left\{\left(-\frac{1}{2};4\right)\right\}$.

b) Dos sistemas de ecuaciones lineales y dos sistemas cuadráticos que sean equivalentes entre sí.

c) Un sistema cuadrático cuyo conjunto solución sea $S = \{(0;1), (-1;0)\}$

14. Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+ay-3=0 \\ bx+1=2y \end{cases}$$

Determina los valores de los parámetros a y b para que el conjunto solución del sistema sea $S = \{(3; 8)\}$. Verifica gráficamente en GeoGebra el resultado obtendo.

15.* Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y+24=3ax \\ -ax+y=4 \end{cases}$$

a) ¿Cuáles números naturales puede aceptar el parámetro a para que las soluciones del sistema dado sean pares ordenados de números naturales?

b) Haciendo uso del asistente GeoGebra, determina las soluciones del sistema dado según las condiciones del inciso anterior.

Resolución de problemas que se modelan mediante sistemas de ecuaciones

16. Anachel y Anaimel fueron a la tienda a comprar las cosas necesarias para una excursión, en total llevaron $ 600.00 para los gastos. Anaimel gastó nueve décimos de su dinero y Anachel el ochenta por ciento del suyo y regresaron entre las dos con un total de $ 80.00 ¿Cuánto dinero llevó cada una para realizar la compra?

17. En una primera etapa de una competencia de clavado la razón de los puntos obtenidos por Noah e Ian es de 10 a 13. Si en la segunda etapa Noah acumula 10 puntos más e Ian solo 4, entonces estarán empatados. ¿Cuántos puntos acumularon Noah e Ian en la primera etapa?

18. Entre dos estudiantes de medicina Lázaro y Belén debían pesquisar en una jornada para la detección de personas con síntomas de la Covid-19, 80 casas. A las 12:00 m, Lázaro había visitado el 60 % de las que le asignaron y Belén, la mitad de las suyas. Si a esa hora le faltaban por visitar, entre ambos, 36 casas.

a) ¿Cuántas casas fueron asignadas a cada estudiante?

b) ¿Cuántas casas había visitado Lázaro a las 12:00 m?

19. En una fábrica se envasa refresco en pomos de 1,5 L y 2 L. En una jornada de trabajo se envasaron 5 500 L y se utilizaron 3 000 pomos.

a) ¿Cuántos pomos de cada tipo se utilizaron?

b) ¿Qué tanto por ciento del total de litros envasados, fue en pomos de 2 L?

20. El perímetro de un triángulo es igual a 30 cm. La suma de las longitudes del lado mayor y del mediano es igual al quíntuplo de la longitud del menor. El 75 % de la longitud del lado mediano es menor en 4 que la longitud del mayor.

a) ¿Cuánto mide cada lado?

b) ¿Es dicho triángulo rectángulo? Argumenta tu respuesta.

21. Las verduras y hortalizas poseen propiedades beneficiosas para las personas que las consumen. Así, por ejemplo, el valor energético (kcal) que poseen la col, el berro y la espinaca juntas es de 81 kcal. Completa la siguiente tabla, si se conoce que la cantidad de las calorías que proporcionan la col y el berro superan en 17 kcal a las que brinda la espinaca,

mientras que la diferencia entre la cantidad de las calorías que brindan la espinaca y el berro es 11 kcal.

Verduras y hortalizas	Valor energético (kcal)
Col	
Berro	
Espinaca	

22. Tres brigadas recogieron en un día 800 q de papas. La brigada B recogió una cantidad igual al 60 % de los que recogieron conjuntamente las otras dos brigadas. La brigada A recogió 40 q menos que la cantidad promedio de quintales recogidos por las otras dos brigadas.

a) ¿Cuántos quintales recogió cada brigada?

b) Si la brigada A tenía 16 integrantes, la B tenía 20 y la C, 17 integrantes. ¿Cuál de las tres brigadas tuvo mejor rendimiento por integrante?

23. Una cooperativa tiene 54 ha de tierras que están sembradas con viandas, hortalizas y árboles frutales. El 50 % de la cantidad de hectáreas dedicadas a árboles frutales son dos menos que las dedicadas a las viandas. Si la cantidad de hectáreas dedicadas a las hortalizas exceden en dos a las dedicadas a las viandas, ¿cuántas hectáreas están dedicadas a cada cultivo?

24. Un total de 64 profesores de una escuela estudian maestría en Ciencias Exactas, Ciencias Naturales y en otras maestrías. La cantidad de los que están en Ciencias Exactas excede en 33 a los que estudian Ciencias Naturales; se sabe que la cantidad de profesores que estudian en otras maestrías representa el doble de los que estudian Ciencias Naturales disminuida en 9. ¿Qué cantidad de profesores estudian en cada maestría?

25. Un centro recreativo estudiantil tiene 24 mesas de tres tipos: unas de 4 sillas, otras de 6 y otras de 10. La cantidad total de asientos es de 148. Para la realización de una actividad científica solo se utilizó: la mitad de la cantidad las mesas de 4 sillas, $\frac{1}{4}$ de la cantidad de las mesas de 6 sillas y la tercera parte de la cantidad de las mesas de 10 sillas, de esta forma se emplearon 9 mesas. ¿Cuántas mesas de cada tipo hay en el centro recreativo estudiantil?

26. En un salón había un bombillo ahorrador, uno fluorescente y uno incandescente que consumían un total de 120 W·h. El incandescente consumía tanto como los otros dos juntos y el fluorescente la mitad de la cantidad de watts hora que los otros dos juntos. ¿Cuántos watts hora consume cada tipo de bombillo?

27. En una actividad hay 100 personas entre mujeres, hombres y menores. Uno de los participantes advierte que la cantidad de mujeres y hombres coincide con la cantidad de menores y que el número de mujeres representa el 25 % de los hombres y menores participantes, con estos datos determina:

a) ¿Cuántos hombres o mujeres se quedarían sin bailar, en una rueda casino? Suponiendo, que se baila en parejas y que todos los hombres y mujeres presentes en la actividad les gusta el baile y bailan.

b) ¿En cuánto supera, o no, el porciento de menores presentes respecto al porcentaje de mujeres que asistieron, y respecto al total de personas que asistieron?

28. El arrojo al medio ambiente de desechos sólidos como son las bolsas plásticas, los envases de aluminio y las tarjetas magnéticas conlleva problemas ambientales por el tiempo que demora su degradación. Según datos se infiere que la degradación de un envase de aluminio supera en 50 años al duplo del tiempo que demora en degradarse una bolsa plástica, mientras que la degradación de una tarjeta magnética duplica el tiempo que requieren en degradarse una bolsa plástica y un envase de aluminio juntos. Si el 25 % del tiempo que demanda una tarjeta magnética en degradarse supera en 100 años al tiempo que demora una bolsa plástica.

a) ¿Cuántos años demora en degradarse cada uno de estos desechos sólidos?

b) ¿Cómo contribuyes tú al cuidado del medio ambiente?

29. Saray utilizó su tarjeta magnética para pagar los tres artículos electrodomésticos que compró en la tienda. Ella pagó por los tres artículos $ 117.00 tras el descuento del 10 % sobre el precio total. Si el precio del artículo C es el doble que el del artículo A y $ 20.00 más que el del artículo B ¿cuál es el precio de cada artículo?

30. Sheila es una joven aficionada a la fotografía, la pasada semana tomó algunas fotos con una cámara digital, cada fotografía de calidad

normal le ocupó 0,20 Mb[11] de memoria y cada una de las fotografías de óptima calidad ocupa 0,6 Mb. Si esta semana, llevó 24 fotografias que le ocuparon en total 9,2 Mb de memoria.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita conocer la cantidad de fotos de cada tipo.
b) ¿Es posible que la cantidad de fotos tiradas de esta semana sea diferente a las tiradas la semana anterior? Fundamenta.

31. En una obra de la construcción se utilizan lingotes de tres metales diferentes *A*, *B* y *C*. El primer lingote tiene 20 g del metal *A*, 20 g del metal *B* y 60 g del metal *C*. El segundo contiene 10 g del metal *A*, 40 g del metal *B* y 50 g del metal, mientras que el tercer lingote tiene 20 g del metal *A*, 40 g del metal *B* y 40 g del metal *C* y se quiere elaborar a partir de este uno nuevo que contenga 15 g del metal *A*, 35 g del metal *B* y 50 g del metal *C*. ¿Cuántos gramos de cada metal hay que tomar de cada uno de los tres lingotes para elaborar el nuevo lingote?

32. La figura 2.73 muestra la forma de un terreno rectangular de 432 m^2 de área. Las dimensiones del terreno son:

a) $x_1 = 6$ y $y_1 = 5$ b) $x_2 = 24$ y $y_2 = 18$

c) $x_3 = 18$ y $y_3 = 24$ d) $x_4 = 5$ y $y_4 = 6$

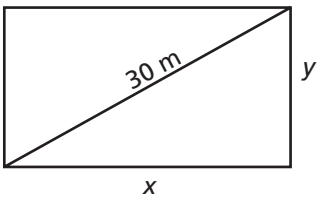


Fig. 2.73

33. Calcula la longitud de las diagonales de un rombo de120 cm^2 de área y 52 cm de perímetro.

34. * En la figura 2.74 se muestra el triángulo *ABC*, rectángulo en *C*. Determina los valores de *x* y *y*.

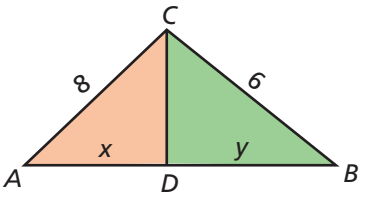


Fig. 2.74

35. Roberto está cercando un terreno que tiene forma rectangular. Cuando ha colocado alambre a dos lados consecutivos del terreno, se percata que ha gastado 170 m de alambre. Si al medir diagonalmente el terreno la longitud es de 130 m, ¿cuáles son las dimensiones y el área del terreno?

[11] Mb corresponde a la unidad de medida informática megabyte.

36. ¿Cuántos hombres, mujeres y menores hay en una familia sabiendo que si hubiera un niño más, el número de menores sería igual al de los hombres y las mujeres juntos, si hubiera 8 mujeres más, el número de estas doblarían a la suma de la cantidad de hombres y menores juntos? El triplo del número de hombres y el número de mujeres, es igual al número de menores aumentado en cinco.

37. El perímetro de un triángulo es de 15 dm. La longitud del lado mediano supera en dos decímetros al más pequeño y es 2,0 dm menor que el lado mayor. ¿Cuáles son las longitudes de los lados del triángulo?

38. Se tiene un cuadrado tal que cuando se disminuye la longitud de un lado en 2,0 dm y se aumenta la del lado consecutivo en el 75 % de su longitud, se forma un rectángulo de 40 cm de perímetro. Calcula la razón entre las áreas del cuadrado y del rectángulo.

39. La suma de las áreas de dos cuadrados diferentes es de 25 unidades cuadradas. Si se construye un rectángulo cuyos lados sean iguales a los lados de los cuadrados, su área sería de 10 unidades cuadradas. Calcula las dimensiones del rectángulo.

40. Junto a dos de tus compañeros de grupo elabora un texto para los sistemas de ecuaciones que aparecen a continuación. Solicítale a tu profesor que los revise y dé una evaluación.

a) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-y^2=16 \\ x-y=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=7 \\ 6x+2y+2z=6 \\ 2x+4y+z=12 \end{cases}$

Ejercicios del capítulo 2

1. Según el diccionario de la lengua española, vigésima segunda edición, la champola es un refresco hecho de guanábana y leche. En Cuba es un jugo o batido tradicional elaborado con guanábana o chirimoya y leche. Expresa en lenguaje algebraico la relación que existe entre los ingredientes si se sabe que:

- La cantidad de gramos de pulpa es superior en 58 g a la cantidad de gramos de leche.
- La cantidad de gramos de azúcar blanca debe ser la mitad de los gramos de leche disminuido en 49 g.

2. Expresa en un polinomio de segundo grado los segundos que hay en 5 h 35 min 53 s?

3. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas tienen como dominio definición a $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$?

a) $\dfrac{x+3}{x^2-6x+9}$ b) $\dfrac{x+3}{x^2+6x+9}$ c) $x+3$

4. ¿Cuál es el valor numérico de $\dfrac{(a-2b)^2}{10a-20b}$ si $a=12$ y $b=27$?

5. Enlaza cada una de las siguientes expresiones algebraicas con el dominio de definición correspondiente.

Columna A	Columna B
1) $\dfrac{a-2}{(a+1)^2}$	a) $\mathbb{R}$
2) $\dfrac{a}{a^2+1}$	b) $\{a\in\mathbb{R}: a\neq 0\}$
3) $\dfrac{\sqrt{a}}{a-4}$	c) $\{a\in\mathbb{R}: a\neq -1\}$
4) $\dfrac{5a+4}{2a}$	d) $\{a\in\mathbb{R}: a\neq 1\}$
5) a^2+5a+4	e) $\{a\in\mathbb{R}: a\neq 2\}$
	f) $\{a\in\mathbb{R}: a\geq 0; a\neq 4\}$

6. ¿Qué valores de la variable indefinen las siguientes expresiones algebraicas?

a) $\dfrac{2y-3a}{y(y+9)}$ b) $\sqrt{x+8}$ c) $\dfrac{13}{a^2-1}$ d) $\dfrac{17}{6x(x-2)}$ e) $a-\dfrac{11}{a}$

7. Escribe al menos dos expresiones algebraicas que tengan como dominio de definición a:

a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ c) $\{a\in\mathbb{R}: a\geq 0\}$

d) $\{a\in\mathbb{R}: a\neq 2; a\neq 0\}$ e) $\mathbb{R}\setminus\{2;5\}$ f) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

8. Dada la expresión algebraica $\dfrac{1-x}{x(x-3)^2}$, identifica el significado que tienen los conjuntos o valores que se describen en la primera columna.

Conjunto/ valores	Significado
A. $\{x \in \mathbb{R}: x \neq 0; x \neq 3\}$	1. Valores que anulan la expresión.
B. $x_1 = 0$ o $x_2 = 3$	2. Conjunto de valores para los cuales la expresión es positiva.
C: $\{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 1\}$	3. Dominio de definición.
D. $x = 1$	4. Conjunto de valores para los cuales la expresión es negativa.
E. $\{x \in \mathbb{R}: x < 0$ o $x > 1; x \neq 3\}$	5. Valores inadmisibles

9. ¿Cuáles de las proposiciones son verdaderas para todos los valores admisibles de la variable?

a) $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ b) $a^2 - b^2 = (a-b)^2$ c) $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$

d) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ e) $3(a+4) = 3a+12$

10. De la expresión algebraica $\frac{x(x+a)}{(x+b)(x+c)}$ se conoce que

- Su dominio de definición es $\{x \in \mathbb{R}: x \neq 3; x \neq -4\}$.
- Los valores que anulan a la expresión son $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$.

Determina los valores de los parámetros a, b y c.

11. Una expresión algebraica tiene la forma $\frac{(x+b)(x+c)}{x^2+d}$ y en ella se cumple que:

- La variable x puede tomar cualquier valor real.
- Los valores que anulan a la expresión son $x_1 = 4$ y $x_2 = -2$.

Halla los valores de los parámetros b, c y d.

12. * Una persona camina la misma cantidad de kilómetros diarios de lunes a jueves, de viernes a domingo camina 6 km cada día. ¿Cómo escribes en el lenguaje algebraico la distancia recorrida en cierta cantidad de días de la semana?

13. El período de oscilación (T) de un péndulo se determina por la ecuación $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ donde l es la longitud del péndulo (cm) y g la aceleración de la gravedad, que es constante.
¿Cuál es el dominio de definición de la variable en la ecuación?

14. * Haciendo uso de las variables:

a) Expresa el área de los triángulos isósceles en función de la longitud de sus lados (l) sabiendo que su perímetro es de 10 u.

b) Determina el dominio de definición de la variable.

15. Para calcular el área total de un cuerpo cilíndrico se emplea la expresión $A_T = 2\pi r^2 + \pi rh$. Despeja la variable h.

16. Uno de los entretenimientos más instructivos son los crucigramas, te sugiero jugar y aprender. Completa el crucigrama de la figura 2.75 en tu libreta.

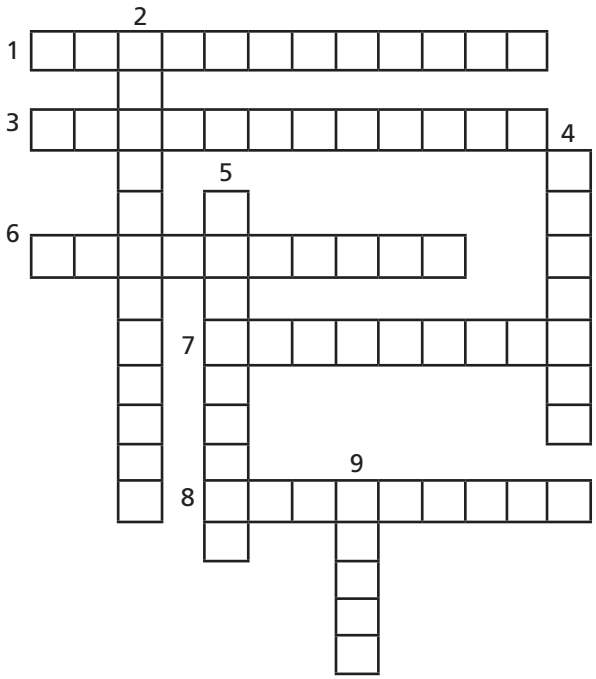


Fig. 2.75

Horizontales

1-Ecuación de cuarto grado con potencias pares en la variable.

3-Desigualdad que contiene variables.

6-Transformar en producto.

7-Valores que no puede tomar la variable en una expresión algebraica.

8-Conjunto de todos los valores de la variable comprendidos en la doble desigualdad

Verticales

2-Valores numéricos de la incógnita.

4-Valores que puede tomar la variable en una expresión algebraica.

5- Expresión algebraica con más de dos términos.
9- Incógnita.

17. La Sociedad Científica sobre la Cultura Matemática de un preuniversitario está formada por m miembros entre hembras y varones, de ellos n son hembras, luego la expresión algebraica que expresa el porcentaje de miembros de la sociedad que son varones es:

a) $100-\frac{n}{m}$ b) $100-\frac{m}{n}$ c) $\left(\frac{m-n}{n}\right)\cdot 100$ d) $\left(\frac{m-n}{m}\right)\cdot 100$

18. Marcos y Carlos salieron juntos a comprar dulces para una pequeña actividad festiva que tendrán en la noche. Carlos compró x cantidad de pasteles por y precio y Marcos compró y cantidad de pasteles por x precio. Selecciona cuál es la expresión algebraica que representa el promedio de costo del total de pateles comprado por Carlos y Marcos.

a) xy b) $\frac{2(x+y)}{xy}$ c) $\frac{xy}{x+y}$ d) $\frac{2xy}{x+y}$

19. Identifica cuáles de las siguientes igualdades son falsas. Fundamenta tu selección.

a) $3(ab)=3ab$ b) $3x+xy+5x=9xy$

c) $\frac{4x+y}{2x}=2y$ d) $5(mn)=5m\cdot 5n$

e) $2x^2-7x-5x^2+1=-10x^5+1$ f) $\frac{3ab+b}{b}=3a+1$

20. *Juega con las expresiones algebraicas:
Piensa que estás hablando con uno de tus amigos sobre el número de video juegos que tiene cada uno donde la variable a representa el número de video juegos que tienes tú. Elabora un texto que describa la relación que existe entre ustedes, de acuerdo con las expresiones algebraicas que aparecen en la tabla. Fíjate en el inciso resuelto.

Incisos	Tú	Él	Descripción
a)	a	$a-5$	Yo tengo cinco videos menos que él.
b)	a	$2a+1$	
c)	$\frac{a}{3}+2$	a	

Incisos	Tú	Él	Descripción
d)	3a – 1	a	
e)	$2a$	$\frac{a}{2}+1$	

21. Identifica los errores que se han cometido al simplificar las expresiones que aparecen a continuación y fundamenta en qué consiste el error.

a) Cuando se reduce $5ab+6cb$ la respuesta es $11ab$

b) Al simplificar la expresión $\frac{m}{2m+n}$ el resultado es $\frac{1}{2+n}$

c) El resultado es $A + B$ al simplificar la fracción $\frac{Ax+By}{x+y}$

d) Las ecuaciones $2x + 5 = 11$ y $x+5=\frac{11}{2}$ tienen el mismo conjunto solución

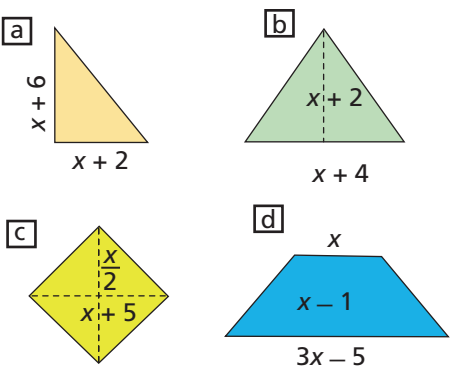
e) Al resolver la ecuación $x^2+5x=6$ se obtiene como resultado $x_1=0$ y $x_2=-5$

22. Demuestra que:

a) $\left(2\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}+1\right)^2-10x=-6x-104-20\sqrt{2}$

b) $\left(\sqrt{2}x-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)+\frac{1}{2}\left(4x^2-8\right)=4x^2-2x\sqrt{6}-3$

23. Relaciona cada una de las figuras que aparecen a continuación, con la expresión algebraica que expresa su área.



a) $2x^2-\frac{9}{2}x+\frac{5}{2}$

b) $\frac{x^2}{2}+4x+6$

c) $\frac{x^2}{2}+3x+4$

d) $\frac{x^2}{4}+\frac{5}{4}x$

Fig. 2.76

24. La expresión $\dfrac{(a+b)(a^2-b^2)}{b-a}$ es igual a:

a) a^2+b^2 b) b^2-a^2

c) $-(a+b)^2$ d) $(a+b)^2$

25. Identifica qué expresión algebraica corresponde al área del cuadrado sombreado de la figura 2. 77.

a) $(a+b)(a-b)$ b) $(a-b)^2$

c) $(a+b)^2$ d) a^2-b^2

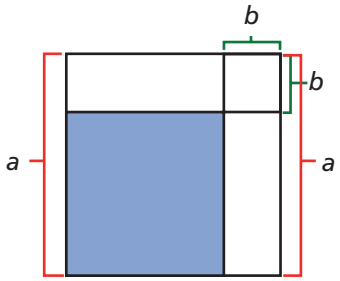


Fig. 2.77

26. Determina sin efectuar la división, cuáles de las divisiones son exactas.

a) $(x^3-14x^2-x-10):(x+2)$

b) $(x^2-x-6):(x-3)$

c) $(2x^4-5x^3+7x^2-9x+3):(x-1)$

d) $(x^5+x^4-5x^3-7x+8):(x+3)$

27. Halla la expresión algebraica $A(x)$, sabiendo que:

$$A(x):\left(-\frac{4}{3}x+2\right)=x^3+9x^2-6x-5$$

28. Para qué valores de k el polinomio x^2+kx+4 es divisible por $(x-3)$

29.* Calcula el valor del parámetro p de forma tal que los polinomios $3x^2-4x+p$ y $2x^2-8x-p$ tengan el mismo resto al dividirse por $(x+1)$

30.* Si $A=\left(\sqrt[4]{2+\sqrt{5}}\,x\right)^8$ y $B=x^2+4\sqrt{5}x$.

Comprueba que para todo valor admisible de la variable se cumple que $A-B=\log_2 16$

31. ¿Para qué valor de k se obtiene como resto 7 al dividir $x^2-3x+2k$ por $x+2$?

32. ¿Cuáles de los valores que aparecen a continuación hacen cierta la igualdad $n^3+125=0$?

a) $n=-125$ b) $n=125$ c) $n=-5$ d) $n=5$

33. Transforma las sumas algebraicas que aparecen a continuación de forma que contengan un cuadrado perfecto:

a) $x^2 - 6x$ b) $a^2 + 3a$

c) $y^2 + z^2$ d) $p^2 + \frac{1}{4}$

e) $q^4 + 81$ f) $x^2 + 2x + 5$

34. Transforma en producto las siguientes expresiones algebraicas:

a) $ax + bx + ay + by$ b) $1 - x + 2a(1 - x)$

c) $(x+1)(x-2) + 3y(x-2)$ d) $(a+1)(a+3) - 4(a+1)$

e) $125(x+1) + x^6(x+1)$ f) $27(a^2 - 4) - x^3(a^2 - 4)$

g) $a^3(a-1) - 512(a-1)$ h) $b^3(b-1) - (b-1)$

35. Despeja las variables indicadas en el paréntesis en cada una de las fórmulas siguientes:

a) Una de las fórmulas utilizadas en aerodinámica es $P = \frac{C_d \cdot R_0 \cdot V^2}{2}$; (V)

b) Área del trapecio $A = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h$; (b_2)

c) Coeficiente de dilatación de un líquido $K = \frac{V_2 - V_1}{V_1 t}$; (V_2)

d) Ley general del estado gaseoso $\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2}$; (V_2)

e) Similaridad de las especies $IJ = \frac{C}{A + B + C} \cdot 100$; (c)

36. Determina el conjunto de solución de las ecuaciones siguientes:

a) $x(x-1) - 5(x-2) = 2$

b) $(x+4)^2 = 2x(5x-1) - 7(x-2)$

c) $\frac{5x+2}{x-2} = 3x - 1$

d) $\frac{x+2}{x} + \frac{x-1}{x-2} = 0$

37. Demuestra que las siguientes igualdades son válidas:

a) $\frac{a^2 + a}{a} - a = 1$

b) $\frac{4}{m+n} + \frac{2m - 2n}{n^2 - m^2} = \frac{2}{m+n}$

c) $\frac{6y - 3xy}{5y} - \frac{12 + 4x}{10} = -x$

38. Si $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$ son las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + a = 0$ los valores de los parámetros a y b son:

a) $a = -3$ y $b = -4$ b) $a = -3$ y $b = 4$

c) $a = 3$ y $b = 4$ d) $a = 3$ y $b = -4$

39. Halla el valor de $m \in \mathbb{R}$ para los cuales las raíces de la ecuación:

a) $2x^2 + (1-4m)x - 2m = 0$, sean diferentes.

b) $(m-2)x^2 - (m+1)x + (m+1) = 0$, sean iguales.

40. Una raíz de la ecuación $3x^2 - 11x + k = 0$ es 3. Halla la otra raíz.

41. Una raíz de la ecuación $x^2 - kx + 24$ es 6. Determina la otra raíz y el valor de k.

42. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces son el opuesto de los valores de k que hacen que la ecuación $kx^2 - (k+2)x - \frac{1}{4} = 0$ tenga una solución.

43. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean el triplo de las raíces de la ecuación $\frac{4x+1}{x+3} = x - 5$.

44. Uno de los ceros de la ecuación $c + bx - x^2 = 0$ es $x_1 = -2$ y el otro es la solución de la ecuación $\frac{1}{x-2} + 1 = \frac{x^2-3}{x^2-2x}$. Determina los valores de c y b.

45. ¿Para qué valores de k la ecuación tiene una, dos o ninguna solución real?

a) $x^2 + kx + 10k = 0$ b) $x^2 + kx + 9 = 0$

c) $x^2 + 6x + k = 0$ d) $\frac{3k}{x} - \frac{2x}{k} = 1$

46. Determina cuál es solución de cada una de las inecuaciones. Realiza los cálculos que fundamentan tu decisión.

Inecuación	*Solución*
A) $2 + x < 9x + 6$	a) $x \geq -4$
B) $3x + 5 \leq -7x + 8$	b) $x > -6$
C) $2x + 3 < 5x + 8$	c) $x \leq \frac{3}{10}$
D) $2x + 3 \leq 3x + 7$	d) $x \leq -\frac{7}{3}$
E) $2x \geq 5x - 7$	e) $x > -\frac{1}{2}$

F) $x+12<5x$ f) $x<\frac{23}{6}$

G) $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}-1<\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}$ g) $x>-\frac{5}{3}$

H) $\frac{3x}{2}-5-\frac{x}{2}<-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}$ h) $x>3$

47. Del portal educativo CubaEduca busca el tema inecuaciones lineales, realiza los ejercicios de autoevaluación correspondiente al tema.

48. *La inecuación $\frac{x+a}{(x+b)(x+c)}\geq 0$ tiene como conjunto solución a: $(-3;2)\cup[4;\infty)$

¿Cuáles son los valores de los parámetros *a*, *b* y *c*?

49. *Determina los valores de los parámetros *a*, *b*, *c*, y *d* en la inecuación: $\frac{(x+a)(x+b)}{cx+d}<0$ si su conjunto solución es $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)\cup(-2;1)$

50. * El conjunto de valores que satisfacen la inecuación $\frac{(x+5)^2}{(x+a)}\geq 0$ es: $(-\infty;0)\cup(1;\infty)$. Halla el valor del parámetro *a*.

51. La temperatura en las escalas Fahrenheit y Celsius están relacionadas por la fórmula $C=\frac{5}{9}(F-32)$. ¿A qué temperatura en la escala Fahrenheit corresponde el siguiente intervalo de temperatura en la escala Celsius $40\ ^\circ C\leq x\ ^\circ C\leq 50\ ^\circ C$?

52. ¿Para qué valores del intervalo $\left(\frac{3}{4};5\right]$ la expresión $\frac{x^2-2x+6}{x^2-4x+3}+\frac{2}{x-1}$ es no positiva?

53. Del portal CubaEduca realiza las actividades de aprendizaje relacionadas con las inecuaciones fraccionarias.

54. *Determina el valor de *m* en la ecuación $\frac{3}{m}=\frac{2m-1}{x+m}$, si su solución es 2.

55. Determina el conjunto solución de los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases}2x+y=7\\3x-2y=14\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x+5y=-6\\3x-4y=14\end{cases}$ c) $\begin{cases}5x=-3y\\2x-4y=26\end{cases}$

d) $\begin{cases}x=3y-5\\4x+6y=8\end{cases}$ e) $\begin{cases}y=2x+3\\y=5x-4\end{cases}$ f) $\begin{cases}y=2(x-3)\\2x+y=9\end{cases}$

g) $\begin{cases} x+y=0 \\ x+ay=1 \end{cases}$ $a \neq 1$

56. Determina el conjunto solución de los sistemas de ecuaciones que aparecen a continuación y verifica tu respuesta haciendo uso de GeoGebra.

a) $\begin{cases} x+y-z=-5 \\ 3x-2y+z=17 \\ x-3y+2z=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z=12 \\ 2x-y+z=7 \\ x+2y-z=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+4y-z=6 \\ 2x+5y-7z=-9 \\ 3x-2y+z=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x+5y+z=24 \\ 5x+2y-2z=-14 \\ 4x+y+3z=10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+4y+3z=3 \\ 10x-8y-9z=0 \\ 4x+4y-3z=2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x-z=14 \\ y-z=1 \\ 3x-y+5z=53 \end{cases}$

57. * Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6x-3y+5z=5a-2b \\ 4x+2y-z=3(2a+3b) \\ 5x-7y+3z=-4(a+b) \end{cases}$$

Comprueba que : $(x+y)-z=4b$.

58. Halla las ternas ordenadas $(x;y;z)$ que satisfacen simultáneamente las tres ecuaciones y compruébalo por medio del GeoGebra u otro asistente matemático:

a) $\begin{cases} 2x+4y+z=1 \\ 4x+3y-z=10 \\ 2x-y-2z=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 3x+8y-2z=7 \\ 4x-3y+4z=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-2y+z=-2 \\ -2x+13y-z=1 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$

59. Halla los pares ordenados que se obtienen al resolver los sistemas de ecuaciones siguientes. Comprueba tus resultados haciendo uso de un asistente matemático.

a) $\begin{cases} x+y=6 \\ x^2-y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x=y-5 \\ y+27=x^2-10x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2=41 \\ 3x-y=7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2=5x-y \\ 6x^2+4x=y+3 \end{cases}$

60. Sea el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 20 \\ y + x = k \end{cases}$

¿Para qué valores de k el sistema dado tiene una, dos o ninguna solución?

61. * Calcula el valor de "m" para que el sistema siguiente no tenga soluciones reales: $\begin{cases} y + 2 = mx \\ (x + y)(x - y) = 1 \end{cases}$

62. *¿Cómo debe ser la dependencia entre los parámetros a y b para que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 3 \\ 5x - 3y = 7 \\ ax + by = 5b \end{cases}$ tenga una solución única?

63. *Las soluciones del sistema de ecuaciones $\begin{cases} 6ax - y = 40 \\ -ax + y = 0 \end{cases}$ deben ser números enteros. Di qué números fraccionarios se pueden asignar al parámetro a para que el sistema satisfaga esa condición.

64. * Sea el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + ay - 3 = 0 \\ bx + 1 = 2y \end{cases}$. Determinar los valores de los parámetros a y b para que el conjunto solución del sistema sea $S = \{(-2; 5)\}$.

65. Como parte de la campaña *#CubaSalvaVidas* que se desarrolló en nuestro país durante el combate por la Covid-19, en los meses marzo-abril de 2020 varias brigadas del contingente Henry Reeve brindaron su colaboración en Europa y Oriente Medio. El mayor número de colaboradores hasta ese momento se encontraba en Catar y superaban en 100 a los colaboradores que prestaron servicio en Italia y el Principado de Andorra juntos, mientras que el número de colaboradores cubanos que laboró en Italia excedió en 12 al duplo de los que se encontraban en el Principado de Andorra. Si en este último hubieran laborado 9 colaboradores menos, entonces la presencia del personal de la salud cubano en el Principado de Andorra sería igual a la tercera parte de los que se encontraban en Italia.

a) ¿Cuántos colaboradores de la salud cubanos había en cada uno de estos países?

b) Si se conoce que en Italia los integrantes del contingente cubano atendieron las regiones de Lombardía y Plamonte y que el número de colaboradores en Lombardía representó aproximadamente

el 57,8 % del total de colaboradores cubanos en Italia, ¿cuántos colaboradores cubanos brindaron su asistencia sanitaria en la región de Plamonte?

c) Profundiza en la vida y obra de Henry Reeve y en el papel que jugó en la lucha independentista cubana.

(Datos de periódico *Granma* 27 de abril del 2020)

66. En el edificio donde vive Milena se ha roto el elevador. ¿Cuántos escalones hay hasta su piso, si se sabe que si sube de tres en tres los escalones, tiene que dar 30 pasos menos, que si sube de dos en dos?

67. Para la selección de los mejores estudiantes del presente curso escolar de un preuniversitario de nuestra provincia fueron propuestos inicialmente un total de 32 estudiantes entre hembras y varones. Después de reunirse el secretariado de la FEEM y realizar el análisis de cada uno de las propuestas, fueron escogidos finalmente el 80 % de las hembras seleccionadas y los dos tercios de la cantidad de varones, después de lo cual quedó la selección en 24 estudiantes. ¿Cuántas hembras y cuántos varones fueron propuestos inicialmente como mejores estudiantes?

68. En una granja se crían cerdos y gallinas ponedoras. En estos momentos se pueden contabilizar un total de 320 cabezas y 880 patas.

a) ¿Cuántos animales de cada tipo hay en la granja?

b) Si la granja tiene un convenio para abastecer a un poblado cercano, que necesita 5 000 huevos para repartir la canasta básica a sus pobladores, y las gallinas ponen como promedio unos 6 huevos diarios, ¿cuántos días se necesitan para cumplir el convenio?

69. Después del tornado ocurrido en La Habana, fueron destinados materiales para resarcir los daños a las viviendas de la población afectada. Para ello se utilizaron dos camiones, uno de 18 t de capacidad y otro de 25 t. En un día de trabajo se dieron un total de 15 viajes y se cargaron 305 t de materiales, para el municipio Diez de Octubre, uno de los más afectados.

a) ¿Cuántos viajes dio cada camión?

b) Si todas las toneladas de material se hubiesen trasladado en el camión de 25 t, ¿cuántos viajes hubiese tenido que dar?

70. En un terreno hay sembradas 30 ha entre ajo, col y lechuga. La razón entre la cantidad de hectáreas sembradas de ajo y col es 5:6. La diferencia entre las hectáreas sembradas de col y lechuga es igual a 4.

a) ¿Cuántas hectáreas hay sembradas de cada cultivo?

b) Si el rendimiento del tipo de ajo sembrado es de 14,7 t/ha, ¿cuántas toneladas por hectárea se deben lograr al finalizar la cosecha?

71. Con vistas a un chequeo de emulación que se efectuó en una Secundaria Básica de la capital, los estudiantes de 7.°, 8.° y 9.° grados recogieron un promedio de 75 kg de materia prima. Lo recogido por los estudiantes de 9.° grado representa la mitad de lo recogido por los otros dos grados conjuntamente y lo recogido por los estudiantes de 8.° grado fueron 18 kg menos que el 75 % de lo recogido por los de 7.° grado.

a) ¿Cuántos kilogramos de materia prima recogieron los estudiantes de cada grado?

b) ¿En cuántos kilogramos tendría que aumentar lo recogido por los estudiantes de 8.° grado, para que la media supere a la actual en 9 kg?

72. Un cajero automático contiene 95 billetes de 10 CUP; 20 CUP y 50 CUP para un total de 2 000 CUP. El número de billetes de 10 CUP representa el doble del número de billetes de 20 CUP. Determina cuántos billetes de cada tipo hay en el cajero.

73. Un ingeniero a cargo de una obra de construcción quiere conocer el diámetro de cada uno de los tres tipos de varillas que se han utilizado en la construcción las cuales se disponen de la forma que se muestra en la figura 2.78. Se conoce que la suma de las longitudes del diámetro de la mayor y de la mediana es de 1,250 cm; de la mayor y la más pequeña es de 1,625 cm, y de la mediana y la más pequeña es de 1,875 cm. ¿Cuál es el diámetro de cada varilla?

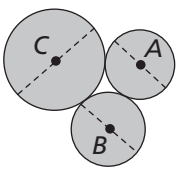


Fig. 2.78

74. Uno de los veterinarios del Zoológico Nacional considera que debe controlar la dieta de uno de los animales de manera tal que mensualmente consuma 75 lb de maíz, 60 lb de avena y 55 lb de soya. El veterinario cuenta con tres tipos de alimentos. Cada uno contiene maíz, avena y soya distribuidos de la forma siguiente:

Alimentos	Onzas de avena	Onzas de maíz	Onzas de soya
1 lb de mezcla A	6	5	5
1 lb de mezcla B	6	6	4
1 lb de mezcla C	4	7	5

¿Cuántas onzas de cada alimento debe utilizar para obtener la cantidad deseada?

75. Un número está compuesto por 3 cifras cuya suma es el doble de las cifras de las decenas. La cifra de las centenas es la mitad de la de las unidades, y cuando se invierte el orden de las cifras el número aumenta en 198. ¿Cuáles son los números?

76. Tres camiones con capacidad de carga de 3 t, 4 t y 7 t transportan 25 t de mercancías para un almacén, dándose para ello 6 viajes. El camión de 4 t dio dos viajes más que el de 7 t. ¿Cuántos viajes realizó cada uno?

77. Una empresa tiene tres camiones diferentes. En la tabla a continuación se describe cuántos contenedores de tres tipos distintos (A, B, C) puede cargar exactamente cada camión en un viaje.

Contenedores / Camiones	A	B	C
1	5	3	4
2	2	5	5
3	4	3	6

Si se han de transportar 45 contenedores del tipo A, 44 contenedores del tipo B y 58 contenedores del tipo C, ¿cuántos viajes ha de hacer cada camión, si todos los viajes los hacen totalmente llenos?

78. Para un encuentro entre amigos o familiares, te ofrecemos la receta de "Migas de Gato" cuyos ingredientes fundamentales lo constituyen los 676 g, de pan, aceite y ajo. ¿Cómo proceder?

Se remoja el pan hasta que esté blando y se sofríe en aceite, pero la diferencia entre las cantidades de estos dos ingredientes debe ser de 532 g, además el 25 % del aceite que se utiliza excede en 1 al duplo de los gramos de ajo necesarios. Adiciona a las migas de pan, una pizca de sal y

pimienta al gusto, revolviendo hasta que estén secas. ¿Cuántos gramos de cada ingrediente se necesitan para 30 raciones, si con las cantidades descritas se pueden preparar migas de gato para seis raciones?

79. * Un número de tres cifras se representa de la forma *abc*. Determínalo sabiendo que si lo escribes de la forma *cab*, el número disminuye 459 unidades, si lo escribes de la forma *bac*, el número disminuye 360 unidades y de la forma *bca* es 45 unidades menos que el básico.

80. Un terreno cuadrado y otro rectangular tienen en total 144 m^2. El largo del terreno rectangular excede a su ancho en 2,0 m y es igual al lado del cuadrado. ¿Qué porcentaje del área del terreno cuadrado es la del otro terreno?

Autoevaluación

1. En la figura 2.79 aparecen los cuadrados *ABCF*, *IJDF*, *GHEF*. Analiza y responde:

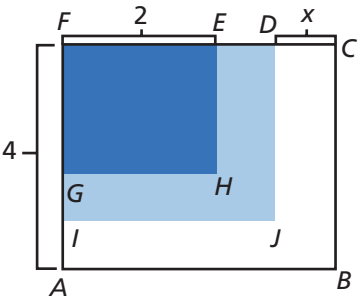


Fig. 2.79

1.1 La expresión algebraica que corresponde al área del cuadrilátero *IJDF* es:

a) $N = (4 - x - 2)^2$ $P = (4 - x)^2 - 4$

b) $Q = 16 - x^2 - 2^2$

1.2 ¿Cuál de los valores siguientes puede tomar la *x*? Fundamenta tu elección.

c) a) 2 b) 5 c) 8 d) 12

1.3 Determina el área del cuadrilátero *IJDF* para $x = 9\frac{1}{2}$.

2. Escribe un polinomio de grado tres que tiene como raíces 2; 3 y 5.

3. Determina cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas.

a) Algunas inecuaciones lineales con una incognita tienen solución única.

b) Algunas inecuaciones lineales con una incognita no tienen solución.

c) Un sistema de ecuaciones lineales con tres incognitas no siempre tiene solución.

d) En un sistema de ecuaciones, con una ecuación lineal y una cuadrática al menos siempre hay un par ordenado que lo satisface.

4 ¿Para qué valores de *x* se cumple que?

a) $|2x - 7| \leq 5$ b) $|4x + 3| > 7$

5. Identifica cuál es la inecuación que tiene como conjunto solución $(\infty;-3)\cup(-2;\infty)$.

a) $\dfrac{2(x+2)}{2(x+3)(x^2+1)}\geq 0$ b) $\dfrac{(x+3)(x^2+1)}{2(x+2)}>0$

c) $\dfrac{(x+3)(x^2+1)}{2(x+2)}\geq 0$ d) $\dfrac{(x+3)(x^2+1)}{2(x+2)}<0$

6. Si $A=\dfrac{2x-3}{x-3}$; $B=\dfrac{x+1}{x-4}$ y $C=x^3-3x^2-4x+12$. Analiza y determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles falsas. Fundamenta la falsa.

a) Las expresiones A y B tienen el mismo dominio de definición.

b) La expresión A se anula si $x=\dfrac{3}{2}$.

c) $A-B$ es no positiva para $\{x\in\mathbb{R}: x<3 \text{ o } x\geq 4\}$.

d) C toma valor cero si y solo si $x_1=-2$ o $x_2=2$.

e) El conjunto solución de la ecuación es $(x+5)^2-(x+1)^2=24$ es:
$S=\{-5;0\}$ b) $S=\{0;1\}$ c) $S=\{0\}$ d) $S=\varnothing$.

7. Sean las siguientes fracciones algebraicas

$$A=\frac{x^3-4x^2-7x+10}{3x^2+6x},\ B=\frac{x^2-25}{3x^2}\ \text{y}\ C=\frac{x(x-1)}{x+5}$$

a) ¿Qué valores de la variable anulan la fracción A?

b) Demuestra que $A:B=C$.

c) ¿Para qué valores de x no está definida la expresión $\sqrt{C}$?

8. En la figura 2.80 se muestra una caja de cartón de 420 dm^3 y las expresiones algebraicas correspondientes a las dimensiones de sus aristas.

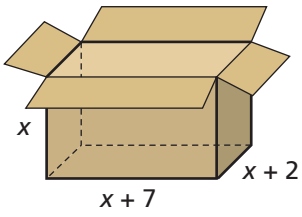


Fig. 2.80

a) Valora, si es posible o no, colocar en ellas cinco columnas de libros para ser transportados, sabiendo que la base de estas cinco columnas de libros, colocadas una al lado de la otra, ocupan 56,2 dm^2 de superficie.

b) Describe el análisis realizado, para la toma de decisión.

9. Un grupo de 20 estudiantes entre hembras y varones, reservaron un campismo en Pinar del Río. El día de la entrada a la base, el 25 % de

los varones que reservaron no pudo asistir, por lo que la cantidad de varones que asistieron excedió en uno a la cantidad de hembras.

a) ¿Cuántos varones asistieron al campismo?
b) Si el transporte que los llevó fue alquilado por un precio total de $ 680.00 ¿cuánto dinero más de lo previsto tuvieron que pagar los asistentes al campismo?

10. En tres almacenes se conservaban en total 5 000 sacos de arroz para la canasta básica. Por la proximidad de un ciclón y las malas condiciones del techo del almacén 1, se trasladaron 500 sacos para el almacén 2, por lo que ambos almacenes tienen ahora igual cantidad de sacos. Antes del traslado, los almacenes 1 y 3 tenían la misma cantidad de sacos.

a) ¿Cuántos sacos de arroz había inicialmente en cada almacén?
b) ¿En qué tanto por ciento aumentó la cantidad de sacos en el almacén 2, después del traslado?

11. El consumo eléctrico de una vivienda durante tres meses fue de 770 kW. Debido a la aplicación de algunas medidas de ahorro en el segundo mes de consumió 63 kW menos que en el primero. Pero en el tercer mes el ahorro fue mayor aún, pues en este mes se consumió 7 kW más que el 80 % de lo consumido el mes anterior.

c) ¿Cuál fue el consumo de cada mes?
d) ¿En cuántos kilowatts se sobrepasó o se redujo el consumo de la vivienda el cuarto mes con respecto al tercero, si se conoce que la media del consumo entre los cuatro meses fue de 249 kW?

12. Lee detenidamente el diálogo entre los estudiantes A y B que aparece a continuación sobre la relación que existe entre la recta de ecuación: $2x - y = -1$ y la curva cuya ecuación es $x^2 - y = 2$.

Estudiante A:— Estoy segura que la recta y la curva no tienen punto en común.

Estudiante B:— Yo no estoy de acuerdo contigo, pienso que deben tener dos puntos de intersección y para saberlo la única forma es, si las representamos gráficamente utilizando el GeoGebra.

Estudiante A:— Tienes razón, de esta forma verás que solo se intersecan en un punto.

Una vez leído di: ¿Cuál de los estudiantes consideras que tiene razón? Describe en tu libreta la fundamentación de tu valoración.

CAPÍTULO 3

Funciones modulares y potenciales de exponente entero

El concepto de función matemática es uno de los más importantes en el estudio, desarrollo y aplicación de esta disciplina, **¿sabes por qué?** Seguramente recuerdas que aprendiste en la Secundaria Básica, que las funciones numéricas están presentes en innumerables situaciones con las cuales interactuamos cotidianamente y, por supuesto, en variados fenómenos, sucesos y procesos que ocurren en la actividad científica y que resolviste ejercicios y problemas de funciones lineales y cuadráticas. Luego, sería interesante saber **¿qué vas a aprender en este capítulo?**

Comenzarás por conocer que ambas funciones numéricas, la lineal y la cuadrática son polinomiales en una variable real; la lineal es de primer grado y la cuadrática de segundo grado. Las funciones polinomiales son aquellas cuyas ecuaciones tienen la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, donde a_0 , a_1 , …, a_n son números reales, esto quiere decir que existen las funciones polinomiales de tercer grado, de cuarto grado, de quinto grado, y así sucesivamente. Significa que continuarás el estudio de las funciones a partir de sistematizar los conceptos de función, de función lineal y función cuadrática; conocerás nuevas funciones y resolverás ejercicios y problemas variados, relacionados con la propia Matemática y con otras áreas del saber, en las que estas tienen múltiples aplicaciones. Debes saber que son tantas que el mundo de hoy no podrá existir sin ellas.

3.1 Concepto de función. Funciones lineales y cuadráticas

El trabajo con funciones no es exclusivo del mundo contemporáneo, desde las primeras civilizaciones se establecieron relaciones entre elementos de dos conjuntos que expresan correspondencias funcionales. Es decir, la aplicación de las funciones en la práctica cotidiana y en el andar científico que acompañó al hombre, vienen desde la antigüedad, pero no se conocía por esos tiempos una definición formal y rigurosa del concepto como el que utilizamos hoy. Estas evidencias se revelan en las tablillas de barro babilónicas de la colección Plimpton, que data del año 1900 a.n.e.

De la historia

Galileo Galilei (1564-1642) (figura 3.1), fue de los primeros en utilizar un concepto de función, pero no como un objeto matemático independiente que esta disciplina debía estudiar. No fue hasta el siglo XVII fundamentalmente por los estudios realizados por Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) que se estableció la idea de función como una dependencia entre dos cantidades variables. De esta forma, asociados al concepto de función, aparecieron los términos "variable", "constante" y "parámetro". La notación $x = f(x)$ fue utilizada por primera vez por A. C. Clairaut (1713-1765), y por Leonhard Euler (1707-1783) (figura 3.2) en su obra *Commentarii de San Petersburgo*[1].



Fig. 3.1



Fig. 3.2

Seguramente también conoces la importancia que tuvieron los descubrimientos y aportes matemáticos realizados por Newton y Leibniz, lo cual trajo consigo, no solo el desarrollo de la disciplina, sino el de las herramientas, maquinarias e industrias, que no podían concebirse anteriormente por falta de conocimientos teóricos importantes.

¿Reconoces alguna función en las siguientes correspondencias?

- *A cada planeta del Sistema Solar se le hace corresponder el número de satélites naturales que posee.*
- *A cada vegetal se le hace corresponder las vitaminas que contienen.*
- *A cada trabajador de una fábrica se le hace corresponder el salario total que devenga en cada mes.*

[1] https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_matem%C3%A1tica#Historia

- *A cada ángulo de un triángulo se le hace corresponder su bisectriz.*
- *A cada número natural se le hace corresponder su cuadrado.*
- *A cada jugador que participa en una serie de béisbol se le hace corresponder su average de bateo.*

Primeros bateadores		
Apellido, Nombre	**Equipo**	**Ave.**
Delgado Castañeda, Jefferson	MTZ	.446
Duvergel Rojas, Giorbis	GTM	.400
Samón Matamoros, Yordanis	MTZ	.398
Abreu Sánchez, Osvaldo	GRA	.398
Robert Moirán, Luis	CAV	.392
Sánchez Sánchez, Ariel	MTZ	.376
Cepeda Cruz, Frederich	SSP	.373
Ayala García, Alexander	CMG	.373
Segura Morales, Leonel	CMG	.373
Urgellés González, Leonardo G.	IJV	.372
Gálvez Guerra, Dainier	IJV	.370
Cedeño González, Lázaro A.	GRA	.367
Saavedra Valdés, William	PRI	.363
Silva La O, Edilse	SCU	.363
Reyes Ortega, Raúl	VCL	.362
Jhonson Dixon, Jorge Antonio	LTU	.360
Enríquez Tamayo, Michel	IJV	.357
Gómez Mones, Rigoberto	IJV	.356
Medina Pérez, Aníbal	MTZ	.350
Sánchez Zayas, Yolbert	IND	.350
Soler Hinojosa, Geydi	HOL	.347
Reyna López, Andrés	SCU	.343
Casi Reyes, Gerardo (N)	IJV	.338

Fig. 3.3

Sería interesante saber *si existe alguna otra manera de definir el concepto de función ¿de cuántas formas se pueden representar las funciones?*

¿Si el dominio de definición y la imagen de una función, son siempre conjuntos finitos? ¿si existen funciones cuyo dominio no es numérico?

¿qué otras propiedades caracterizan a las funciones líneales y las funciones cuadráticas?

¿Cuáles son las principales aplicaciones de las funciones matemáticas en la práctica cotidiana y en el desarrollo de las ciencias?

Sistematización del concepto de función. Formas de representación de una función

Para reconocer si una correspondencia es una función aplicas la definición que estudiaste en octavo grado.

Recuerda que...

Una función *f* de *A* en *B* es **una correspondencia** en la que a **cada elemento** del conjunto *A* se le asocia un **único elemento** del conjunto *B.*

Reflexiona

¿Qué significado tienen las expresiones: **una correspondencia**; a **cada elemento**, **único elemento**?

Para representar una correspondencia entre dos conjuntos es apropiado utilizar los diagramas de Venn. Este tipo de representación permite determinar, de una manera más simple, cuándo una correspondencia es una función, a partir de las condiciones que plantea la definición.

Ejemplo 3.1

En la tabla 3.1 se representan correspondencias entre dos conjuntos, mediante diagramas de Venn. Explicar en cada caso si se trata o no de una función.

Tabla 3.1

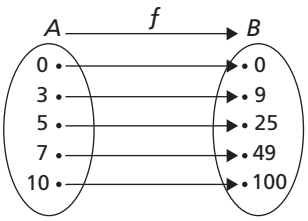
Correspondencia	Representación gráfica
a) A cada número →su cuadrado	

Fig. 3.4

b) A cada polígono
→ su cantidad de diagonales

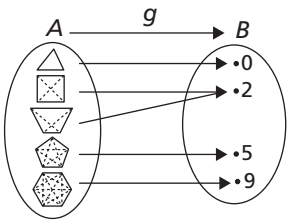


Fig. 3.5

c) A cada número
→sus divisores

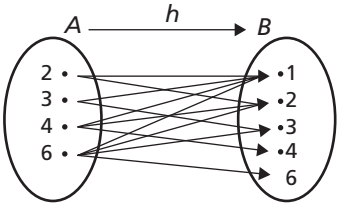


Fig. 3.6

d) A cada estudiante de un grupo
→su profesor de Matemática

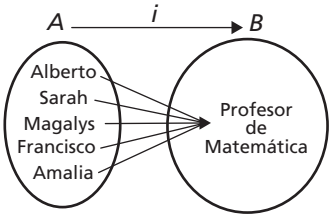


Fig. 3.7

e) A cada número entero
→su raíz cuadrada aritmética

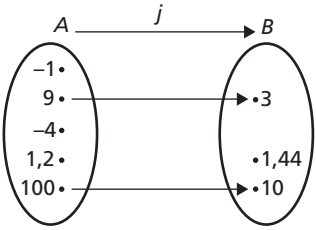


Fig. 3.8

Resolución:

a) La correspondencia *f* de *A* en *B* es una función, porque cada número del conjunto *A* tiene asociado un único número o elemento de *B*, su cuadrado.

b) La correspondencia *g* de *A* en *B* es una función, porque cada polígono del conjunto *A* posee exactamente una cantidad de diagonales; o sea, un único elemento del conjunto *B*.

c) La correspondencia *h* de *A* en *B* no es función, porque por lo menos a un elemento del conjunto *A* le corresponde más de un elemento en el conjunto *B*.

d) La correspondencia *i* de *A* en *B* es una función, porque cada estudiante del conjunto *A* tiene un solo profesor de Matemática; en este caso es el mismo para todos.

e) La correspondencia *j* no es una función de *A* sobre *B* porque existen elementos del conjunto *A* a los cuales no les corresponde ningún elemento en el conjunto *B*. ♦

Ejemplo 3.2

Analizar si las siguientes correspondencias numéricas son funciones:

a) *f*: correspondencia de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que a cada número natural le asocia su duplo.

b) *g*: correspondencia de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que a cada número natural le asocia su mitad.

c) *h*: correspondencia de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número natural no nulo le asocia su recíproco.

d) *i*: correspondencia de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que cada número natural impar, mayor o igual que 3, le asocia sus divisores distintos de la unidad.

Resolución:

a) $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ $0 \to 0$ $1 \to 2$ $2 \to 4$ $3 \to 6$ ..... $x \to 2x$	b) $\mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N}$ $0 \to 0$ 1 no tiene mitad en $\mathbb{N}$ $2 \to 4$ 3 no tiene mitad en $\mathbb{N}$ ..... $x \to \frac{x}{2}$	c) $\mathbb{N} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$ $1 \to 1$ $2 \to \frac{1}{2}$ $3 \to \frac{1}{3}$ ..... $x \to \frac{1}{x}$ $(x \geq 1)$	d) $\mathbb{N} \xrightarrow{i} \mathbb{N}$ $3 \to 3$ $5 \to 5$ $7 \to 7$ $9 \to \{3; 9\}$ ..... $x \to y$ $x \geq 3$ (impar) $y \neq 1$ (divisor de x)
Es función	No es función. Observa que existen números naturales cuya mitad no pertenece al conjunto de los números naturales.	Es función	No es función. Observa que la cantidad de divisores diferentes de 1, de los números naturales impares que no son primos no es único. Por ejemplo el 9 tiene dos divisores diferentes de 1: el 3 y el propio 9. ♦

Ejemplo 3.3

Expresar las correspondencias f e i del ejemplo 3.2 como conjunto de pares ordenados.

Resolución:

Como se trata de conjuntos infinitos de pares ordenados podemos representar en notación tabular solo algunos de sus primeros elementos.

$f = \{(0;0), (1;2) , (2;4), (3;6), (4;8), (5;10), (6;12), (7;14), (8;16), (9;18),\ldots\}$

$i = \{(3;3), (5;5), (7;7), (9;3), (9;9), (11;11), (13;13), (15;3), (15;5), (15;15),\ldots\}$ ♦

Si en un conjunto de pares ordenados $(x;y)$ se repite alguna de las primeras componentes (abscisas) es porque a ese valor de x le corresponde más de una segunda componente y (ordenada).

Observa que en el conjunto f todas las primeras componentes son diferentes, pero en el segundo conjunto se repite la abscisa 9, esto quiere decir que 9 está relacionado con más de un elemento, por tanto, no es una función.

El resultado de este ejemplo ayuda a definir el concepto de función de otra manera:

Definición 3.1

Una función $f: X \to Y$ es un conjunto de pares ordenados $(x;y)$ tal que cada $x \in X$ aparece como primera componente de solo un par ordenado.

Una función se puede escribir como $f: X \to Y$ y se lee " f es una función de X en Y".

Recuerda que...

En una función $f: X \to Y$ el conjunto X de todos los valores que puede tomar la primera componente x de cada par se denomina **dominio de definición** (Dom $f = X$) de la función y el conjunto de valores que puede tomar la segunda componente, se llama **conjunto imagen o codominio** (Im $f = Y$) de la función.

Una función f, de un conjunto X en un conjunto Y, se caracteriza por las propiedades siguientes:

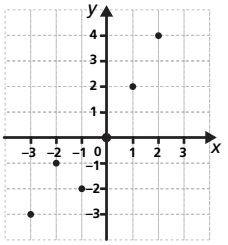
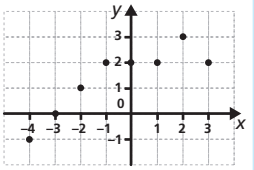
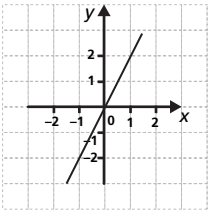
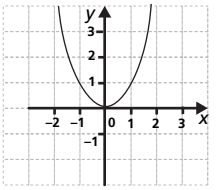
- Si $(x;y) \in f$, entonces $x \in X$ y $y \in X$.
- Para cada $x \in X$ existe un único $y \in X$ tal que $(x;y) \in f$.
- El conjunto f no contiene dos pares diferentes con la misma primera componente, es decir, si $(x;y_1) \in f$, y $(x;y_2) \in f$, entonces $y_1 = y_2$.

Ejemplo 3.4

Dados los conjuntos de pares ordenados: f_1, f_2, f_3 y f_4, de los cuales se da su representación gráfica.

a) Fundamentar por qué cada una de ellas es una función.

b) Hallar el dominio de definición y el conjunto imagen de cada uno.

$f_1 = \{(-3;-3), (-2;-1), (-1;-2), (0;0), (1;2), (2;4)\}$	 **Fig. 3.9**
$f_2 = \{(-4;-1), (-3;0), (-2;1), (-1;2), (0;2), (1;2), (2;3), (3;2)\}$	 **Fig. 3.10**
$f_3 = \{(x;y): y = 2x; x \in \mathbb{R}\}$	 **Fig. 3.11**
$f_4 = \{(x;y): y = x^2; x \in \mathbb{R}\}$	 **Fig. 3.12**

Resolución:

a) f_1, f_2, f_3 y f_4 son funciones porque la primera componente (abscisa) de los pares ordenados de cada una de ellas, no se repite, por tanto a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

b)

Función	f_1	f_2	f_3	f_4
Dominio de definición	{–3; –2; –1; 0; 1; 2}	{–4; –3; –2; –1; 0; 1;2;3}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Conjunto Imagen	{–3; –1; –2; 0; 2; 4}	{–1; 0; 1; 2; 3}	$\mathbb{R}$	$\{y \in \mathbb{R}: y \geq 0\}$♦

Observa en los gráficos de las funciones del ejemplo 3.4 que si trazamos una recta vertical (paralela al eje de las ordenadas) por cada punto del gráfico, esta contiene uno y solo un punto.

Reflexiona

¿Sucede lo mismo en los gráficos de conjuntos de pares ordenados que no son funciones?

Ejemplo 3.5

Dados los conjuntos g_1 y g_2 con su representación gráfica en las figuras 3.13 y 3.14

Explicar si son o no funciones.

a) g_1 = {(–2;1), (–1;1), (–1;2), (0;4), (1;3), (2;3), (3;1)}

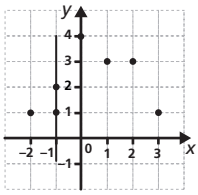


Fig. 3.13

b) g_2: Conjunto de todos los puntos del plano que están a 3 cm del origen de coordenadas.

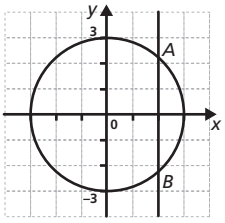


Fig. 3.14

Resolución:

a) El conjunto g_1 de pares ordenados no es una función, pues (–1;1) y (–1;2) tienen la misma abscisa $x = -1$. La recta paralela al eje

de las ordenadas que pasa por el punto (–1;1) también contiene al punto (–1;2), (figura 3.13).

b) El conjunto infinito g_2 de pares ordenados no es una función; por ejemplo, los pares ordenados (0;3) y (0;–3) tienen la misma abscisa $x = 0$. La recta paralela al eje de las ordenadas que pasa por el punto $A(x_1;y_1)$ también contiene a $B(x_1;y_2)$, (figura 3.14). Eso quiere decir que a un mismo valor de la abscisa le corresponden dos valores diferentes como ordenada. ♦

¿? ¿Sabías que...?

En la actualidad es muy amplio el campo de aplicación que tienen las funciones. Para que tengas una idea, te mencionaremos algunos ejemplos de sus aplicaciones:

- En la descripción y cálculos relacionados con la Economía, la Física, la Química, la Biología, la Medicina, el Deporte, los fenómenos naturales, y en otras áreas del conocimiento científico y social.
- Como fundamento y herramienta necesarios que sirven de base a la programación utilizada en procesos dirigidos al desarrollo tecnológico en general.
- En la descripción y cálculos relacionados con las leyes de crecimiento.
- En la descripción y cálculos del ritmo de desintegración de sustancias radiactivas.
- En la construcción de obras arquitectónicas. Un ejemplo que ha trascendido en el tiempo es el estilo creado por el arquitecto catalán Antonio Gaudí (1852-1926), que utilizó arcos parabólicos y catenarios para lograr soportes estructurales innovadores en sus edificaciones (figura 3.15).



Fig. 3.15

En la medida en que profundices en el estudio de los diferentes tipos de funciones, podrás apreciar la diversidad de aplicaciones que estas tienen en la cotidianidad y en el desarrollo de las ciencias y la tecnología.

Aplica tus conocimientos

Elabora un resumen sobre las diferentes ***formas de representar una función****, con ejemplos que cumplan en cada caso la condición indicada:*

Forma descriptiva: *que el dominio de definición de la función sea un intervalo numérico.*

Mediante un diagrama: *que exprese la relaciones entre lados y áreas de una figura plana.*

Mediante una tabla: *que exprese la relación entre lados y perímetros de una figura plana.*

Mediante un conjunto de pares ordenados:

a) que exprese una relación geométrica en un conjuno finito.
b) que exprese la variación del perímetro de un cuadrado cuyo lado l toma valores en un intervalo real.

Mediante una ecuación:

a) que el conjunto de definición de la función sea finito.
b) que el conjunto de definiión de la función sea infinito.

Mediante un gráfico:

a) que represente un conjunto de definición finito de la función.
b) que el conjunto de definición de la función sea infinito.

Del software

Para comprender la Matemática III
Lee del módulo "Funciones" los aspectos importantes de las funciones y realiza las actividades 6 y 7. Una vez concluidas, verifica las soluciones.

Función lineal y función cuadrática

Como ya comentamos, en grados anteriores se estudiaron dos funciones numéricas, la función lineal y la función cuadrática o de segundo grado. Estas funciones están representadas en el dominio de los números reales por ecuaciones de las formas $y = mx + n$ (m y n son números reales) $y = ax^2 + bx + c$ (a, b y c son números reales $a \neq 0$). Ahora profundizarás sobre el concepto de función, sus representaciones gráficas, las propiedades ya conocidas y otras que aprenderás al realizar ejercicios y problemas relacionados con las funciones lineal y cuadrática.

Función lineal



Fig. 3.16

En un gas no ideal, a presión constante, la relación entre el volumen V y la temperatura T medida en grados Celsius se modela por la expresión $V(T) = V_0 + V_0kT$. Donde V_0 representa el volumen inicial y k es un valor constante que depende del gas. ¿La igualdad $V(T) = V_0 + V_0kT$ es una función o una ecuación?

¿Es posible definir la función lineal como un conjunto de pares ordenados?

Recuerda que...

Una ecuación es una igualdad que contiene por lo menos una variable. Una función f, que a cada $x \in \mathbb{R}$ le hace corresponder el número real $f(x) = mx + n$, donde m y n son números reales, se denomina **función lineal**.

Analicemos las interrogantes anteriores para un caso conocido: $y = 2x + 1$. Está claro que es una ecuación lineal con dos variables, entonces sus soluciones son pares ordenados de números reales de la forma $(x;y)$.

Veamos en la tabla 3.2 algunas de estas soluciones:

Tabla 3.2

x	–4	–2,3	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	3	3,14
y	–7	–3,6	–1	0	1	2	3	4	7	7,28

La ecuación tiene infinitas soluciones, en la que a cada valor real de x (variable independiente) le corresponde un único valor real de la variable y (variable dependiente). Esta correspondencia es una función y como tal se puede escribir mediante un conjunto de pares ordenados: $f = \{(x;y): y = 2x + 1; x \in \mathbb{R}\}$.

Podemos afirmar que la igualdad $y = 2x + 1$ es una ecuación lineal con dos variables y sus soluciones forman un conjunto infinito de pares ordenados de números reales que constituye una función lineal.

Definición 3.3

Una función lineal f es un conjunto de pares ordenados de la forma $(x; mx + n)$, con $x \in \mathbb{R}$ y m y n parámetros reales.

Reflexiona

¿Cómo aplicar la definición 3.3 para el caso de la fórmula $V(T) = V_0 + V_0kT$?

Ejemplo 3.6

Las siguientes funciones están dadas por una ecuación lineal de la forma $f(x) = mx + n$:

a) $f_1(x) = 2x$ b) $f_2(x) = x$ c) $f_3(x) = 0{,}5x - 1$ d) $f_4(x) = -3$ e) $f_5(x) = -2x + 3$

I. Identificar en cada caso el valor de los parámetros m y n.

II. Hallar el cero de la función y las coordenadas del punto de intersección del gráfico de la función con el eje de las ordenadas.

III. Trazar el gráfico de cada una en un sistema de coordenadas rectangulares.

IV. Determinar el dominio de definición de cada una de ellas y el conjunto imagen. Fundamenta el porqué.

Resolución I:

a)	b)	c)	d)	e)
$m = 2$ y $n = 0$	$m = 1$ y $n = 0$	$m = 0{,}5$ y $n = -1$	$m = 0$ y $n = -3$	$m = -2$ y $n = 3$

Resolución II:

a)	b)	c)	d)	e)
Cero: $x_0 = 0$	Cero: $x_0 = 0$	Cero: $x_0 = 2$	Cero: no tiene	Cero: $x_0 = 1{,}5$

Coordenadas del punto de intersección del gráfico de la función con el eje de las ordenadas:

a) (0;0)	b) (0:0)	c) (0;–1)	d) (0;–3)	e) (0;3)

Resolución III:

El gráfico de una función lineal es una recta, entonces es suficiente determinar dos pares ordenados que pertenezcan al gráfico de la función para trazar la recta correspondiente (figura 3.17).

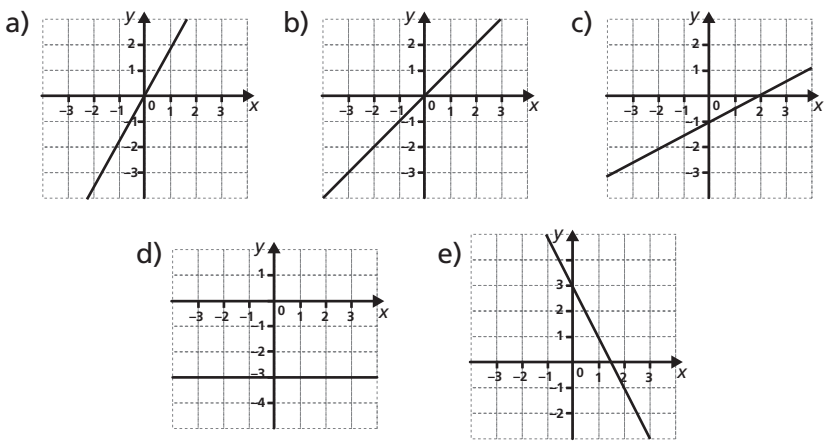


Fig. 3.17

Resolución IV:

	a)	b)	c)	d)	e)
Dominio de definición	$\text{Dom}f_1 = \mathbb{R}$	$\text{Dom}f_2 = \mathbb{R}$	$\text{Dom}f_3 = \mathbb{R}$	$\text{Dom}f_4 = \mathbb{R}$	$\text{Dom}f_5 = \mathbb{R}$
Conjunto imagen	$\text{Im}f_1 = \mathbb{R}$	$\text{Im}f_2 = \mathbb{R}$	$\text{Im}f_3 = \mathbb{R}$	$\text{Im}f_4 = -3$	$\text{Im}f_5 = \mathbb{R}$

Observa que en algunos de los casos el valor de los parámetros m o n es cero, cuando esto sucede se obtienen funciones que por su importancia en la Matemática se reconocen como casos particulares de la función líneal.

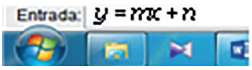
Funciones de proporcionalidad directa: sus ecuaciones tienen la forma $y = mx$ ($m \neq 0$). El gráfico de estas funciones es una recta que contiene el origen de coordenadas (figura 3.17 a).

- Función idéntica: tiene como ecuación $y = x$. El gráfico de esta función es una recta que es bisectriz de los cuadrantes I y III (figura 3.17 b).
- Función constante: tiene una ecuación de la forma $y = n$. Su gráfico es una recta paralela al eje de las abscisas que corta en n el eje de las ordenadas (figura 3.17 d).

Para lograr una mayor comprensión sobre el gráfico de una función lineal, puedes utilizar una vista gráfica del GeoGebra y hacer variar los parámetros:

¿Cómo hacerlo?

Crear un deslizador para cada parámetro, dar entrada a la ecuación $y = mx + n$ y obtener el gráfico (figura 3.18). Al ejecutar los deslizadores podrás observar la ecuación que se obtiene en cada caso y las variaciones del gráfico.

Crear deslizadores  Entrada de la ecuación 

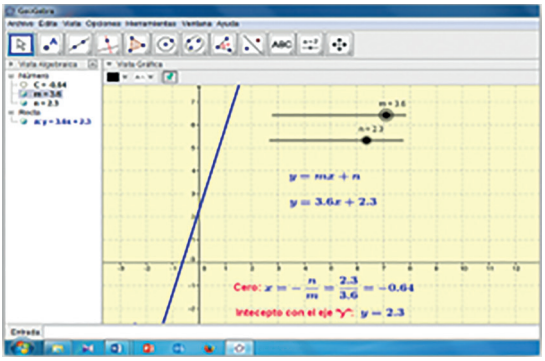


Fig. 3.18

¿Puede cualquier recta trazada en un sistema de coordenadas representar el gráfico de una función lineal? ¿Son los gráficos de las funciones lineales, rectas simétricas respecto al eje de las ordenadas o al origen de coordenadas? ¿Existe alguna relación

entre los gráficos de las funciones lineales y el conjunto solución de las inecuaciones lineales?

La respuesta a estas pregunta te puede ayudar a comprender una propiedad de las funciones que no has estudiado hasta este momento: *paridad de una función.*

Definición 3.2

Si en una función f, para todo elemento x de su dominio de definición X, se cumple que $-x \in X$, entonces:

a) f es una función par si $f(-x) = f(x)$ (elementos opuestos del dominio tienen la misma imagen)

b) f es una función impar si $f(-x) = -f(x)$ (elementos opuestos del dominio tienen imágenes opuestas)

Una función que no cumpla ninguna de las propiedades a) o b) no es par, ni impar.

Ejemplo 3.7

Analizar la paridad de las funciones f_1, f_3 y f_4 del ejemplo 3.6. ¿Cómo influye la paridad de una función en su gráfico?

Resolución:

Todas las funciones del ejemplo 3.6 están definidas para todos los números reales, por tanto, podemos comparar las imágenes de elementos opuestos del dominio:

$f_1(x) = 2x$ y $f_1(-x) = 2(-x) = -(2x) = -f_1(x)$, es decir $f(-x) = -f(x)$, entonces la función f_1 es impar.

$f_3(x) = 0{,}5x - 1$ y $f_3(-x) = 0{,}5(-x) - 1 = -0{,}5x - 1$, luego $f_3(-x) \neq f_3(-x)$ y $f_3(-x) \neq f_3(x)$, entonces f_3 no es par, ni impar.

$f_4(x) = -3$ y $f_4(-x) = -3$, es decir $f(-x) = f(x)$, entonces la función f_4 es par.

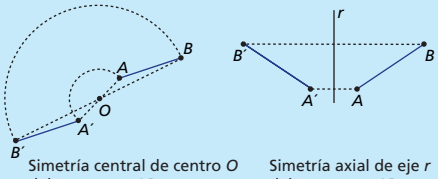
Observa que el gráfico de la función impar f_1 es centralmente simétrico respecto al origen de coordenadas y el de la función par f_4 es axialmente simétrico respecto al eje de las ordenadas. ♦

Reflexiona

¿Qué puedes valorar con respecto a la paridad de las funciones f_2 y f_5 del ejemplo 3.6?

Recuerda que...

Una **simetría central** (o reflexión por un punto) de una figura es una rotación de 180° alrededor de un punto llamado centro, y una **simetría axial** es la reflexión de una figura respecto a una recta que se denomina eje de simetría.



Simetría central de centro *O* del segmento *AB*

Simetría axial de eje *r* del segmento *AB*

Fig. 3.19

Tú puedes realizar estos movimientos en diferentes figuras geométricas utilizando las herramientas del GeoGebra.

Refleja Objeto en Recta Refleja Objeto por Punto

Relación entre las funciones lineales y las inecuaciones lineales

Ya conoces los procedimientos para resolver inecuaciones lineales, cuadráticas y fraccionarias; sin embargo, es importante profundizar particularmente en la relación del gráfico de una función lineal para la interpretación geométrica el conjunto solución de las inecuaciones lineales. Analizaremos dos casos: la relación entre el gráfico de las funciones lineales y el conjunto solución de una inecuación lineal en una variable, y la relación del gráfico de las funciones lineales con el conjunto solución de *inecuaciones lineales en dos variables.*

¿Para qué valores del dominio de la función $y = \frac{1}{2}x + 1$, las imágenes son negativas o positivas?

¿Cuáles de los siguientes pares ordenados (x;y) satisfacen la inecuación $x - 2y > -2$*?*

a) (–2;0) b) (–2;1) c) (2;1) d) (2;3) e) (0;0,5) f) (8;3) g) (4;3)

Para dar respuesta a la **primera pregunta**:

Asistidos por el GeoGebra, podemos obtener el gráfico de la función lineal de ecuación $y = \frac{1}{2}x + 1$ (figura 3.20) y dar respuesta a ambas interrogantes.

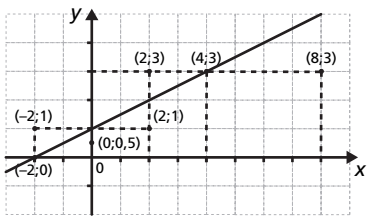


Fig. 3.20

Para dar respuesta a la **primera pregunta** debes observar que se trata de una función creciente, con cero en la abscisa $x_0 = -2$, a partir

del cual se puede analizar que el **signo** de la función tiene el siguiente comportamiento: para las $x_0 < -2$ las imágenes de la función son negativas y para $x_0 > -2$ son positivas.

Reflexiona

¿Qué pasaría con el signo de las imágenes si la función fuera $y = -\frac{1}{2}x + 1$?

Se debe destacar que dada la función lineal de ecuación $y = mx + n$, cuyo cero es $x_o = -\frac{n}{m}$:

Si $m > 0$ las imágenes de la función son positivas para $x > -\frac{n}{m}$ y negativa para $x < -\frac{n}{m}$

Si $m < 0$ las imágenes de la función son positivas para $x < -\frac{n}{m}$ y negativa para $x > -\frac{n}{m}$

Cuando las imágenes de la función son **positivas** se dice que el **signo** de la función es **positivo** y cuando las imágenes de la función son **negativas** se dice que el **signo** de la función es **negativo.**

En general se cumple que cuando el gráfico de una función se encuentra por encima del eje de las abscisas, la función es positiva y cuando el gráfico está por debajo del eje de las abscisas la función es negativa.

En el caso de la **segunda pregunta**, debes observar que al sustituir en la inecuación para cada uno de estos pares se tiene que por ejemplo: el par (–2;0) no es solución de la inecuación porque –2 –2(0) = –2 –0 = –2, tampoco lo es (2;3) porque 2 – 2(3) = 2 – 6 = –4 < –2, en tanto (8;3) si la satisface, porque, 8 – 2(3) = 8 – 6 = 2 > –2.

Reflexiona

¿Qué otros pares satisfacen la inecuación anterior?
¿Es posible hallar todas las soluciones de una inecuación de este tipo?

Despejemos la variable y para obtener una inecuación equivalente a $x - 2 y > -2$. En este caso obtenemos que $y < \frac{1}{2}x + 1$ tiene el mismo conjunto solución, por tanto podemos observar en la figura 3.20 que las coordenadas de los puntos que están en la recta (gráfico de la función lineal) satisfacen la ecuación $y = \frac{1}{2}x + 1$; los que están situados por encima de la recta son las soluciones de la inecuación $y > \frac{1}{2}x + 1$ y los que están debajo de esta, son las soluciones de la inecuación $y < \frac{1}{2}x + 1$.

Ahora con la ayuda de los gráficos de las funciones lineales puedes comprender la interpretación geométrica del conjunto solución de una inecuación lineal de la forma $ax + by + c \geq 0$ o $ax + by + c \leq 0$ (a, b y c son números reales, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$).

El gráfico de una función lineal cuya ecuación tiene la forma $y = mx + n$ es una recta que divide al plano coordenado en dos regiones, una por encima de la recta y la otra por debajo (figura 3.21). En este caso, las coordenadas de los puntos que están situados sobre la recta satifacen la ecuación $y = mx + n$, las coordenadas de los que están por encima de ella satifacen la inecuación $y > mx + n$ y las que están por debajo, la inecuación $y < mx + n$.

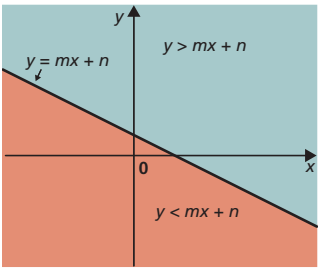


Fig. 3.21

Ejemplo 3.8

Hallar gráficamente todos los pares ordenados $(x;y)$ de números reales que satisfacen cada una de las inecuaciones siguientes:

a) $y + 1 > 3x$ b) $3x - y - 1 \geq 0$

Resolución:

a) $y + 1 > 3x$

$y > 3x - 1$

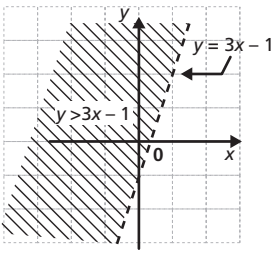


Fig. 3.22

b) $3x - y - 1 \geq 0$

$-y \geq -3x + 1$

$y \leq 3x - 1$

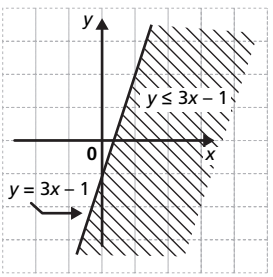


Fig. 3.23

La recta discontinua (figura 3.22), significa que las coordenados de los puntos que pertenecen a ella no son solución de la inecuación, en este caso la desigualdad es estricta (> o <).

Si la recta es continua (figura 3.23), entonces las coordenadas de los puntos que pertenecen a ella son soluciones de la inecuación y la desigualdad no es estricta(≥ o ≤). ♦

Aplica tus conocimientos

1. *Completa el resumen siguiente planteando, para cada caso, un ejemplo de función lineal que cumpla la condición o propiedad caracterizada.*

Resumen de algunas de las propiedades de la función lineal

- *El gráfico de las funciones pares, son axialmente simétricos respecto al eje de las ordenadas y el de las funciones impares son centralmente simétricos respecto al origen de coordenadas.*
- *La paridad de las funciones lineales cuyas ecuaciones tienen la forma* $y = mx + n$*, depende del valor de los parámetros reales* m *y* n*.*

  Si $n = 0$ *y* $m \neq 0$ *las ecuaciones son de la forma* $y = mx$ *y las funciones son impares.*

  Si $m = 0$ *y* $n \neq 0$ *las ecuaciones son de la forma* $y = n$ *y las funciones son pares.*

  Si $m \neq 0$ *y* $n \neq 0$ *las ecuaciones son de la forma* $y = mx + n$ *y las funciones no son pares ni impares.*
- *Si* $m > 0$ *las imágenes de la función son positivas para* $x > -\frac{n}{m}$ *y negativas para* $x < -\frac{n}{m}$
- *Si* $m < 0$ *las imágenes de la función son positivas para* $x < -\frac{n}{m}$ *y negativas para* $x > -\frac{n}{m}$
- *El valor de* m *determina la pendiente de la recta. Si se conocen dos pares de la función se tienen entonces los puntos* $P_1(x_1;y_1)$ *y* $P_2(x_2;y_2)$ *de su gráfico. Para hallar el valor de la pendiente se puede utilizar la fórmula* $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

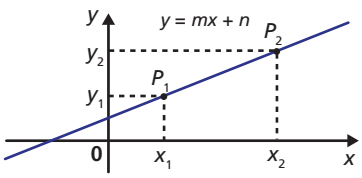


Fig. 3.24

- *El signo de* m *determina la monotonía de la función lineal: si* $m > 0$ *la función es monótona creciente y si* $m < 0$*, entonces es monótona decreciente.*

- *El valor de* n *tiene que ver con el punto* P *donde la gráfica de la función lineal (la recta) corta al eje de las ordenadas, en este caso* P*(0;n).*

2. *Determina para cada una de las inecuaciones del ejemplo 3.6, un subconjunto de cinco pares ordenados que sean solución de dichas inecuaciones.*

Función cuadrática



Fig. 3.25

La función cuadrática se estudió en noveno grado; sus diferentes formas de representación, sus propiedades, el gráfico y las variadas aplicaciones que esta tiene en la vida cotidiana (figura 3.25), en el deporte, la economía, en fenómenos físicos y en diferentes esferas del conocimiento. Ahora es importante que reactives los conocimientos anteriores y adquieras otros que están relacionados con esta función o necesitan de ella.

El siguiente resumen te ayudará a recordar relaciones y propiedades importantes, además te servirá como un organizador previo de lo que debes aprender con el estudio de este tema.

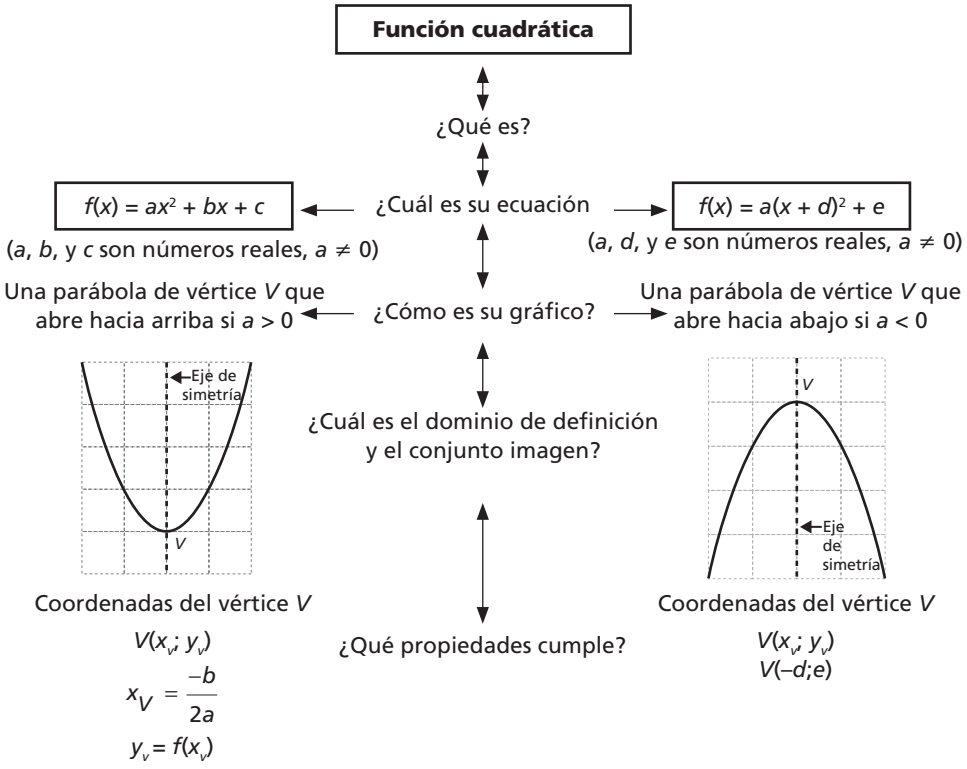


Fig. 3.26

Recuerda que...

Una función cuadrática es una correspondencia en la que a cada número real x le asocia el número real $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales conocidos y $a \neq 0$.

Ahora la podemos definir como un conjunto de pares ordenados de la siguiente manera:

Definición 3.5

Una función cuadrática f es un conjunto de pares ordenados de la forma $(x; ax^2 + bx + c)$, con $x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y a, b y c números reales dados.

Ejemplo 3.9

De la función f cuya ecuación es $f(x) = x^2 - 2x - 3$:

a) Hallar los ceros y las coordenadas del punto de intersección del gráfico con el eje de las ordenadas.
b) Trazar su gráfico.
c) Determinar el dominio, el conjunto imagen, la monotonía, la simetría del gráfico y la paridad.
d) Determinar el signo de las imágenes de la función.
e) Determinar el valor máximo y el mínimo de la función.
f) Escribir la ecuación de f en la forma $f(x) = a(x + d)^2 + e$.

Resolución:

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x + 1)(x - 3) = 0$
$x = -1$ o $x = 3$
Los ceros son: $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$
$f(0) = 0^2 - 2(0) - 3$; $f(0) = -3$
El gráfico interseca al eje de las ordenadas en el punto $(0; -3)$.

b)

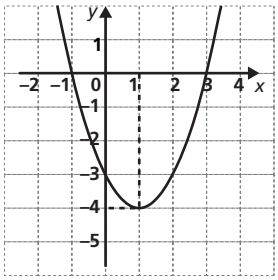


Fig.3.27

c) Dom $f = \mathbb{R}$
Im $f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq -4\}$
Monotonía: para $x < 1$ es decreciente y para $x > 1$ es creciente
Simetría: es simétrica con respecto a la recta $x = 1$
Paridad: como para $f(-1) = 0$ y $f(1) = -4$ entonces la función no es par ni impar.

d) Para $x < -1$ y para $x > 3$ las imágenes de la función son positivas.
Para $-1 < x < 3$ las imágenes de la función son negativas.

e) Valor máximo: no tiene, Valor mínimo $f(1) = -4$

f) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ haciendo completamiento cuadrático obtenemos
$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3$; $f(x) = x^2 - 2x + 1 - 4$
$f(x) = (x - 1)^2 - 4$ ♦

El ejemplo 3.7 d) te puede ayudar a recordar la traslación del gráfico de una función cuadrática en la dirección de los ejes de coordenadas.

Aplica tus conocimientos

Utiliza el GeoGebra para comprobar que en este caso el gráfico de la función f *de ecuación* $f(x) = x^2 - 2x - 3$ *coincide con el de la función* g *de ecuación* $g(x) = a(x + d)^2 + e$ *con* $a = 1$, $d = -1$ *y* $e = -4$. *Además, que el gráfico de la función* g *de ecuación* $g(x) = (x - 1)^2 - 4$ *se obtiene trasladando el gráfico de* $y = x^2$ *una unidad en la dirección del eje de las abscisas, en sentido positivo (sentido contrario al signo de d) y después una traslación de 4 unidades en la dirección del eje de las ordenadas en sentido negativo (el sentido es igual al signo de e).*

Las funciones cuadráticas se aplican en variadas situaciones relacionadas con la práctica, con la Matemática y con otras ciencias. Un tipo de problema en los que tienen una importante aplicación es en los llamados *problemas de optimización* que consisten en hallar valores máximo o mínimo en una situación dada.

Ejemplo 3.10

Hallar los números naturales cuya suma es 240 y su producto P sea el máximo posible. Determinar ese producto máximo.

Resolución:

Sean x y y los números que estamos buscando.

$x + y = 240$ (1) es la ecuación que expresa la suma de estos números y $P = xy$ (2), el producto.

Si despejamos la variable y en la ecuación (1), se obtiene $y = 240 - x$ y sustituyéndola en la ecuación (2) se obtiene una ecuación para el producto P en función de una sola variable:

$P(x) = x(240 - x) = 240x - x^2$

La ecuación $P(x) = -x^2 + 240x$ corresponde a una función cuadrática, cuyos pares son de la forma $(x;P(x))$. En este caso, el valor de la abscisa representa uno de los números y el de la ordenada el producto que se obtiene. Como la parábola abre hacia abajo ($a = -1 < 0$) el mayor valor de $P(x) = y$ es el de la ordenada y_v del vértice.

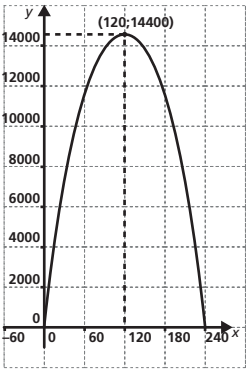


Fig. 3.28

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-240}{2(-1)} = 120$$

$y_v = P(x_v) = P(120) = -120^2 + 240(120) = 14\,400$;

Sustituyendo en (1) 120 + y = 240 Luego $y = 240 - 120 = 120$

Respuesta: los números naturales son iguales $x = 120$; $y = 120$ su suma son 240 y su producto es el máximo posibles que es 14 400 ♦

Reflexiona sobre lo aprendido

1. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera

1.1 ¿Qué condiciones debe cumplir una correspondencia de A en B para que sea una función?

1.2 Elabora ejemplos de correspondencias f que representen situaciones como las siguientes:

a) f, de A en B es una función.

b) f, de A en B es una función y también lo es de B en A.

c) f, de A en B no es una función pero sí lo es de B en A.

d) f, de A en B no es una función y tampoco lo es de B en A.

2. Una correspondencia de un conjunto X en un conjunto Y se puede representar mediante un conjunto de pares ordenados. Explica las condiciones que deben cumplir las coordenadas de estos pares en cada uno de los ejemplos anteriores.

3. El conjunto $P = \{(x:2x - 6): x \in \mathbb{R}\}$ representa una función lineal h. El gráfico de h es una recta que corta a los ejes de coordenadas, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos donde los corta?

4. El gráfico de una función cuadrática g, cuya ecuación tiene la forma $y = x^2 + c$ ($c \in \mathbb{R}$), es una parábola que corta el eje de las abscisas en los puntos (3;0) y (–3;0). ¿Cuál es el vértice de esta parábola?

5. ¿Alguna de las funciones anteriores f o h es par? Fundamenta tu respuesta.

6. Escribe un intervalo donde ambas funciones toman valores negativos y otro donde ambas funciones sean crecientes.

7. ¿En qué puntos se intersecan los gráficos de las funciones *h* y *g*?

Comparte con tus compañeros los ejemplos elaborados y tus ideas que te permiten resumir los conocimientos esenciales que estudiaste en este epígrafe.

Ejercicios del epígrafe 3.1

Sistematización del concepto de función. Formas de representación de una función

1. En los siguientes diagramas se muestran correspondencias del conjunto A en el conjunto B, ¿cuáles de ellas son funciones? Fundamenta por qué lo son.

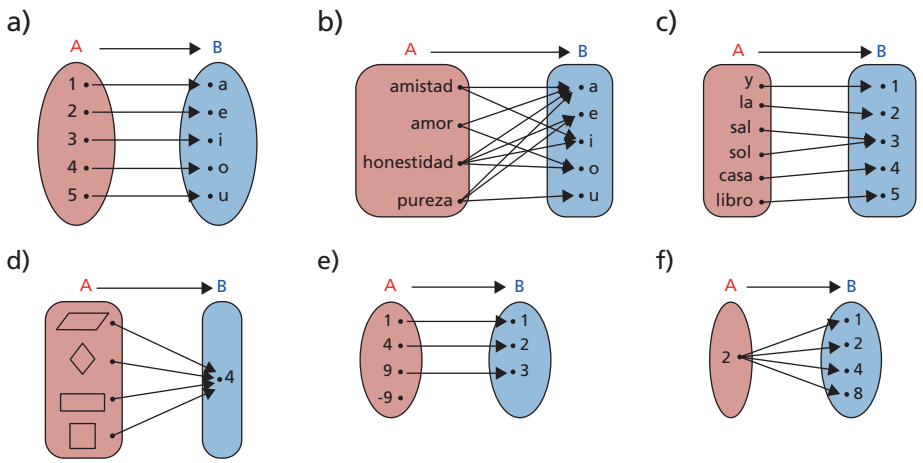


Fig. 3.29

2. Selecciona cuáles de las siguientes correspondencias son funciones:

a) A cada número real le asocia su recíproco en el conjunto de los números reales.

b) A cada número natural le corresponde su opuesto en el conjunto de los números enteros.

c) A cada provincia del país se le asocian los centros hospitalarios que cuentan con servicios de hemodiálisis.

d) A cada número natural le asocia su duplo en el conjunto de los números naturales.

e) A cada número entero le corresponde su raíz cuadrada aritmética.
f) A cada figura geométrica de cuatro lados se le hace corresponder su área.
g) A cada número natural le corresponde su mitad en el conjunto de los números fraccionarios.
h) A cada trabajador de una empresa le corresponde el día de la semana de su próximo cumpleaños.
i) A cada país le corresponde las lenguas que hablan sus habitantes.
j) En nuestro país, a cada año trascurrido desde 1959 hasta la fecha se le hace corresponder el índice de mortalidad infantil.

3. Selecciona cuáles de los siguientes conjuntos de pares ordenados son funciones. De los no seleccionados justifica por qué no son funciones.

a) $A=\{(1;0),(2;1),(4;2),(8;3),(16;4),(32;5),(64;6)\}$
b) $B=\{(1;1),(2;1),(4;2),(4;-2),(9;3),(16;4),(25;5)\}$
c) $C=\{(1;5),(2;5),(3;5),(4;5),(5;5),(6;5),(7;5)\}$
d) $A=\{(1;0),(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6)\}$

4. Las siguientes correspondencias representan funciones numéricas, exprésalas mediante un conjunto de pares ordenados en notación constructiva.

a) f_1: la correspondencia de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, en la que a cada número real le asocia su duplo aumentado en la unidad.
b) f_2: la correspondencia de $\mathbb{R}\diagup\{0\}$ en $\mathbb{R}$, en la que a cada número real no nulo le asocia su recíproco.
c) f_3: la correspondencia de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, en la que a cada número real le asocia su cuadrado.
d) f_4: la correspondencia de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, en la que a cada número natural le asocia su raíz cuadrada aritmética.

5. Cada una de las siguientes tablas (3.3, 3.4 y 3.5) muestran una correspondencia entre dos variables:

- Tabla (3.3) años de la primera década del siglo XXI $\rightarrow$ cantidad de graduados en cada año en un preuniversitario.
- Tabla (3.4) estudiantes de un círculo de estudio $\rightarrow$ asignatura de la cual es monitor.
- Tabla (3.5) estudiantes de un círculo de estudio $\rightarrow$ día de la semana que ocurrió el último cumpleaños.

Tabla 3.3

Año	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Cantidad de graduados	173	160	198	200	193	206	201	211	217	223

Tabla 3.4

	Matemática	Física	Química	Biología	Inglés	Historia	Lengua y Literatura
Carmen						X	
Daniel	X						
Carlos		X			X		
Lidia							X
Jorge			X				
Zolila				X			

Tabla 3.5

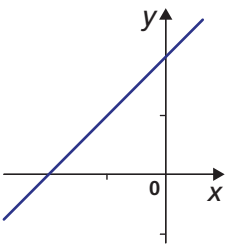
	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Carmen		X					
Daniel		X					
Carlos	X						
Lidia							X
Jorge			X				
Zoila						X	

5.1 Explica si las correspondencias que se establecen entre las variables en el orden que indica la flecha, representan o no una función.

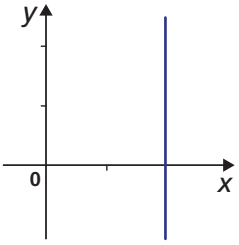
5.2 ¿Cuáles de las correspondencias son funciones si se invierte el sentido de la flecha?

6. Selecciona cuáles de los siguientes gráficos representan una función.

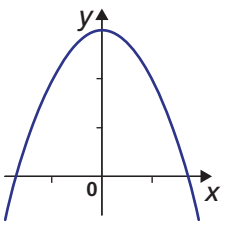
a)



b)



c)



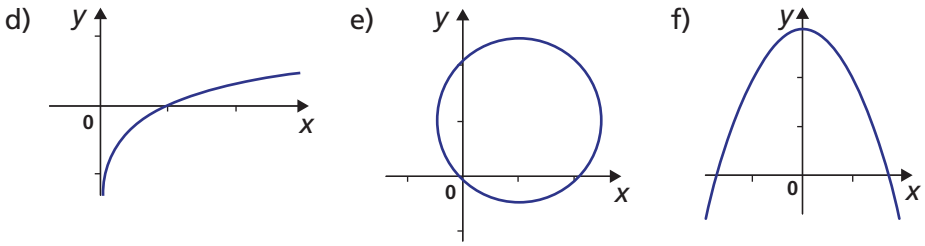


Fig. 3.30

Función lineal y función cuadrática

7. Selecciona cuáles de los siguientes pares ordenados pertenecen a la función h representada por la ecuación $h(x) = 4x - 6$.

a) $\left(\frac{1}{2}; -4\right)$ b) $(0; -6)$ c) $(0{,}5; 0)$ d) $\left(-\frac{3}{4}; 3\right)$ e) $(-1; -7)$ f) $(0{,}25; -5)$

8. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y complétala si se conoce que las ecuaciones de la forma $y = mx + n$, que se muestran en la primera columna, corresponden a funciones lineales. En los pares ordenados que se muestran en la última columna, determina los valores de x o y según corresponda.

Ecuación	Valor de los parámetros		Algunos pares ordenados de la función
	m	***n***	
			$(0; y)$, $\left(-\frac{1}{2}; y\right)$ $(x; 0{,}4)$, $(x; 3)$, $\left(\sqrt{2}; y\right)$,
$y = 2x$			$(x; 0)$, $(x; -1)$, $(-0{,}3; y)$, $(x; 2)$, $\left(\sqrt{2}; y\right)$
$y = x$			$(0; y)$, $\left(-\frac{1}{2}; -y\right)$, $(x; -0{,}3)$, $(1; y)$, $\left(x; \sqrt{2}\right)$
$y = 1$			$(0; y)$, $\left(-\frac{1}{2}; y\right)$, $(-0{,}3; y)$, $(x; 1)$, $\left(\sqrt{2}; y\right)$

9. Escribe de cada inciso la ecuación de la función lineal de la forma $y = mx + n$, de la cual se conocen los elementos siguientes:

a) La pendiente de la recta es $m = 2$ y su gráfico corta el eje de las ordenadas en $y_1 = -4$.

b) La pendiente de la recta es $m = -3$ y la función contiene el par $(-1; -2)$.

c) La pendiente de la recta es $m = -1$ y el cero de la función es $x_0 = 6$.
d) Su gráfico pasa por los puntos $P_1(4;-3)$ y $P_2(2;5)$.
e) Tiene un cero en $x_0 = 1$ y su gráfico corta el eje de las ordenadas en $y_1 = -2$
f) Es negativa para $x < -2$, positiva para $x > -2$ y su gráfico corta el eje de las ordenadas en $y_1 = 4$.

10. Determina, sin tener que representarlos en un sistema de coordenadas, cuáles de los siguientes pares o tríos de puntos están alineados.
a) $A(2;-3)$, $B(-10;5)$ b) $A(2;-3)$, $B(0;3)$ y $C(1;0)$ c) $A(1;7)$, $B(2;-8)$ y $C(3;17)$

11. Analiza en cada caso si el conjunto de pares ordenados representan una función, y en caso afirmativo comprueba si la función es lineal. Explica el razonamiento empleado para comprobar si la función es o no lineal.
a) $g_1 = \{(2;3), (1;5), (-1;2), (0,4;7), (2;6)\}$
b) $g_2 = \{(2;3), (1;5), (-1;2), (0,4;7), (-6;6)\}$
c) $g_3 = \{(2;3), (1;5), (-1;9), (0,4;6,2), (3;1)\}$

12. En la siguiente figura 3.31 se muestra la representación gráfica de tres funciones lineales. Selecciona cuál de ellas puede corresponder a la función cuya ecuación es $f(x) = -2,5x - 3$. Fundamenta tu respuesta.

a) b) c)

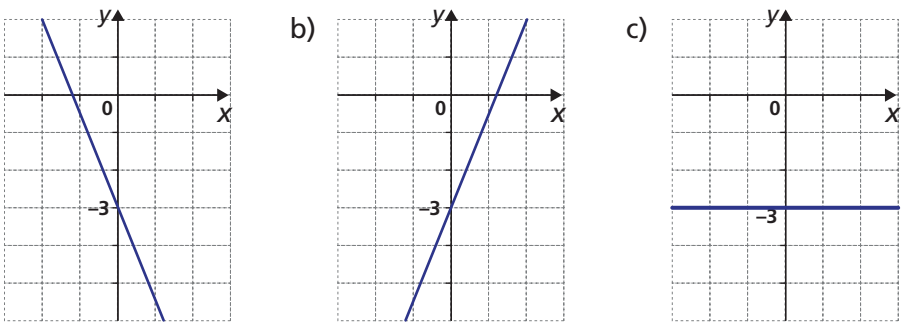


Fig. 3.31

13. Traza el gráfico de las funciones lineales dadas por las siguientes ecuaciones en el dominio de definición indicado en cada caso, di el conjunto imagen y analiza el comportamiento del signo de cada una de las funciones en su dominio de definición.

a) $y = 2x - 1\ (-1 \le x \le 2{,}5)$

b) $y = \frac{1}{2}x + 4\ (-6 \le x < 0)$

c) $y = -x - 2{,}5\ (-4 < x < 1{,}5)$

14. El crecimiento de un feto de más de 12 semanas se puede calcular aproximadamente mediante la fórmula $l(t) = at - 6{,}7$, donde l representa la longitud en centímetros, t el tiempo en semanas y a es una constante real positiva, mayor que 6,7 Si mediante un ultrasonidos se comprobó que un feto de 18 semanas tenía una longitud de 21,7 cm, determina el valor de a.

15. La gráfica (figura 3.32) muestra la variación de la temperatura T (°C) en función del tiempo t (min) de dos mezclas A y B cuya variación de sus tempetaturas están dadas por las funciones f y g respectivamente. Se conoce que la medición para ambas, se comenzó a realizar a partir de las 8:00 a.m., y una vez transcurridos 15 min las mezclas A y B habían alcanzado 25 °C y 40 °C respectivamente.

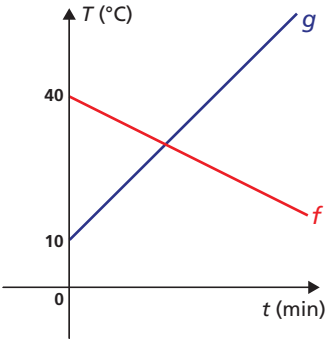


Fig. 3.32

a) ¿Qué temperatura tenía la mezcla A cuando comenzó la medición?

b) ¿Cuál de las dos mezclas presenta un proceso de enfriamiento?

c) Halla la ecuación de la función lineal que puede describir cada proceso.

d) ¿Qué tiempo necesita la mezcla A para alcanzar 0 °C?

e) ¿A qué hora ambas mezclas tenían la misma temperatura y de cuánto es la temperatura?

16. Dos automóviles que se meven con movimiento rectilíneo uniforme (MRU) parten, de un punto siguiendo el mismo recorrido, con destino a una ciudad C. El primero de los automóviles viaja a una velocidad aproximada de 70 km/h y el segundo, que salió media hora más tarde, se desplaza a 90 km/h.

a) Escribe las ecuaciones de las funciones lineales que describen la relación entre el desplazamiento (s) y el tiempo empleado (t) de los dos automóviles, una vez que ambos salieron.

b) ¿Cuánto tiempo necesita el segundo automóvil para alcanzar al primero?

17. Determina la ecuación que le puede corresponder a una función f si su gráfico está compuesto por los segmentos de rectas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, en los cuales $B \notin \overline{AB}$ y $B \in \overline{BC}$.

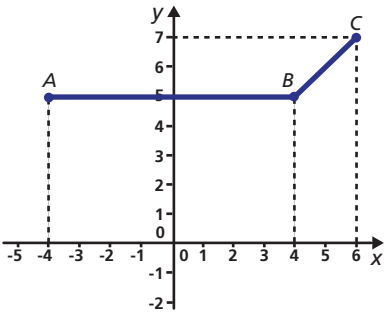


Fig. 3.33

18. La relación entre el volumen $V(\text{dm}^3)$ y la temperatura $T(°\text{C})$, de un gas G a presión constante, está determinada por una función lineal, cuya ecuación es $V(T) = V_0 + V_0kT$, en la que V_0 es el volumen que ocupa el gas a 0 °C y k una constante de proporcionalidad.

a) Si el volumen de un gas G a 0 °C es 4,02 dm^3 y a 15 °C es 4,8 dm^3, determina el valor de V_0 y el de k.

b) Calcula el volumen del gas G a 30 °C.

c) ¿Qué temperatura debe alcanzar el gas G para que su volumen sea 5,4 dm^3?

19. Selecciona cuáles de los siguientes pares ordenados pertenecen a la función g representada por la ecuación $g(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

a) (0;–6) b) (1;1) c) (–3;0) d) (–2;–6) e) (–1;–8) f) (2;2)

20. Escribe en tu cuaderno los enunciados siguientes y completa los espacios en blanco de manera que obtengas una proposición verdadera en cada caso.

Si h es una función cuadrática representada por la ecuación $h(x) = -2x^2 + 4x + 6$, entonces su gráfico es:

a) Una parábola que abre hacia _____ y tiene su vértice en el punto _____.

b) Una parábola que corta al eje de las abscisas en x_1 =____ y x_2 =____.

c) Una parábola que corta al eje de las ordenadas en y_0 =____.

d) Una parábola que tiene como eje de simetría una recta r de ecuación _____.

e) Una parábola que corta el gráfico de $y = -2x + 6$ en los puntos _____ y _____.

21. Selecciona la respuesta correcta.

Sea h una función dada por la ecuación $h(x) = -2x^2 + 4x + 6$, entonces su ecuación en la forma $y = a(x + d)^2 + e$, es:

a) $y = (x - 1)^2 - 4$ c) $y = -2(x - 1)^2 + 8$

b) $y = -2(x + 1)^2 - 4$ d) $y = 2(x - 1)^2 + 8$

22. Clasifica cada una de las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Si clasificas alguna como falsa justifica por qué lo es.

Si f es una función definida en el conjunto de los números reales y tiene como ecuación $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$, entonces:

a) Tiene dos ceros, $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$.

b) Es creciente en el intervalo real $0 < x < 2$.

c) Es una función impar.

d) Tiene como conjunto imagen $\{y \in \mathbb{R} : y \geq -8\}$.

e) Es positiva en el intervalo real $-3 < x < 1$

f) Si su dominio se restringe al intervalo real $[-2; 2)$, resulta que la imagen es el intervalo real $[-6; 10)$.

23. En una vista gráfica del GeoGebra crea los deslizadores correspondientes a los parámetros a y c. Da entrada a la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ y realiza las siguientes actividades:

a) Haz variar cada parámetro y verifica tus conocimientos sobre la influencia que estos tienen en el gráfico de la función.

b) Si $b = 0$ la ecuación tiene la forma $y = ax^2 + c$, verifica que se trata de funciones pares. Comprueba además que si $b \neq 0$ las funciones no son pares ni impares.

c) ¿Existe en el dominio de los números reales algún caso de función cuadrática, cuya ecuación tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$, que sea impar?

24. En una vista gráfica del GeoGebra crea los deslizadores correspondientes a los parámetros reales a, d, e; y da entrada a la ecuación $y = a(x + d)^2 + e$.

Ejecuta cada parámetro y verifica tus conocimientos sobre la influencia que estos tienen en el gráfico de la función.

25. Sean las siguientes funciones f_1; f_2; f_3 y f_4, dadas por sus ecuaciones y su dominio de definición:

$f_1(x) = 2x^2 - 2 \ (x \in \mathbb{R})$ $\qquad$ $f_3(x) = x^2 + x - 2 \ (-2 \leq x < 2)$

$f_2(x) = -x^2 + 4 \ (-2 \leq x \leq 1)$ $\qquad$ $f_4(x) = (x + 2)^2 + 1 \ (-3 < x < 0)$

En el dominio de definición dado:

a) Determina el conjunto imagen.

b) Halla los ceros y el intercepto del gráfico de la función con el eje de las ordenadas.

c) Traza su gráfico en un sistema de coordenadas rectangulares.
d) Determina el signo de las imágenes de cada una de las funciones.
e) Determina de las funciones el valor máximo y el valor mínimo.

26. Una pelota es lanzada hacia arriba desde el techo de un edificio que está a 30 m de altura, a una velocidad de 15 m/s. La dependencia de la altura en función del tiempo se puede modelar mediante la ecuación $h = f(t) = 30 + 15t - 5t^2$ (sin tener en cuenta el viento).
a) Determina la altura máxima que alcanzó la pelota.
b) Halla el tiempo que demoró la pelota para caer al suelo.
c) ¿En qué intervalo de tiempo (en segundos) la pelota asciende?
d) Representa en un sistema de coordenadas la situación planteada.

Del software

Para comprender la Matemática III

Del módulo "Funciones" realiza las actividades de aprendizaje 1, 2, 3, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 22, 23 y 29 una vez concluidas verifica tu respuesta con la retroalimentación.

3.2 Función modular

Si alguien está parado en un punto y camina hacia delante, dice caminé 10 m, pero si lo hace hacia atrás dice, retrocedí 10 m, lo cual podría expresar con el número –10 para indicar el sentido contrario, pero la distancia, independientemente del sentido, es una magnitud no negativa.

Una situación similar sucede si la planta baja de un edificio es considerada como el nivel cero (figura 3.34), cuando subimos en un elevador nos referimos a valores positivos, pero cuando bajamos a los pisos subterráneos también hablamos valores positivos, el signo menos "–" solo indica el sentido contrario, porque la profundidad es un valor n.

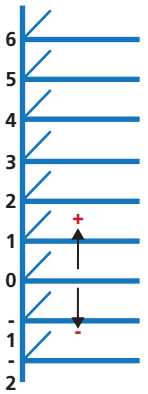


Fig. 3.34

En ambas situaciones se está aplicando el concepto de valor absoluto o módulo de un número real dado por la igualdad:

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

¿La correspondencia, en la que a cada número real x *situado sobre el eje de las abscisas se le asocia la distancia* d *que lo separa del origen de coordenadas, es una función? Si lo fuera, ¿cuál es el dominio de definición?, ¿cuál es el conjunto imagen?, ¿qué propiedades satisface?*

Esta correspondencia la podemos analizar para un conjunto de valores, utilizando una tabla como la siguiente:

Tabla 3.6

x	$y = d$	x	$y = d$
0	0	0	0
0,5	0,5	– 0,5	0,5
1	1	–1	1
1,41	1,41	–1,41	1,41
2	2	–2	2
2,3	2,3	–2,3	2,3
3,14	3,14	–3,14	3,14
3,5	3,5	–3,5	3,5
4	4	–4	4
4,5	4,5	–4,5	4,5
5	5	–5	5

La distancia *y* es una magnitud positiva que es única para cada número real *x,* entonces esta correspondencia es una función, cuyo gráfico para los valores de la tabla, es la que se muestra en la figura 3.35 a) y para todos los valores reales es la que se muestra en la figura 3.35 b).

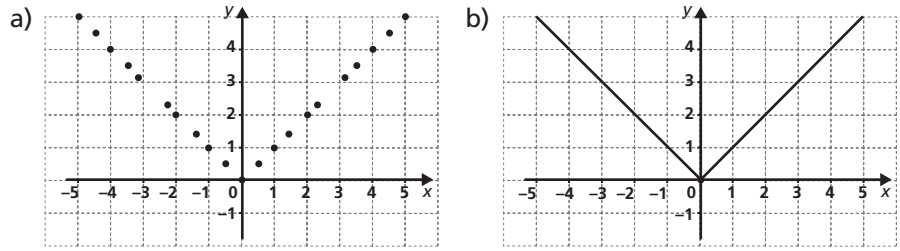


Fig. 3.35

Esta función se puede interpretar como una función lineal a trozos o tramos, cuya ecuación es:

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Observa que se corresponde con el módulo o valor absoluto de un número real. En este caso $y = f(x) = |x|$

Definición 3.6

La correspondencia que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asocia el número real $f(x) = |x|$, se denomina **función modular** o **valor absoluto** de un número real.
Representación de la función como un conjunto de pares ordenados:
$f = \{(x;y) : y = |x|; x \in \mathbb{R}\}$

La función modular o valor absoluto de un número real de ecuación $f(x) = |x|$, cuyo gráfico se muestra en la figura 3.36 cumple las propiedades siguientes:

Dominio de definición: $x \in \mathbb{R}$

Conjunto Imagen: $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$

Monotonía: creciente para $x > 0$ y decreciente para $x < 0$

Ceros: $x_0 = 0$

Simetría del gráfico: axialmente simétrico respecto al eje de las ordenadas.

Paridad: par

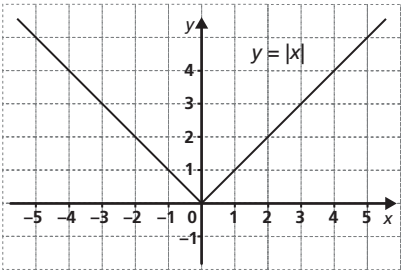


Fig. 3.36

Signo: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ es positiva

En general la función modular puede definirse.

Definición 3.7

La correspondencia f que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asocia el número real $f(x) = a|x+b|+c$, con $a \neq 0, b$ y c números reales se denomina **función modular** de un número real.
Representación de la función como un conjunto de pares ordenados:
$f = \{(x;y) : y = a|x+b|+c; x \in \mathbb{R}, a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}\}$

Aplica tus conocimientos

Utilizar el GeoGebra y analizar las transformaciones y traslaciones en la dirección de los ejes de coordenadas del gráfico de la función modular.

Una idea de la vista gráfica y algebraica que puedes lograr con este asistente, se muestra en la figura 3.37.

¿Cómo se hace?

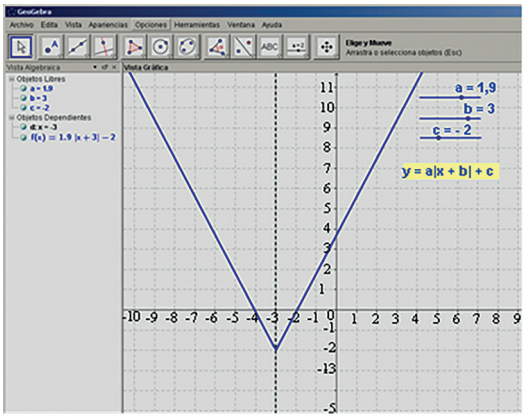


Fig. 3.37

Crear un deslizador para cada parámetro (a, b y c) en la pantalla gráfica del GeoGebra, dar entrada a la ecuación $y = a|x + b| + c$ *y ejecutar* ↵Enter. *De esta forma obtendrás el gráfico de la función para los valores de los parámetros que se indica en los deslizadores (figura 3.37). Al ejecutar el deslizador cambia el valor de los parámetros y podrás observar la ecuación que se obtiene en la vista algebraica y las variaciones de su gráfico.*

Compruébalo.

Ejemplo 3.11

Sea *f* una función cuya ecuación es $f(x) = |x - 2| - 1$.

a) Determinar el dominio de definición y el conjunto imagen.
b) Hallar los ceros y el intercepto con el eje de las ordenadas.
c) Explicar su monotonía si $x > 2$.
d) ¿Por qué *f* no es una función par?
e) Trazar su gráfico en un sistema de coordenadas rectangulares.
f) Determinar el signo de las imágenes de la función.
g) Determinar el valor máximo y el mínimo de la función.

Resolución:

a) Dom $f = \mathbb{R}$
Im $f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq -1\}$

b) $f(x) = 0$
$|x - 2| - 1 = 0$
$|x - 2| = 1$
$x - 2 = -1$ o $x - 2 = 1$

Los ceros de f son:

$x_1 = 1$ y $x_2 = 3$

$f(0) = |0 - 2| - 1 = 1$

El gráfico de f interseca el eje de las coordenadas en $y_1 = 1$.

c) Si $x > 2$ la función f es creciente porque en la medida que aumentan los valores del dominio aumentan los valores de sus imágenes.

d) f no es una función par porque no se cumple que $f(-x) = f(x)$. Su gráfico no es simétrico respecto al eje de las coordenadas.

e) gráfico

f) $x < 1$ positiva, $x > 3$ positiva; $1 < x < 3$ negativa

g) Valor máximo no tiene; Valor mínimo $f(2) = -1$. ♦

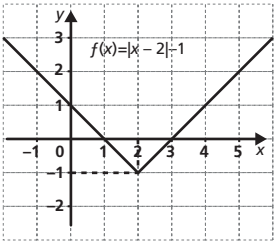


Fig. 3.38

Reflexiona sobre lo aprendido

Ya conoces que la correspondencia que a cada número real x le hace corresponder su valor absoluto es una función que se puede representar mediante la ecuación $y = f(x) = |x|$.

a) Analiza con tus compañeros de aula el comportamiento de la paridad y la monotonía de la función. Fundamente el porqué.

b) Si el par ordenado $(2x - 1;7)$ pertenece al función f, ¿qué valores reales puede tomar la variable x?

c) Si g es una función cuya ecuación es $g(x) = |x - 2| - 1$, entonces:

¿Cuál es su conjunto imagen?

¿Existe algún intervalo donde la función g es negativa?

¿En qué punto su gráfico corta el eje de las ordenadas?

Comparte con tus compañeros las respuestas que diste a las situaciones anteriores y las ideas que te permiten resumir los conocimientos esenciales que estudiaste en este epígrafe.

Ejercicios del epígrafe 3.2

1. Selecciona cuáles de los siguientes pares ordenados pertenecen a la función h, cuya ecuación es $h(x) = |x| - 1$.

a) $(0;-1)$ b) $(-1;0)$ c) $(-0,5;-1,5)$

d) $\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$ e) $(-0,1;0,9)$ f) $\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}-1\right)$

2. Sea g una función cuya ecuación es $g(x)=|x-1|$.

a) Determina el dominio de definición y el conjunto imagen de la función.

b) Comprueba que $\dfrac{g(-1)+2}{0{,}5\cdot g(-3)}-1=1$

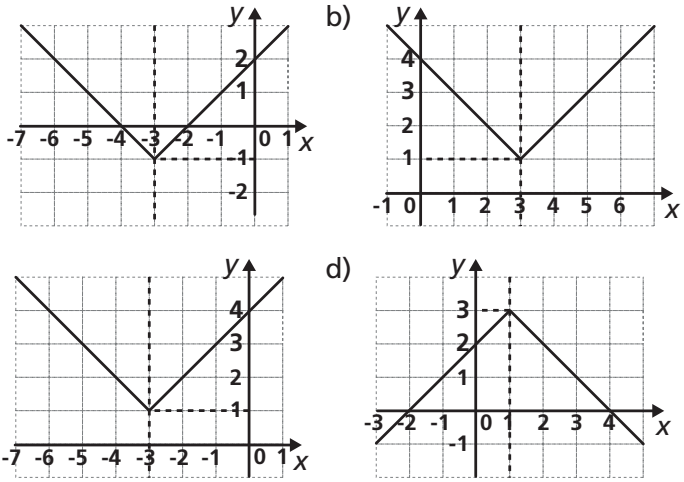
c) Halla los puntos donde el gráfico interseca los ejes de coordenadas.

d) Escribe un intervalo donde la función es monótona creciente.

e) Di el signo de las imágenes de la función.

3. En la siguiente figura 3.39 se muestra el gráfico de cuatro funciones modulares, cuyas ecuaciones tienen la forma $f(x)=|x+d|+e$. Selecciona a cuál de ellos puede corresponder la función que tiene como ecuación $f(x)=|x-3|+1$. Fundamenta el porqué de tu selección.

a) b)



c) d)

Fig. 3.39

4. Sean las siguientes funciones, f_1; f_2; f_3; y f_4 de las cuales se conocen sus ecuaciones en un dominio de definición dado:

$f_1(x)=2|x|-2 \quad ; \quad x\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $f_3(x)=|x+2|-3 \quad ; \quad -3\le x<2$

$f_2(x)=-|x|+4 \quad ; \quad x\in[-4;5]$ $\qquad$ $f_4(x)=-|x-2|-1 \quad ; \quad x\in[-1;3)$

a) Determina el conjunto imagen.

b) Calcula los ceros de la función y el intercepto del gráfico con el eje de ordenadas.

c) Traza su gráfico en un sistema de coordenadas rectangulares.

d) Escribe los intervalos en que la función es monótona decreciente.
e) Escribe los intervalos en que la función es negativa.
f) Determina los valores máximo y mínimo de cada una de las funciones.

5. La figura 3.40 muestra el gráfico de la función $y = f(x) = |x|$ y otros gráficos de funciones que han sido construidos a partir de esta, cuyas ecuaciones aparecen a continuación. Haz corresponder cada gráfico numerado con su ecuación.

a) $y = f(x) + 3$
b) $y = -f(x) - 1$
c) $y = f(x - 3)$
d) $y = 2f(x + 4)$
e) $y = f(x + 3) - 3$
f) $y = 0{,}5f(x + 4) + 2$

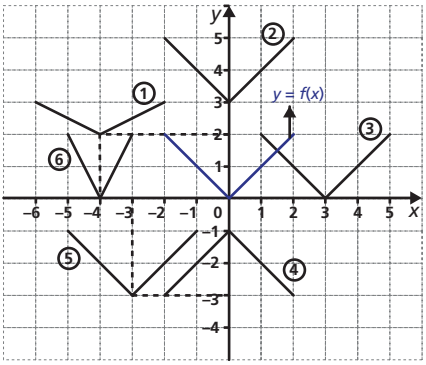


Fig. 3.40

6. En un juego en el que participan dos equipos de niños, cada integrante debe correr hasta una pared que está 10 m de la arrancada y regresar inmediatamente. El equipo ganador será el primero en lograr que todos sus integrantes realicen esta carrera. La ecuación $d = -2|t - 5| + 10$ describe aproximadamente la distancia *d*, que separa al jugador Ernesto del punto de arrancada, en función del tiempo *t.* Ernesto, que es el más rápido del equipo, mantuvo una velocidad constante $V \approx 2{,}0 \text{ m/s}$.

a) ¿Qué tiempo demoró Ernesto en realizar la carrera?
b) ¿Cuántos metros recorrió Ernesto a los 7,0 s de haber arrancado?
c) ¿A qué distancia del punto de arrancada estaba Ernesto cuando habían trascurrido 7,0 s de haber salido?
d) Traza el gráfico de la función que modela la situación planteada.
e) Si los 8 integrantes del equipo fueran tan rápidos como Ernesto, ¿cuál es el tiempo aproximado que necesitaría este equipo para que todos realicen la carrera?

3.3 Funciones potenciales de exponente entero

En este epígrafe estudiarás nuevas funciones matemáticas, en un primer momento será tratada la función cúbica, posteriormente una de las funciones más importante la de proporcionalidad inversa y finalmente

comprenderás que estas funciones estudiadas son casos particulares de las funciones potenciales, las cuales, por las propiedades que cumplen y la forma que tienen sus gráficos, pueden ser organizadas en cuatro grupos.

Para la comprensión y fijación de estos conocimientos te proponemos ejemplos y variados ejercicios, que requieren del conocimiento de los conceptos, relaciones y procedimientos que aplicaste en las funciones estudiadas anteriormente y del trabajo con potencias de base real y exponente racional.

Función cúbica

Ya conoces que existen problemas que establecen relaciones entre dos magnitudes y que una de ellas puede expresarse en función de la otra. El que te presentamos a continuación se refiere a una situación relacionada con la geometría.

Un recipiente para almacenar líquidos tiene forma de cono como el que se muestra en la figura 3.41. El diámetro de la base mide 12 m y la generatriz, 10 m. Cuando ha transcurrido cierto tiempo, después de haber comenzado a llenarse por una llave que vierte una cantidad constante de líquido, alcanza la altura x como se ilustra en dicha figura.

¿Mediante qué fórmula se puede expresar el volumen del líquido contenido en el recipiente en función de la altura que alcanza?

¿Es esta correspondencia una función? ¿Qué propiedades cumple?

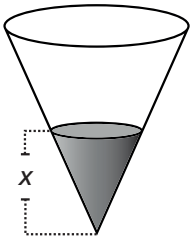


Fig. 3.41

Para resolver este problema nos apoyamos en una figura como la 3.42 que muestra el corte transversal del cono.

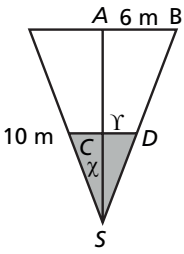


Fig. 3.42

El cono que representa el recipiente tiene altura $h = \overline{AS}$, el radio de la base es $r_R = \overline{AB} = 6{,}0\ \text{m}$ y la generatriz $g = \overline{BS} = 10\ \text{m}$. Luego, aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo *BAS*, rectángulo en *A*, se obtiene $h = 8{,}0$ m.

El volumen de líquido en el recipiente se calcula mediante la fórmula $V_L = \frac{1}{3}\pi r^2 x$, pero el radio *r* se puede expresar en función de *x*.

Si aplicas el Teorema de las transversales o la proporcionalidad entre los lados homólogos de los triángulos semejantes *BAS* y *DCS,* se obtiene la proporción $\frac{x}{8}=\frac{r}{6}$, de donde $r=\frac{3}{4}x$.

Sustituyendo en la fórmula del volumen del líquido en el recipiente, este se puede expresar en función de la variable x mediante la ecuación $V(x)=\frac{3\pi}{16}x^3$.

Observa que para cada valor real de la variable x $(0 \le x \le 8)$ se le asocia el valor $\frac{3\pi}{16}x^3$, que es único en cada caso.

▲ ¿Es esta correspondencia una función?

La respuesta es afirmativa, la ecuación $V(x)=\frac{3\pi}{16}x^3$ representa una función desconocida hasta el momento, la cual se puede expresar como un conjunto de pares ordenados:

$$V=\left\{(x;y): y=\frac{3\pi}{16}x^3; 0 \le x \le 8\right\}$$

Esta función es un caso particular de las funciones que estudiarás en este epígrafe, entonces es importante que reflexiones sobre la siguiente pregunta:

¿La correspondencia f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, en la que a cada número real se le asocia su cubo, es una función?

Debes comprender que cada número real x tiene un cubo único, por tanto la correspondencia es una función que todavía no has estudiado, la cual definiremos de la siguiente manera:

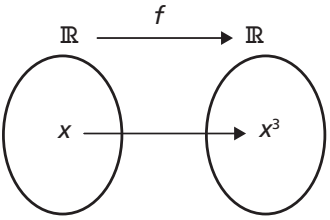


Fig. 3.43

Definición 3.8

La correspondencia que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asocia el número real $f(x) = x^3$, se denomina **función cúbica.**

Representación de la función como un conjunto de pares ordenados:

$$f=\left\{(x;y): y=x^3; x \in \mathbb{R}\right\}$$

Utilizando la calculadora científica, las tablas de cubos que aparecen al final del libro o de manera manual, puedes calcular el cubo de algunos números reales, tal como aparece en la siguiente tabla:

Tabla 3.7

x	– 2,5	– 2	– 1,5	– 1	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2
$y = x^3$	–15,6	– 8	– 3,4	– 1	– 0,13	0	0,13	1	3,4	8

Si representas estos pares ordenados en un sistema de coordenadas rectangulares se obtiene una gráfica como la que se muestra en la figura 3.44 a) y si aumentas la cantidad de pares o utilizas un asistente matemático, entonces el gráfico de f es una **parábola cúbica** como el que se muestra en la figura 3.44 b).

a) b)

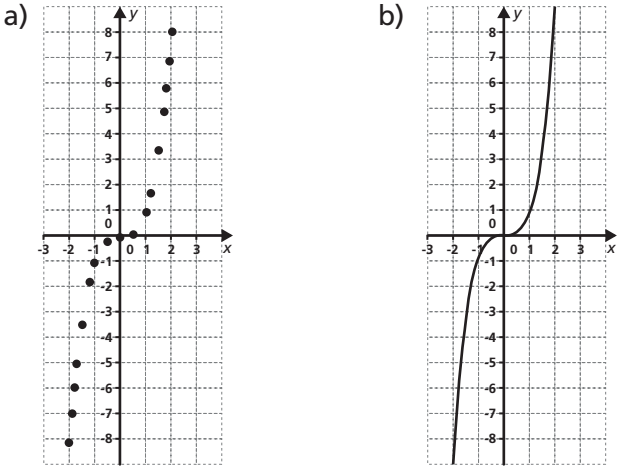


Fig. 3.44

Saber más

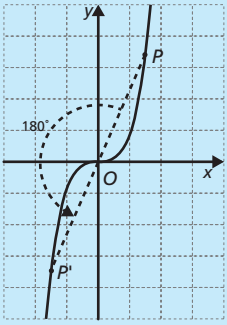


Fig. 3.45

El gráfico de una función cúbica de ecuación $f(x) = x^3$ es una **parábola cúbica** como se muestra en la figura 3.45, en este caso las ramas son centralmente simétricas respecto al origen de coordenadas.

La imagen de cualquier punto P de la parábola es un punto P' que también pertenece a la parábola, el cual se obtiene mediante una rotación de 180° con centro en el origen de coordenadas (simetría central).

El par (0;0) se denomina punto de inflexión pues el gráfico cambia de cóncavo a convexo.

▲ ¿Cuáles son propiedades de la función cúbica cuya ecuación es $y = f(x) = x^3$?

Si analizas la ecuación y te apoyas en su representación gráfica (figura 3.44 b) podrás comprender el resumen de la siguiente tabla:

Dominio de definición	$\mathbb{R}$	Para cada número real existe su cubo y la proyección de la gráfica de la función sobre el eje de las abscisas lo cubre completamente.
Conjunto imagen	$\mathbb{R}$	Cualquier número real se puede expresar por el cubo de un número real y la proyección de la gráfica de la función sobre el eje de las ordenadas lo cubre completamente.
Monotonía	Creciente en todo su dominio de definición	En la medida que crecen los valores del dominio, crecen los valores de sus imágenes.
Ceros	Tiene un único cero $x_0 = 0$	La gráfica de la función corta en un solo punto el eje de las abscisas.
Paridad	impar	Las imágenes de dos valores opuestos del dominio siempre son opuestas y el gráfico es centralmente simétrico respecto al origen de coordenadas.
Signo	Para $x < 0$ es negativa Para $x > 0$ es positiva	Las imágenes de la función para los valores del dominio menores que cero es negativa y para los valores del dominio mayores que cero es positiva.

Ejemplo 3.12

Sean las siguientes funciones f y g, definidas por sus ecuaciones en un dominio de definición dado en cada caso.

$f(x) = x^3 + 1;\ x \in [-2; 1]$

$g(x) = (x + 1)^3;\ -2 \leq x < 0{,}5$

a) Determinar su conjunto imagen, el cero, el intercepto del gráfico de la función con el eje de las ordenadas, los signos de la función y el valor máximo y mínimo en el dominio dado.

b) Trazar su gráfico en un sistema de coordenadas rectangulares.

Resolución:

a) $\text{Im}\, f = \{y \in \mathbb{R} : -7 \leq y \leq 2\}$

Cero: $x_0 = -1$

Intercepto del gráfico con el eje y: $y_1 = 1$

Signos de la función:

$-2 \leq x < -1$ negativa

$-1 < x \leq 1$ positiva

Valor máximo $f(1) = 2$

Valor mínimo $f(-2) = -7$

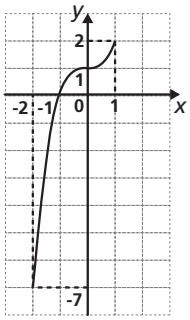


Fig. 3.46

b) $\text{Im}\, f = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y < 3{,}375\}$

Cero: $x_0 = -1$

Intercepto del gráfico con el eje y: $y_1 = 1$

Signos de la función

$-2 \leq x < -1$ negativa

$-1 < x < 0{,}5$ positiva

Valor máximo: No tiene

Valor mínimo: $g(-2) = -1$ ♦

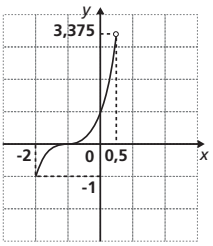


Fig. 3.47

Función de proporcionalidad inversa

Una imprenta cuenta con impresoras de diferentes tipos para realizar un mismo trabajo (figura 3.48). No todas las impresoras demoran el mismo tiempo, sino que este varía desde 1,5 h hasta 10 h.

¿Cómo varía la parte del trabajo que puede realizar cada impresora en una hora, en función del tiempo total que necesita para realizarlo completamente?



Fig. 3.48

Este análisis lo puedes realizar mediante una tabla como la siguiente:

Tabla 3.8

Tiempo *t* que demora en realizar el trabajo	Parte *P* del trabajo que realiza en una hora
1,5 h	$P = \dfrac{1}{1{,}5} = \dfrac{2}{3}$

Tiempo t que demora en realizar el trabajo	Parte P del trabajo que realiza en una hora
2 h	$P = \frac{1}{2}$
2,5 h	$P = \frac{1}{2,5} = \frac{2}{5}$
4 h	$P = \frac{1}{4}$
t horas	$P = \frac{1}{t}$

Si el tiempo t que demora en realizar completamente el trabajo aumenta, entonces la parte P del trabajo que realiza en una hora disminuye. Se trata de dos cantidades inversamente proporcionales, en este caso t y $P = \frac{1}{t}$. La ecuación $P = \frac{1}{t}$ expresa la relación entre estas dos cantidades, la cual se puede interpretar como la correspondencia que a cada número real t, tal que $t \in [1,5; 10]$, le asocia su recíproco.

▲ ¿Es esta correspondencia una función?

Durante el desarrollo de este epígrafe podrás responder la pregunta anterior, ahora debes reflexionar sobre otra situación que ilustra la proporcionalidad inversa entre dos magnitudes:



Fig. 3.49

Un automóvil que se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme recorre una cierta distancia s a una determinada velocidad u y para ello invierte una cantidad de tiempo t. En la medida que aumenta la velocidad (manteniendo invariante la distancia), disminuye el tiempo empleado en el recorrido. Por lo tanto, la velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales. Por ejemplo, si la distancia que se va a recorrer es s = 100 km, entonces la variación entre estas magnitudes se puede expresar mediante la ecuación $v = \frac{100}{t}$.

Las ecuaciones $P = \frac{1}{t}$ y $v = \frac{100}{t}$ expresan cómo varían las cantidades P o v en función del tiempo t. En ambos casos, para cada valor admisible de la

variable independiente *t* existe un único valor de las variables dependientes *P* o *v*, por tanto, estas correspondencias son funciones que aún no has estudiado.

Definición 3.9

La correspondencia que a cada $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$, le asocia el número real $f(x) = \frac{k}{x}$, donde *k* es un número real $k \neq 0$, se denomina **función de proporcionalidad inversa.** En este caso *k* es la constante de proporcionalidad. Representación de la función como un conjunto de pares ordenados:

$$f = \left\{(x;y) : y = \frac{k}{x}; x \in \mathbb{R}, x \neq 0, k \neq 0\right\}$$

El caso más simple de estas funciones es cuando $k = 1$ en que la función tiene como ecuación $f(x) = \frac{1}{x}$ la cual puede escribirse, en virtud de las propiedades de las potencias, como $f(x) = x^{-1}$, con $x \neq 0$.

Veamos en la tabla siguiente algunos de los valores de esta función:

Tabla 3.9

x	$y = \frac{1}{x}$	x	$y = \frac{1}{x}$	x	$y = \frac{1}{x}$	x	$y = \frac{1}{x}$
–4,5	–0,22	–2	–0,5	0,2	5	2,5	0,4
–4	–0,25	–1,5	–0,67	0,5	2	3	0,33
–3,5	–0,29	–1	–1	1	1	3,5	0,29
–3	–0,33	–0,5	–2	1,5	0,67	4	0,25
–2,5	–0,40	–0,2	–5	2	0,5	4,5	0,22

Si representas estos pares ordenados en un sistema de coordenadas rectangulares se obtiene una gráfica como la que se muestra en la figura 3.50 a) y si aumentas la cantidad de pares ordenados o utilizas un asistente matemático, entonces el gráfico de *f* es como el que se muestra en la figura 3.50 b).

Cuando el gráfico de una función se acerca infinitamente a una recta se dice que tiene un comportamiento asintótico y dicha recta se llama **asíntota** del gráfico de la función. Observa cómo el gráfico de la función dada por la ecuación $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ se aproxima a los ejes de coordenadas y no llega a intersecarlos, por tanto las asíntotas del gráfico de esta función son precisamente los ejes de coordenadas.

a) b)

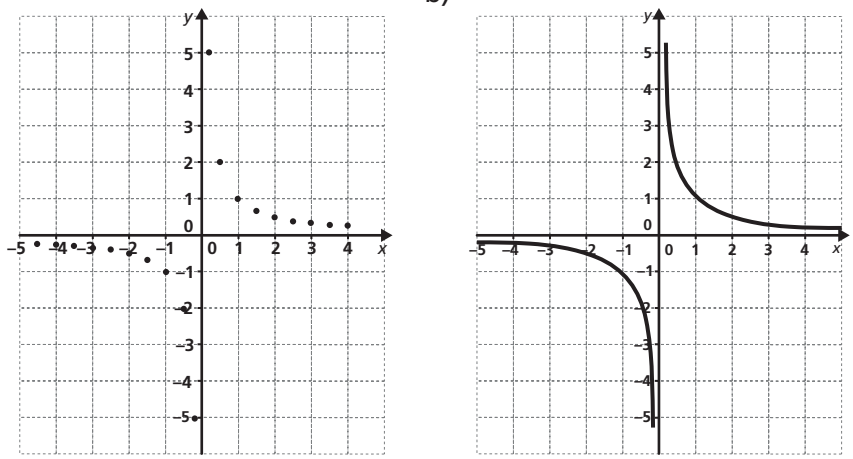


Fig. 3.50

¿? ¿Sabías que...?

El gráfico de una función de proporcionalidad inversa de ecuación $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ es una curva llamada **hipérbola** (figura 3.51). En este caso las ramas son centralmente simétricas respecto al origen de coordenadas.

La imagen de cualquier punto *P* de la curva es un punto *P´*, que también pertenece a la curva, el cual se obtiene mediante una rotación de 180° con centro en el origen de coordenadas (simetría central).

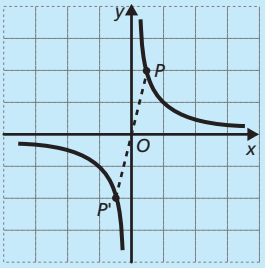


Fig. 3.51

▲ ¿Cuáles son las propiedades de la función cuya ecuación es $y = f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$?

Si analizas la ecuación y te apoyas en su representación gráfica (figura 3.50 b) podrás elaborar un resumen como el que te proponemos en la siguiente tabla:

Dominio de definición	$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$	Para cada número real $x \neq 0$ existe el número real $y = \frac{1}{x}$ y la proyección de la gráfica de la función sobre el eje de las abscisas solo deja de cubrir el origen de coordenadas.

Conjunto imagen	$\{y \in \mathbb{R} : y \neq 0\}$	Para cada número real $y \neq 0$ existe un número real $x \neq 0$ tal que $y = \frac{1}{x}$ y la proyección de la gráfica de la función sobre el eje de las ordenadas solo deja de cubrir el origen de coordenadas.
Monotonía	Para $x < 0$ es decreciente Para $x > 0$ es decreciente	En la medida que crecen los valores del dominio, decrecen sus imágenes.
Ceros	No tiene ceros	La gráfica de la función no interseca al eje de las abscisas.
Paridad	Impar	Las imágenes de dos valores opuestos del dominio siempre son opuestas y el gráfico es centralmente simétrico respecto al origen de coordenadas.
Signo	Para $x < 0$ es negativa Para $x > 0$ es positiva	Las imágenes de la función para los valores del dominio menores que cero es negativa y para los valores del dominio mayores que cero es positiva.
Asíntotas del gráfico	Asíntota horizontal: El eje de las abscisas cuya ecuación es $y = 0$ Asíntota vertical: El eje de las ordenadas cuya ecuación es $x = 0$	El gráfico de la función se acerca infinitamente a los ejes de coordenadas, pero no llega a intersecarlo.

Generalización de las funciones potenciales de exponente entero

Has podido estudiar dos funciones en las cuales la variable independiente es la base de una potencia de exponente entero: la cúbica cuya ecuación es $y = x^3$ y la de proporcionalidad inversa que tiene como ecuación $y = x^{-1}$, aun cuando es más práctico trabajar con $y = \frac{1}{x}$. ¿Existe alguna relación entre dos funciones?

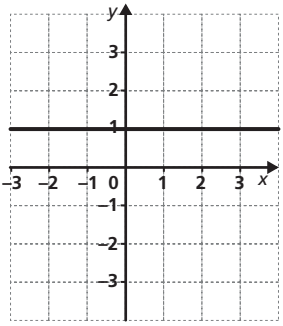
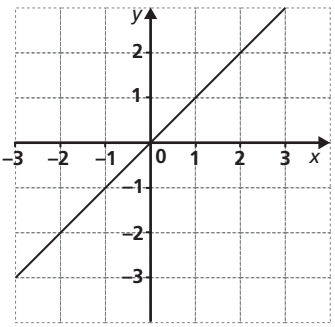
Definición 3.10

La correspondencia que a cada valor admisible de $x \in \mathbb{R}$, le asocia el número real $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{Z}$, se denomina **función potencial de exponente entero.**

De acuerdo con esta definición, las dos funciones estudiadas anteriormente son funciones potenciales de exponente 3 y –1, respectivamente.

¿Satisfacen las funciones potenciales de exponente entero las mismas propiedades? ¿Qué relación hay entre sus gráficos?

Primeramente, es importante reconocer que las funciones lineales de ecuaciones $y = x^0 = 1$ (con $x \neq 0$) y $y = x^1 = x$, son casos particulares de funciones potenciales de exponente entero.

	$y = x^0 = 1 \quad (x \neq 0)$	$y = x^1 = x$
Dominio de definición	$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$	$\mathbb{R}$
Conjunto imagen	$\{y \in \mathbb{R} : y = 1\}$	$\mathbb{R}$
Gráfico de la función	 **Fig. 3.52**	 **Fig. 3.53**

Las restantes funciones potenciales las podemos organizar en cuatro grupos, según el comportamiento de sus gráficos y propiedades globales: (1) exponente par positivo, (2) exponente par negativo, (3) exponente impar positivo, (4) exponente impar negativo. Este análisis lo puede realizar utilizando las herramientas del GeoGebra (figura 3.54) y posteriormente resumir las propiedades y el gráfico en una tabla.

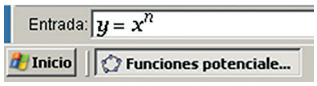
▲ ¿Cómo hacerlo?

Crear un deslizador para el parámetro n en la pantalla gráfica del GeoGebra, dar entrada a la ecuación $y = x^n$ y ejecutar ↵Enter. De esta forma obtendrás el gráfico de la función que indica el valor de n en el deslizador (figura 3.54). Al ejecutar el deslizador cambia el valor de n y podrás observar la ecuación que se obtiene en la vista algebraica y las variaciones de su gráfico.

Herramienta para crear los deslizadores:



Dar entrada a la ecuación:



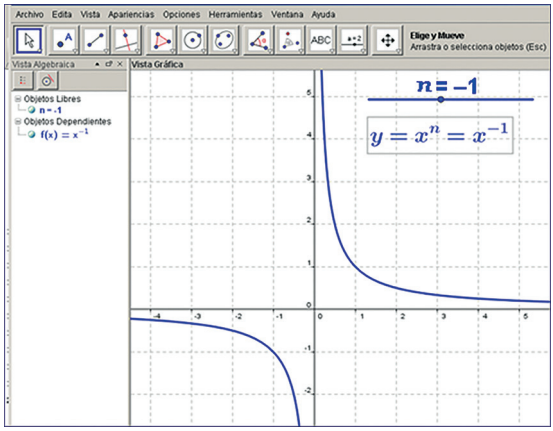
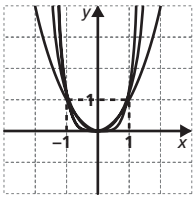
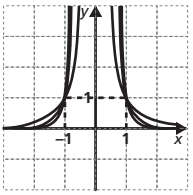
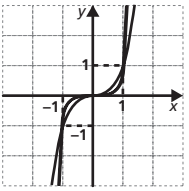
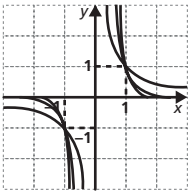


Fig. 3.54

Resumen de las funciones potenciales

	$y = x^n \ (n \in \mathbb{Z})$ n: par positivo	$y = x^n \ (n \in \mathbb{Z})$ n: par negativo	$y = x^n \ (n \in \mathbb{Z})$ n: impar positivo	$y = x^n \ (n \in \mathbb{Z})$ n: impar negativo
Ejemplos	$y = x^2$; $y = x^4$; $y = x^6$;...	$y = x^{-2}$; $y = x^{-4}$; $y = x^{-6}$;...	$y = x^3$; $y = x^5$; $y = x^7$;...	$y = x^{-1}$; $y = x^{-3}$; $y = x^{-5}$;...
Dominio de definición	$\mathbb{R}$	$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$	$\mathbb{R}$	$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
Conjunto Imagen	$\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$	$\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$	$\mathbb{R}$	$\{y \in \mathbb{R} : y \neq 0\}$
Puntos característicos	(–1;1) y (1;1)	(-1;1) y (1;1)	(–1;–1) y (1;1)	(–1;–1) y (1;1)
Ceros	$x_0 = 0$	No tienen	$x_0 = 0$	No tienen
Paridad	pares	pares	impares	impares
Simetría del gráfico	Axialmente simétricos respecto al eje de las ordenadas	Axialmente simétricos respecto al eje de las ordenadas	Centralmente simétricos respecto al origen de coordenadas	Centralmente simétricos respecto al origen de coordenadas
Monotonía	Crecientes si $x > 0$ Decrecientes si $x < 0$	Decrecientes si $x > 0$ Crecientes si $x < 0$	Crecientes en todo su dominio de definición	Decrecientes para $x < 0$ Decrecientes para $x > 0$
Signo	$x \neq 0$ positiva	$x \neq 0$ positiva	$x < 0$ negativa $x > 0$ positiva	$x < 0$ negativa $x > 0$ positiva

	$y = x^n \ (n \in \mathbb{Z})$	$y = x^n \ (n \in \mathbb{Z})$	$y = x^n \ (n \in \mathbb{Z})$	$y = x^n \ (n \in \mathbb{Z})$
	n: par positivo	n: par negativo	n: impar positivo	n: impar negativo
Gráficos	 **Fig. 3.55**	 **Fig. 3.56**	 **Fig. 3.57**	 **Fig. 3.58**

Ejemplo 3.13

Sea la función f cuya ecuación es $f(x) = (x+2)^4 - 1$

a) Trazar su gráfico en un sistema de coordenadas cartesianas.

b) Determinar el dominio de definición, el conjunto imagen, los ceros, un intervalo en que la función sea positiva y un valor mínimo de la función.

Resolución:

a)

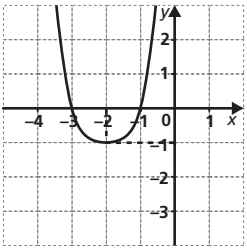


Fig. 3.59

b) Dom $f = \mathbb{R}$

Im $f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq -1\}$

$(x+2)^4 - 1 = 0$

$(x+2)^4 = 1$

$x + 2 = \pm\sqrt[4]{1}$

$x + 2 = 1$ o $x + 2 = -1$

$x = -1$ o $x = -3$

Ceros: $x_1 = -1$ y $x_2 = -3$

La función es positiva

$x < -3 \text{ o } x > -1$

El valor mínimo es $f(-2) = -1$ ♦

Reflexiona sobre lo aprendido

Sean f y g funciones potenciales cuyas ecuaciones son $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{-1}$, respectivamente.

a) Analiza con tus compañeros de aula el comportamiento de la paridad, la monotonía y los signos de ambas funciones. Fundamenta en cada caso.

b) ¿Si el gráfico de f se traslada 2 unidades en el sentido positivo del eje de las abscisas y 3 en el sentido positivo del eje de las ordenadas, la nueva gráfica obtenida corta el eje de las ordenadas?

c) El par $\left(x_1;-\frac{4}{3}\right)$ pertenece a la función *g*, analiza cuántos valores reales puede tomar la abscisa x_1.

d) ¿Si el gráfico de la función *h* se traslada 1 unidad en el sentido negativo del eje de las abscisas y 2 en el sentido positivo del eje de las ordenadas, entonces las asíntotas siguen siendo los ejes de coordenadas? Fundamenta tu respuesta.

d) Las funciones reales de exponente entero tienen la forma $y = x^n$, ¿qué valores enteros debe tomar *n* para que las funciones representadas por estas ecuaciones tengan dominio de definición $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ y conjunto imagen $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$?

Comparte con tus compañeros las respuestas que diste a las situaciones anteriores y las ideas que te permiten resumir los conocimientos esenciales que estudiaste en este epígrafe.

Ejercicios del epígrafe 3.3

Función cúbica

1. Selecciona cuáles de los siguientes pares ordenados pertenecen a la función *f* de ecuación $f(x) = x^3$.

a) $(-3;-27)$ b) $(5;125)$ c) $(-0,2;0,008)$ d) $\left(-\frac{5}{3};-\frac{125}{27}\right)$

e) $(-0,3;-0,027)$ f) $\left(\frac{7}{4};\frac{49}{64}\right)$ g) $\left(\frac{7}{4};-\frac{343}{64}\right)$ h) $(0,001;0,000\ 000\ 001)$

2. Halla en cada caso el valor de la variable *a* si se conoce que el par ordenado pertenece a la función *f* representada por la ecuación.

a) $(6;a)$ b) $\left(a;-\frac{8}{27}\right)$ c) $(a;0,001)$ d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};a\right)$ e) $\left(a;-2\sqrt{2}\right)$

3. Clasifica cada una de las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Si clasificas alguna como falsa justifica por qué lo es.

a) Para todo número real *x* existe un número real *y* tal que $y = x^3$.

b) Existe por lo menos un número real *y* que no es el cubo de un número real.

c) Sea *f* una función cuya ecuación es $f(x) = x^3$ (con $x \in \mathbb{R}$). Si $(a;b) \in f$, entonces $(-a;-b) \in f$.

d) La función *f*, cuya ecuación es $f(x) = x^3$ (con $x \in \mathbb{R}$), es monótona creciente en todo su dominio y su gráfico es axialmente simétrico respecto al eje de las ordenadas.

e) La función *f*, cuya ecuación es $f(x)=x^3$ ($x\in\mathbb{R}$), es impar por lo que su gráfico es centralmente simétrico respecto al origen de coordenadas.

f) La función *f*, cuya ecuación es $f(x)=x^3$ ($x\in\mathbb{R}$), es negativa para $x\le 0$.

4. La función *f*, cuya ecuación es $f(x)=x^3$ ($x\in\mathbb{R}$), es impar. Utiliza este conocimiento para determinar el simétrico de los siguientes pares ordenados que pertenecen a la función *f*.

a) $(1;1)$ b) $(5;125)$ c) $(-1;-1)$ d) $(0;0)$

e) $(-2;-8)$ f) $\left(-\sqrt[3]{3};-3\right)$ g) $\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{3};\frac{1}{3}\right)$

5. Las siguientes funciones están dadas por sus ecuaciones correspondientes:

a) $f_1(x)=2x^3$ $\quad f_2(x)=-\frac{1}{2}x^3$

b) $g_1(x)=x^3-1$ $\quad g_2(x)=x^3+1$

c) $h_1(x)=(x-2)^3$ $\quad h_2(x)=(x+3)^3$

d) $p_1(x)=(x-2)^3+1$ $\quad p_2(x)=(x+3)^3-1$

5.1 Calcula los ceros de cada función.

5.2 Traza el gráfico de estas funciones. Debes representar cada pareja (f_1 y f_2; g_1 y g_2; h_1 y h_2; p_1 y p_2) en un mismo sistema de coordenadas cartesianas.

5.3 Si $f(x)=x^3$, explica cómo influyen los parámetros reales *a, b* y *c* en el gráfico *f* para obtener el de las funciones cuyas ecuaciones tienen la forma $y=ax^3$, $y=x^3+c$ y $y=(x+b)^3$.

6. Utiliza un asistente matemático como el GeoGebra y verifica cómo varía el gráfico de las funciones cuyas ecuaciones tienen la forma $y=a(x+b)^3+c$, según sea el valor de los parámetros reales *a, b* y *c*.

7. Las siguientes funciones *f, g, h, i* están representadas por sus ecuaciones en un dominio de definición dado. Determina en cada caso el conjunto imagen, la monotonía, los ceros, signo y traza el gráfico correspondiente en un sistema de coordenadas rectangulares.

a) $f(x)=x^3+8$	$\text{Dom}\, f=\{x\in\mathbb{R}: -2\le x\le 1\}$
b) $g(x)=(x-5)^3$	$\text{Dom}\, g=\{x\in\mathbb{R}: 4\le x\le 6{,}5\}$

c) $h(x)=(x+3)^3+2$	$\text{Dom}\, h=\{x\in\mathbb{R}: -5\le x<-2\}$
d) $i(x)=x^3+3$	$\text{Dom}\, i=\{x\in\mathbb{R}: x<0\}$

8. Cada una de las parábolas cúbicas representa el gráfico de una función cuya ecuación tiene la forma $f(x)=(x+b)^3+c$. Si los puntos A y V pertenecen al gráfico de la función, escribe la ecuación que corresponde en cada caso.

a) b) c) d)

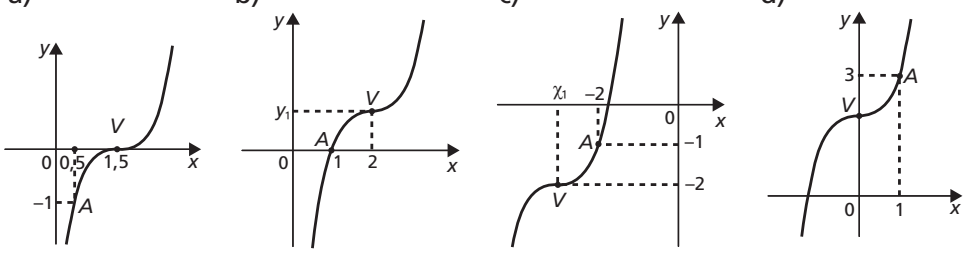


Fig. 3.60

9. A continuación se relaciona un conjunto de ecuaciones que se corresponden con funciones cúbicas *f, g, h, p, q, r* definidas en el conjunto de los números reales.

$f(x)=x^3$	$h(x)=1-x^3$	$q(x)=(x+1)^3-1$
$g(x)=3x^3$	$p(x)=(x-1)^3$	$r(x)=-(x-2)^3+1$

a) ¿Cuáles de los gráficos de las funciones dadas pasan por el origen de coordenadas?

b) ¿Cuáles de los gráficos de las funciones dadas intersecan al eje de las ordenadas en $y_0=-1$?

c) ¿Cuáles de las funciones dadas son impares?

d) ¿Cuáles de los gráficos de las funciones dadas son centralmente simétricos respecto al origen de coordenadas?

e) ¿Para cuáles de las funciones dadas se cumple que para valores del dominio, ordenados de manera ascendente, los valores correspondientes de sus imágenes resultan ordenados descendentemente?

f) ¿Cuáles de las funciones dadas tienen su único cero en $x_0=3$?

Función de proporcionalidad inversa

10. Selecciona cuáles de los siguientes pares ordenados pertenecen a la función *f* representada por la ecuación $f(x)=\frac{1}{x}$.

a) $(-1;-1)$ b) $\left(2;\frac{1}{2}\right)$ c) $(0,2;2)$ d) $\left(-\frac{3}{4};-\frac{4}{3}\right)$ e) $(-0,5;-2)$

f) $\left(\frac{4}{7};1,75\right)$ g) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$ h) $(0,001;1\,000)$ i) $(100;0,01)$

11. Halla en cada caso el valor de la variable *a* si se conoce que el par ordenado pertenece a la función *g* representada por la ecuación $g(x)=\frac{1}{x}$.

a) $(5;a)$ b) $\left(a;-\frac{4}{5}\right)$ c) $(a;10)$ d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};a\right)$

e) $\left(a;-2\sqrt{2}\right)$ f) $(-0,002;a)$

12. Clasifica cada una de las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Si clasificas alguna como falsa justifica por qué lo es.

a) Para todo número real $x\neq 0$ existe un número real *y* tal que $y=x^{-1}$.

b) Existe por lo menos un número real $x\in\mathbb{R}$ para el cual no existe un número real *y* tal que $y=\frac{1}{x}$.

c) Sea *f* una función cuya ecuación es $f(x)=\frac{1}{x}$ (con $x\in\mathbb{R};x\neq 0$). Si $(a;b)\in f$, entonces $(-a;-b)\in f$.

d) La función *h*, cuya ecuación es $h(x)=\frac{1}{x}$ (con $x\in\mathbb{R};x\neq 0$), es decreciente para $x>0$ y su gráfico corta al eje de las abscisas para un valor muy grande de *x*.

e) La función *g*, cuya ecuación es $g(x)=\frac{1}{x}$ (con $x\in\mathbb{R};x\neq 0$), es impar por lo que su gráfico es centralmente simétrico respecto al origen de coordenadas.

f) La función *g*, cuya ecuación es $g(x)=\frac{1}{x}$ (con $x\in\mathbb{R};x\neq 0$), es negativa para $x>0$

13. Determina cuáles de los siguientes pares pertenecen a la función cuya ecuación es $f(x)=\frac{1}{x}$ (con $x\in\mathbb{R};x\neq 0$), en caso de pertenecer el par y conociendo que se trata de una función impar halla el par simétrico en cada caso.

a) $(1;1)$ b) $\left(3;\frac{1}{3}\right)$ c) $(1;-1)$ d) $\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$

e) $(-2;-0{,}5)$ f) $(10;10)$ g) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$ h) $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{4};2\sqrt[3]{4}\right)$

14. Las siguientes funciones $f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2, p_1, p_2$, definidas en un subconjunto del conjunto de los números reales están dadas por sus ecuaciones correspondientes:

$f_1(x)=\frac{2}{x}$ $g_1(x)=\frac{1}{x}-1$ $h_1(x)=\frac{1}{x-1}$ $p_1(x)=\frac{1}{x-2}+1$

$f_2(x)=-\frac{1}{x}$ $g_2(x)=\frac{1}{x}+1$ $h_2(x)=\frac{1}{x+1}$ $p_2(x)=\frac{1}{x+2}-3$

a) Calcula los ceros de cada función, si existen.
b) Traza el gráfico de estas funciones.
c) Si la función *f* definida para todo número real diferente de cero cuya ecuación es $f(x)=\frac{1}{x}$, explica cómo influyen los parámetros reales *a, b* y *c* en el gráfico de *f* para obtener el de las funciones cuyas ecuaciones tienen la forma $y=\frac{a}{x}$, $y=\frac{1}{x}+c$ y $y=\frac{1}{x+b}$.
d) Determina cuáles de estas funciones son impares y explica por qué no lo son.
e) Escribe las ecuaciones de las asíntotas de los gráficos de las funciones y determina las coordenadas del punto de intersección de estas.

15. Utiliza un asistente matemático como el GeoGebra y verifica cómo varía el gráfico de las funciones cuyas ecuaciones tienen la forma $y=\frac{a}{x+b}+c$, según sea el valor de los parámetros reales *a, b* y *c*.

16. Las siguientes funciones, *f; g; h; i; j* que están representadas por sus ecuaciones, definidas en un subconjunto de los números reales. Determina de cada una de ellas el dominio de definición, el conjunto imagen, la monotonía y los ceros. Traza su gráfico en un sistema de coordenadas cartesianas, para ello te puedes apoyar en un asistente matemático como el GeoGebra.

a) $f(x)=\frac{0{,}5}{x}$; $x\geq -1$ b) $g(x)=\frac{1}{x}+2$; $-3\leq x\leq 3$

c) $h(x)=\dfrac{1}{x-4}$; $x\geq 0$ d) $i(x)=-\dfrac{1}{x-4}$; $x\geq 0$

e) $j(x)=\dfrac{1}{x-4}+2$; $0\leq x\leq 5$

17. Cada uno de los siguientes gráficos (figura 3.61) corresponden a una función cuya ecuación tiene la forma $f(x)=\dfrac{1}{x+b}+c$. En la figura se muestran, además, algunos elementos de la función lo cual te brinda más información sobre ella. Determina la ecuación que corresponde a cada una.

a) b) c) d)

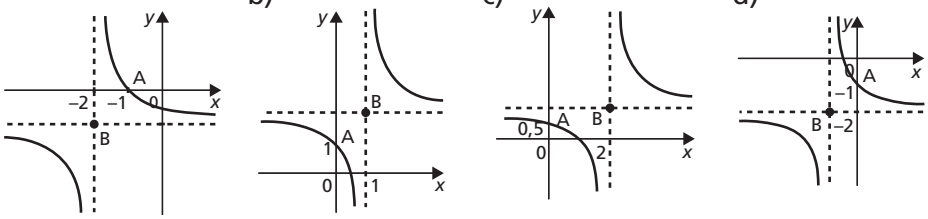


Fig. 3.61

Generalización de las funciones potenciales de exponente entero

18. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno e identifica las funciones a las cuales pertenece cada uno de los pares ordenados que aparecen en la primera columna.

	$y=x^4$	$y=x^{-2}$	$y=x^{-3}$	$y=x^5$	$y=x^3+1$	$y=(x-2)^{-1}+3$
$(0;0)$						
$(0;1)$						
$(1;1)$						
$(-1;-1)$						
$(-1;1)$						
$(1;2)$						
$(2;3)$						
$\left(\frac{1}{2};8\right)$						

19. Copia en tu cuaderno y enlaza cada función de la columna A con la propiedad que le corresponde en la columna B.

A	B
1) f, de ecuación $y = x^4$	a) Tiene dos ceros, $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$
2) g, de ecuación $y = 0{,}01x^3$	b) Es par y tiene un solo cero
3) h, de ecuación $y = x^{-1} + 2$	c) Contiene al par ordenado $(3;-1)$
4) i, de ecuación $y = x^8 - 1$	d) Es impar
5) j, de ecuación $y = x^3 + 8$	e) Es par y tiene dos ceros
6) k, de ecuación $y = -(x-2)^3$	f) Es creciente en todo su dominio y tiene un cero en $x_1 = -2$
7) l, de ecuación $y = (x+3)^{-1} + 3$	g) La recta $y = 2$ es la asíntota horizontal del gráfico de la función
8) m, de ecuación $y = (x-2)^{-2} - 1$	h) Las asíntotas de su gráfica se cortan en el punto de coordenadas (–3; 3)

20. Copia en tu cuaderno y enlaza cada función de la columna A con el conjunto imagen que le corresponde en la columna B.

A	B
1) f, de ecuación $y = x^4$	a) $\mathbb{R}$
2) g, de ecuación $y = -0{,}5x^3 + 2$	b) $\{y \in \mathbb{R} : y \geq -1\}$
3) h, de ecuación $y = x^{-1} + 2$	c) $\{y \in \mathbb{R} : y > -0{,}5\}$
4) i, de ecuación $y = x^8 - 1$	d) $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$
5) j, de ecuación $y = \frac{1}{x^3} - 2$	e) $\{y \in \mathbb{R} : y > 1\}$
6) k, de ecuación $y = -(x-2)^{-1}$	f) $\{y \in \mathbb{R} : y \neq -2\}$
7) l, de ecuación $y = (x+3)^2 + 1$	g) $\{y \in \mathbb{R} : y \neq 0\}$
8) m, de ecuación $y = (x-2)^{-2} - 0{,}5$	h) $\{y \in \mathbb{R} : y \neq 2\}$

Ejercicios del capítulo 3

1. Determina cuáles de las siguientes correspondencias son funciones y exprésalas como un conjunto de pares ordenados.

a) A cada número real no negativo se le asocian sus raíces cuadradas.

b) A cada número real se le hace corresponder su cuadrado disminuido en su duplo.

c) A cada número real se le hace corresponder su cubo aumentado en su cuadrado.
d) A cada número natural se le asocian sus divisores.
e) A cada número real no nulo se le hace corresponder el cuadrado de su recíproco.
f) A cada número real no negativo se le hace corresponder su raíz cuadrada aritmética.

2. Determina cuáles de los siguientes conjuntos de pares ordenados son funciones:

a) $g = \{(-3;4),(-\sqrt{2};5),(3,14;4),(5;4),(5,1;6),(8,3;9)\}$

b) $g = \{(4;-3),(5;-\sqrt{2}),(4;3,14),(4;5),(6;5,1),(9;8,3)\}$

c) $g = \{(x;y) : y = x^5 - x; x \in \mathbb{R}\}$

d) $g = \{(x;y) : y = \sqrt{|x|} + 1; x \in \mathbb{R}\}$

e) $g = \{(x;y) : y \text{ es divisor de } x; x \in \mathbb{N}\}$

3. Di cuáles de los siguientes gráficos (figura 3.62) representan funciones:

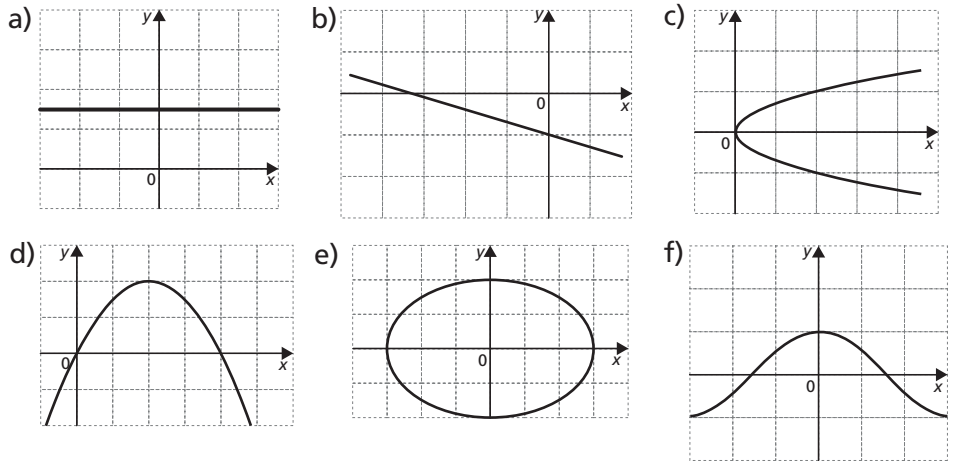


Fig. 3.62

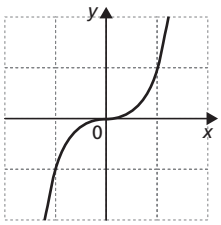
4. Halla una ecuación de la función lineal f en cada caso.
a) Su gráfica tiene pendiente –5 y contiene al punto (–1;4).
b) Su gráfica pasa por los puntos $A(-2;-1)$ y $B(2;3)$.

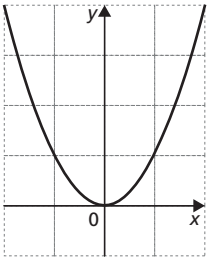
c) Es decreciente, el valor de la pendiente de su gráfico satisface la ecuación $m^2 = 2 - m$ e interseca al eje de las ordenadas en $y_1 = 3$.

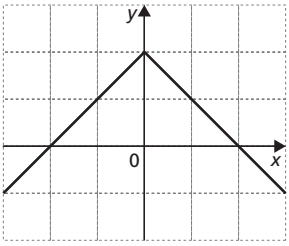
5. Representa en un sistema de coordenadas rectangulares el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

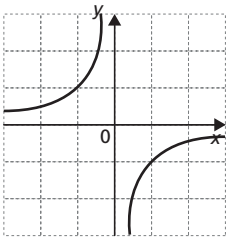
a) $y \geq 2x$ b) $2x - y > 1$ c) $\begin{cases} y \leq x \\ x \geq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq x + 2 \end{cases}$

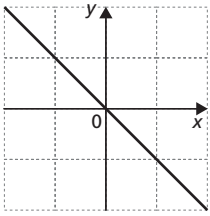
6. Los siguientes gráficos corresponden a funciones estudiadas por ti. Analiza la paridad en cada uno de los casos.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

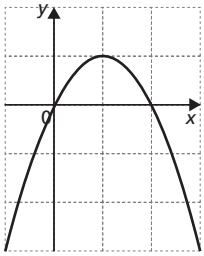
f) 

Fig. 3.63

7. Las siguientes funciones están dadas por sus ecuaciones:

a) $y = 2 - x$ b) $y = (x+1)^2 - 4$ c) $y = |x-2| - 3$

d) $y = (x-1)^3$ e) $y = \dfrac{1}{x+2} - 1$

a) Determina el dominio de definición, el conjunto imagen, ceros, paridad, monotonía y signos.

b) Traza el gráfico de cada una de las funciones en un sistema de coordenadas rectangulares.

8. Sean las funciones f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, dadas por sus ecuaciones:

$f_1(x) = 2x - 1\ ;\ x \in (-1;2]$

$f_2(x) = |x - 2|\ ;\ 0 < x \leq 3$

$f_3(x) = -x^2 + 1\ ;\ x \in [0;2)$

$f_4(x) = \dfrac{1}{x} + 2\ ;\ x > 0$

$f_5(x) = x^3 + 2\ ;\ -1 \leq x \leq 1$

$f_6(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 1 \\ x \text{ si } x < 1 \end{cases}$

$f_7(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

a) Representa cada una de ellas gráficamente.

b) Determina el conjunto imagen en el dominio dado para cada una de las funciones.

c) Determina los intervalos en que cada una de las funciones es positiva.

d) Determina el valor máximo y mínimo de cada una de ellas.

9. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en tu cuaderno. Justifica las que sean falsas.

a) La correspondencia definida de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, en $\mathbb{N}$ donde a cada número natural se le hace corresponder sus múltiplos es una función.

b) Sean $A = \{0;1;2;8\}$ y $B = \{0;2;4;16\}$. Si $g = \{(0;0),(1;2),(2;4),(8;16)\}$ es una correspondencia definida de A en B, entonces g es una función.

c) La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real x le hace corresponder $\dfrac{1}{x-2}$ es una función.

d) La función h de ecuación $h(x) = -3x + 5$ es creciente en todo su dominio

e) La imagen de la función h cuya ecuación es $h(x) = \dfrac{1}{x+5}$ es $\{y \in \mathbb{R} : y \neq 0\}$.

f) La función g definida en $\mathbb{R}$ por la ecuación $g(x) = (x-1)^2 + 3$ es una función impar.

g) El dominio de definición de la función s de ecuación $s(x) = \dfrac{2x^3 + 7}{4}$ es el conjunto de los números reales.

h) La función h definida en $\mathbb{R}$ por la ecuación $y = |x + 3| - 1$ es positiva para $x \geq -2$.

i) La función definida en $\mathbb{R}$ de ecuación $y = |x| + 2$, es par.

j) Las funciones definidas en $\mathbb{R}$ por la ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son números reales y $a < 0$, alcanza el valor mínimo en la abscisa del vértice $V(x_v; y_v)$ de la parábola.

k) El gráfico de la función f definida en $\mathbb{R}$ de ecuación $f(x) = x^3 + 8$. Interseca al eje de las abscisas en el punto de coordenadas $(-2; 0)$.

10. Selecciona la respuesta correcta.

Para medir la temperatura en grados Celsius (°C) a una hora determinada del día en una región, se utiliza la ecuación de la función g definida por $g(t) = -\frac{1}{10}(t-12)^2 + 30$, donde t representa la hora del día en que es tomada la temperatura. Entonces la temperatura tomada a las 22:00 horas del día es:

a) 20 °C b) 22 °C c) 29 °C d) 40 °C

11. Completa en tu cuaderno de forma tal que se obtenga una proposición verdadera para cada caso.

La figura 3.64 corresponde al gráfico de una función f de ecuación $y = \frac{1}{x+a} + b$.

De la función representada:

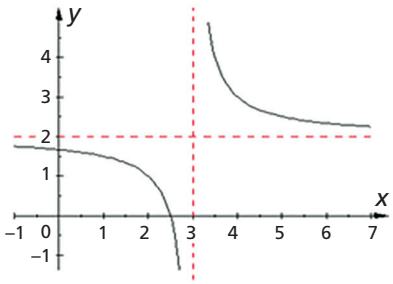


Fig. 3.64

a) La ecuación es:……

b) El dominio de definición es:……..

c) El conjunto imagen es:……..

d) Un intervalo donde es monótona decreciente y positiva es:……..

e) La ecuación de la asíntota vertical del gráfico es:……

12. En una fábrica de dispositivos electrónicos se utiliza la función costo que describe la ecuación $C(x) = 110x + 900$, donde x representa el número de dispositivos que se producen.

a) Halla el costo de producción de 500 dispositivos.

b) ¿Cuántos dispositivos produjo la fábrica en una jornada si el costo de producción fue $ 110 900,00?

c) ¿Cuál es el costo de producir un dispositivo más una vez que se han producido una cantidad k?

13. La relación entre la temperatura medida en grados Celsius (°C) y grados Fahrenheit (°F), está representada por la igualdad $9C - 5F + 160 = 0$. Esta relación es una función cuya ecuación es $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a) Si en el parte meteorológico del Noticiero Nacional de Televisión se anuncia una temperatura de 30 °C para la Región Central de Cuba. ¿Cuál es la medida de esta temperatura en grados Fahrenheit?
b) ¿Si la temperatura es de 0 °C, a cuántos grados Fahrenheit equivale?
c) ¿A los cuántos grados Celsius se alcanza una temperatura de cero grado Fahrenheit?
d) Traza el gráfico que describe la relación entre los grados Fahrenheit en función de los grados Celsius.

14. Días después de iniciado el aislamiento por la Covid-19 un joven decide crear un grupo de WhatsApp con 14 participantes incluyéndose él, desde su creación cada semana incluye 10 participantes más del grupo. Si x representa la cantidad de semanas transcurridas desde su creación y $g(x)$ la cantidad de participantes a las x semanas

14.1 La ecuación de la función lineal que representa la cantidad de participantes del grupo durante x semanas es:

a) $g(x) = 10 - 14x$ b) $g(x) = 14x - 10$
c) $g(x) = 14x + 10$ d) $g(x) = 14 + 10x$

14.2 ¿A las cuantas semanas después de creado el grupo de WhatsApp tenía 64 integrantes?

14.3 Representa en un sistema de ejes de coordenadas la situación descrita anteriormente.

15. Carlos quiere consumir 70 g diarios de proteína vegetal. Si un alimento *P* tiene el 35 % de proteína vegetal y el alimento *Q*, el 20 % y Carlos quiere organizar su dieta obteniendo la proteína vegetal de estos dos alimentos:

a) Escribe una ecuación que exprese la relación entre la cantidad de alimentos *P* y *Q* que debe consumir para obtener los 70 g de proteína vegetal.
b) Expresa la cantidad de alimento *Q* en función de la cantidad *P*.
c) Si Carlos consume 100 g del alimento *P* ¿cuántos gramos debe consumir del alimento *Q* para completar su dieta?
d) Traza el gráfico que describe la relación entre las cantidades de estos alimentos para conformar la dieta de Carlos.

16. Analiza la siguiente tabla y observa que en las columnas A y B se muestran algunos números reales positivos cuya suma es constante $(S = x + y = 6{,}8)$, pero el producto P varía en cierto rango.

a) ¿Cuál debe ser el par de números reales positivos cuya suma sea 6,8 y el producto sea el mayor posible?

b) Halla el producto máximo.

c) Representa en un sistema de coordenadas rectangulares la relación entre el producto P y el número x $(x \in \mathbb{R} : 0 < x < 6{,}8)$.

Tabla 3.10

A	B		
x	y	$S = x + y$	$P = xy$
1	5,8	6,8	5,8
1,4142	5,3858	6,8	7,616598
2,6	4,2	6,8	10,92
3,2	3,6	6,8	11,52
3,9	2,9	6,8	11,31
4	2,8	6,8	11,2
4,1	2,7	6,8	11,07
2,205	4,595	6,8	10,13198
4,5	2,3	6,8	10,35
5	1,8	6,8	9
6	0,8	6,8	4,8
6,01	0,79	6,8	4,7479
6,5	0,3	6,8	1,95
6,7777	0,0223	6,8	0,151143

17. Un grupo de estudiantes destacados fueron seleccionados para ascender al Pico Turquino. La siguiente gráfica representa la variación de la velocidad con respecto al tiempo en que viajaron los estudiantes durante 3 h entre dos puntos del trayecto.

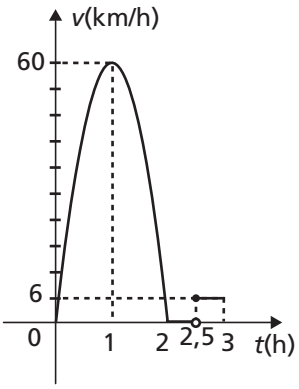


Fig. 3.65

17.1 Realiza un análisis del gráfico tomando como base las siguientes preguntas:

a) ¿Qué tipo de funciones se utilizaron en la representación?

b) ¿Durante qué tiempo la velocidad estuvo aumentando?

c) ¿Cuál fue la velocidad máxima alcanzada?

d) ¿Durante qué tiempo aproximado estuvieron los estudiantes detenidos?

e) ¿Qué puede decir de la velocidad alcanzada por los estudiantes en la última media hora del trayecto registrado?

17.2 Escribe la ecuación de la función que describe la variación de la velocidad en las primeras dos horas.

18. Si un campesino cuenta con 800 m de malla metálica para cercar un terreno de forma rectangular:

a) ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno para que este tenga la mayor área posible?

b) ¿Cuántos hm^2 tiene el terreno rectangular de mayor área que puede ser cercado por el campesino?

19. Daniel y su esposa María quieren cercar un terreno rectangular para dedicarlo a la siembra de hortalizas. Uno de los lados del terreno coincide con un muro, por tanto, tendrán que cercar los otros tres lados (figura 3.66).

Si cuentan con 32 m de cerca, ¿cuáles son las dimensiones del terreno para que el área sea la mayor posible?

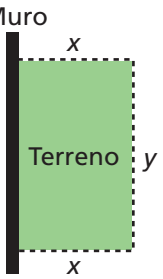


Fig. 3.66

Autoevaluación

1. La base de un triángulo isósceles mide 10 cm, pero la altura relativa a esa base, medida en centímetros, varía en el intervalo $0 < h \leq 12$.

a) Expresa la variación del área *A* en función de la altura *h*.

b) Traza el gráfico que describe esta situación en un sistema de coordenadas rectangulares.

c) ¿Cuál debe ser la altura del triángulo para que este sea rectángulo, y cuál para que sea equilátero?

2. El gráfico de una función *f* es una parábola que tiene su vértice en $V(-1; y_v)$ y contiene el punto $P(-2;-2)$.

a) Halla la ecuación de *f* si se conoce que tiene la forma $y = (x+d)^2 + e$.

b) Comprueba que $f(-x) \neq f(x)$, por tanto, no es una función par.

c) Comprueba que sus ceros no son números racionales.

d) Traza su gráfico en un sistema de coordenadas rectangulares.

e) Halla el conjunto imagen si su dominio de definición se reduce al intervalo $-2 \leq x < 1$.

f) Determina los intervalos en que las imágen de la función es positiva.

3. Sea la función *h*, cuya ecuación es $h(x) = (x-2)^3 + 1$.

a) Traza su gráfico en un sistema de coordenadas rectangulares.

b) Halla el cero de la función y el punto donde su gráfico interseca el eje de las ordenadas.

c) Comprueba que $h(-x) = -\left[(x+3)^3 - 1\right] \neq -h(x)$, por tanto la función no es impar.

d) Determina el valor máximo y mínimo si lo tiene. Fundamenta tu respuesta.
e) Determina el intervalo en que la función toma valores negativos.
f) Halla los puntos donde se interseca su gráfico con el de la función lineal cuya ecuación es $y = x - 1$.

4. Sea la función f, cuya representación analítica es:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x \text{ si } 0 \le x \le 3 \\ 3 \text{ si } 3 < x \le 6 \end{cases}$$

a) Traza su gráfico en un sistema de coordenadas rectangulares.
b) Determina un intervalo donde la función es decreciente y otro donde es constante.
c) Halla el valor máximo de la función y di en qué valor del dominio lo alcanza.

5. El gráfico (figura 3.67) corresponde a una función f que describe la variación de la velocidad V de un móvil con respecto al tiempo t.

Se conoce que el gráfico de f está compuesto por una curva parabólica de vértice V que contiene el origen de coordenadas y por el segmento de recta $\overline{AB}$.

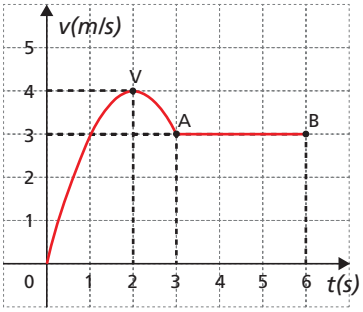


Fig. 3.67

a) ¿Durante qué tiempo se mantuvo aumentando la velocidad del móvil?
b) ¿Cuál es el comportamiento de la velocidad del móvil en los últimos tres segundos?
c) ¿Cuál fue la mayor velocidad alcanzada por el móvil?
d) ¿A los cuántos segundos de haber partido el móvil alcanzó la mayor velocidad?
e) Escribe cuál debe ser la ecuación de la función f.

6. El gráfico que se muestra (figura 3.68) corresponde a una función f de variable real, cuya ecuación tiene la forma $y = \dfrac{1}{x+d} + e$; $(d, e \in \mathbb{R} : x \neq -d)$.

a) Escribe su ecuación y halla el conjunto imagen.

b) Comprueba que $f(-x) \neq -f(x)$, y expresa que puedes inferir de este resultado.
c) ¿Tiene el gráfico de f asíntotas? ¿Cuáles son sus ecuaciones?
d) ¿Cuál es su monotonía si $x > -2$?
e) Escribe un intervalo en que la función sea positiva.

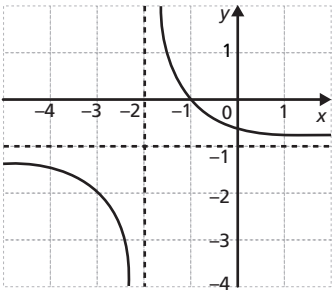


Fig. 3.68

7. ¿Cuáles de las siguientes funciones, dadas por sus ecuaciones, satisfacen todas las propiedades que se enuncian a continuación?

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x^4$ d) $y = x^5$ e) $y = x^6$

f) $y = x^{-1}$ g) $y = x^{-2}$ h) $y = x^{-3}$ i) $y = x^{-4}$ j) $y = x^{17}$

k) $y = x^{32}$ l) $y = x^{-17}$ m) $y = x^{-9}$ n) $y = x^{-12}$

Propiedades:

- Contiene al par $(1;1)$.
- Tienen un cero en el origen de coordenadas.
- Son crecientes para $x > 0$.
- Sus gráficos son simétricos respecto al origen de coordenadas.
- Dos elementos opuestos del dominio de definición tienen imágenes opuestas.

8. Una empresa electrónica está planeando la comercialización de una nueva calculadora. Los costos fijos son de $ 1 500 y los costos variables de $ 900 por calculadora.
a) Encuentre la función costo $C_{(x)}$ donde x representa el número de calculadoras que se producen.
b) Si se producen 1 000 calculadoras ¿cuál es el costo?
c) Si el costo es de $ 721 500, ¿cuántas calculadoras se produjeron?

9. La figura 3.69 muestra un puente parabólico situado sobre dos pedestales a 1,0 m sobre el suelo, se conoce que la distancia entre los dos pedestales es de 40 m y que la altura máxima del puente es de 6,0 m, medidos desde el suelo. Calcula la altura de una viga que se encuentra a 15 m de la primera viga.

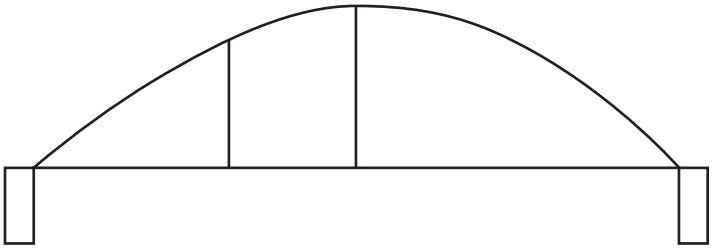


Fig. 3.69

Del software

Para comprender la Matemática III

Del módulo "Funciones" realiza las actividades de aprendizaje 8; 10; 15; 16; 17; 22; 24; 26 y 27, una vez concluidas verifica tus respuestas como retroalimentación.

CAPÍTULO 4

Trigonometría y sus aplicaciones

La trigonometría es la rama de la Matemática Aplicada que proporciona los medios para introducir los ángulos en el cálculo matemático, relacionando entre sí magnitudes lineales y angulares.

La importancia del estudio de esta rama del saber humano está dada por la amplia aplicación que tiene en distintos aspectos de la práctica cotidiana y científica, como la carpintería, la construcción de maquinarias, la Topografía, la Astronomía, la navegación, la Física por medio del estudio de fenómenos eléctricos, de la teoría de las vibraciones, en hechos que ocurren con cierta periodicidad y en gran parte de la ciencia matemática.

La trigonometría tiene una historia muy interesante. La palabra trigonometría, derivada de las palabras griegas *trigônom* que significa triángulo y *metron* que significa medida, fue en un principio una rama de la geometría que tuvo por objeto la medida de los triángulos y de sus ángulos. Su desarrollo en la antigüedad se debe a los griegos y en la Edad Media a los árabes, que la aplicaron en la geometría y la astronomía. Fue el célebre astrónomo griego Hiparco de Nicea (nacido aproximadamente 161 a.n.e.) el fundador de la Trigonometría, quien introduce el uso de una tabla de cuerdas de circunferencia, que en cierto modo equivalía a una tabla rudimentaria de valores del seno. En su astronomía, Hiparco introdujo la división sexagesimal de los babilonios.

Al astrónomo greco-egipcio Tolomeo de Alejandría se debe la aplicación de sus principios a las proyecciones estereográficas que nos dejó en su

obra *Almagesto*. También calcula utilizando una tabla de cuerdas y llega a expresiones de las que se podrían obtener, tras ciertos ajustes, algunas de las fórmulas de nuestra trigonometría actual.

En el siglo IV la obra hindú va más allá de la trigonometría griega y se presenta, con una mayor precisión, una tabla de valores del seno. La trigonometría hindú es adaptada y desarrollada por los árabes, y ya en el siglo IX el astrónomo Al Battani usa, además del seno, la tangente y la cotangente y da un paso importante al aplicar, en cierto modo, el álgebra en la trigonometría.

Después que los árabes penetran en Europa y difunden sus conocimientos matemáticos, se publica el primer tratado de Trigonometría escrita en 1464 en latín. Su autor fue el matemático alemán J. Müller y en su obra demuestra una forma sencilla de la Ley de los senos.

En los dos primeros epígrafes de este capítulo se definen las razones trigonométricas, sus relaciones mutuas, ecuaciones y fórmulas de importancia extraordinaria. En el tercer epígrafe se tratan los métodos generales de solución de triángulos cualesquiera, el cálculo de áreas de figuras planas y su aplicación al cálculo de cuerpos.

4.1 Razones trigonométricas

Resolver un triángulo significa conocer todos sus elementos, es decir, conocer las longitudes de sus tres lados y las amplitudes de sus tres ángulos, a partir de determinada información que se tenga de él y de las relaciones métricas ya estudiadas en grados anteriores. En particular, si el triángulo que se quiere resolver es rectángulo, ya conoces un ángulo, el recto o de 90°; además, ya estudiaste relaciones entre sus lados, entre sus ángulos y entre sus lados y ángulos, como es el caso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

> *Resolver triángulos rectángulos por medio de las razones trigonométricas es un recurso muy útil en muchos problemas de la práctica cotidiana y en diferentes áreas del conocimiento, pero ¿se pueden utilizar las razones trigonométricas para resolver triángulos cualesquiera? y ¿serán estas razones trigonométricas estudiadas las únicas que se pueden definir en el triángulo rectángulo?*

Para poder responder estas preguntas, debes comenzar por reactivar algunos conocimientos:

Recuerda que...

Teorema 4.1 (Teorema de Pitágoras)

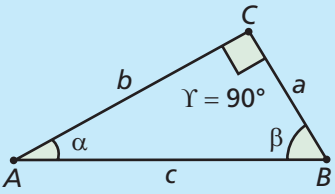


Fig. 4.1

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

En símbolos: $a^2 + b^2 = c^2$ donde a y b son las respectivas longitudes de sus catetos y c es la de la hipotenusa.

Definición 4.1 (razones trigonométricas de un ángulo agudo en el triángulo rectángulo: seno, coseno y tangente)

Sea α un ángulo interior agudo de un triángulo rectángulo BCA (figura 4.1); a y b las respectivas longitudes de sus catetos y c, la de la hipotenusa. Se llama:

- seno de α, y se denota sen α a la razón $\frac{a}{c}$, entre la longitud del cateto opuesto al ángulo α y la longitud de la hipotenusa $\left(\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{c}\right)$
- coseno de α, y se denota cos α a la razón $\frac{b}{c}$, entre la longitud del cateto adyacente al ángulo α y la longitud de la hipotenusa $\left(\cos\alpha = \frac{b}{c}\right)$
- tangente de α, y se denota tan α a la razón $\frac{a}{b}$, entre la longitud del cateto opuesto al ángulo α y la longitud del cateto adyacente a dicho ángulo $\left(\tan\alpha = \frac{a}{b}\right)$

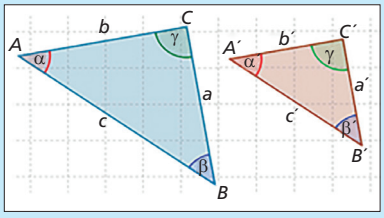


Fig. 4.2

Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales; esto significa que también tienen iguales, respectivamente, sus tres ángulos interiores.

$\alpha = \alpha'; \beta = \beta'; \gamma = \gamma'; \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$

k es la razón de semejanza.

De esta definición se deducen criterios, que son condiciones suficientes para garantizar que dos triángulos sean semejantes.

Dos triángulos son semejantes de razón k, si y solo si tienen:
- sus tres lados respectivamente proporcionales.
- dos ángulos interiores respectivamente iguales.
- dos lados respectivamente proporcionales e igual el ángulo comprendido entre ellos.

Si la razón de semejanza es $k = 1$, entonces los triángulos son iguales.

Relación entre las áreas: $\frac{A}{A'} = k^2$

Relación entre los perímetros: $\frac{P}{P'} = k$

Tú puedes ampliar los conocimientos sobre las propiedades de las figuras planas, la semejanza de triángulos, el grupo de teoremas de Pitágoras y las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo si utilizas una vista gráfica del GeoGebra; por ejemplo, como el que se muestra en la imagen de la figura 4.3, puedes realizar actividades como las siguientes:

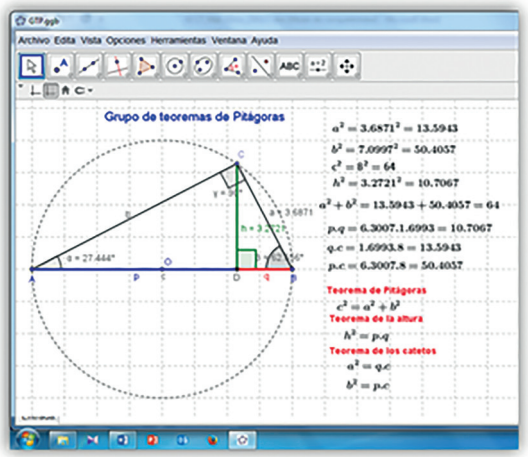


Fig. 4.3

- Fundamentar por qué el triángulo ACB es rectángulo en C.
- Comprobar que las longitudes de los lados, de la altura h y de los segmentos p y q varían al mover el punto C, siguiendo la trayectoria de la semicircunferencia superior.

– Observar que algunas operaciones conducen al mismo resultado.
– Expresar las relaciones algebraicas que se obtienen.
– Llegar a conclusiones y analizarlas con tu profesor de Matemática y tus compañeros.

Las razones trigonométricas de ángulos agudos en un triángulo rectángulo

Ya conoces que cada una de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, se expresan mediante el cociente entre las longitudes de los lados de dicho triángulo, ¿son estas las únicas razones que se pueden establecer entre los lados de un triángulo rectángulo, respecto a uno de sus ángulos interiores agudos? ¿Qué significa, por ejemplo, hallar $\frac{c}{a}$ *en lugar de* $\frac{a}{c}$*?*

Está claro que $\frac{c}{a}$ *y* $\frac{a}{c}$ *son razones recíprocas. ¿Tiene esto algún sentido en la trigonometría?*

La necesidad de resolver problemas matemáticos y de la práctica en general, dio significado a las llamadas razones trigonométricas recíprocas:

Definición 4.2 (razones trigonométricas recíprocas)

Sea α un ángulo interior agudo de un triángulo rectángulo *BCA* (figura 4.1); *a* y *b* las respectivas longitudes de sus catetos y *c*, la de la hipotenusa. Se llama:

- cotangente de α, y se denota $\cot\ \alpha$ a la razón $\frac{b}{a}$, entre la longitud del cateto adyacente al ángulo α y la longitud del cateto opuesto a dicho ángulo. $\left(\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\alpha}\right)$
- secante de α, y se denota *sec* α a la razón $\frac{c}{b}$, entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto adyacente al ángulo α. $\left(\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\alpha}\right)$
- cosecante de α, y se denota *csc* α a la razón $\frac{c}{a}$, entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto opuesto al ángulo α. $\left(\csc\alpha = \frac{c}{a} = \frac{1}{\text{sen}\alpha}\right)$

Observa que las razonas trigonométricas definidas para los ángulos interiores agudos de un triángulo rectángulo, se obtienen mediante un cociente entre dos longitudes positivas y al ser la hipotenusa el lado de mayor longitud en el triángulo rectángulo, entonces se cumple que:

- $0 < \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a}{c} < 1, \qquad 0 < \cos\alpha = \dfrac{b}{c} < 1$
- En el caso de la tangente y la cotangente se pueden dar dos situaciones:

  si $a < b$ entonces $0 < \tan\alpha = \dfrac{a}{b} < 1$ y si $a > b$ entonces $\tan\alpha = \dfrac{a}{b} > 1$

  si $b < a$ entonces $0 < \cot\alpha = \dfrac{b}{a} < 1$ y si $b > a$ entonces $\cot\alpha = \dfrac{b}{a} > 1$

- $\sec\alpha = \dfrac{c}{b} > 1$, $\csc\alpha = \dfrac{c}{a} > 1$

Ejemplo 4.1

En el triángulo *BCA* de la figura 4.1, calcular las razones trigonométricas del ángulo α si:

a) $\alpha = 36{,}9°$; $a = 3$ u; $b = 4$ u; $c = 5$ u
b) $\alpha = 36{,}9°$; $a = 12$ u; $b = 16$ u; $c = 20$ u

Resolución:

a) $\operatorname{sen}36{,}9° = \dfrac{a}{c} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$;

$\cos 36{,}9° = \dfrac{b}{c} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$;

$\tan 36{,}9° = \dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$;

$\cot 36{,}9° = \dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{3} = 1{,}333$;

$\sec 36{,}9° = \dfrac{c}{b} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$;

$\csc 36{,}9° = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{3} = 1{,}667$.

b) $\operatorname{sen}36{,}9° = \dfrac{a}{c} = \dfrac{12}{20} = 0{,}6$;

$\cos 36{,}9° = \dfrac{b}{c} = \dfrac{16}{20} = 0{,}8$;

$\tan 36{,}9° = \dfrac{a}{b} = \dfrac{12}{16} = 0{,}75$;

$\cot 36{,}9° = \dfrac{b}{a} = \dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3} = 1{,}333$;

$\sec 36{,}9° = \dfrac{c}{b} = \dfrac{20}{16} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$;

$\csc 36{,}9° = \dfrac{c}{a} = \dfrac{20}{12} = \dfrac{5}{3} = 1{,}667$ ♦

Reflexiona

Observa los resultados del ejemplo 4.1 y responde:

¿Cómo puedes fundamentar, a partir de los datos en cada inciso, que el triángulo *BCA* es rectángulo?

¿Son semejantes los triángulos del inciso a) y el b)?

En a) y en el b) el ángulo es el mismo, pero son diferentes las longitudes de los lados. ¿Por qué no cambian las razones trigonométricas?

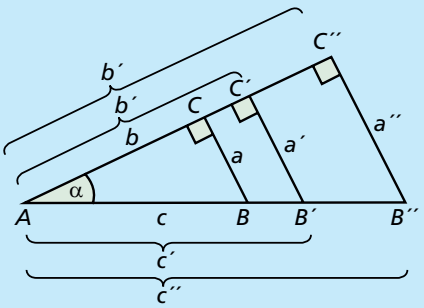


Fig. 4.4

¿Cambian las razones trigonométricas del ángulo α al variar las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 4.4?

Seguramente llegaste a una conclusión: *las razones trigonométricas de un ángulo interior agudo en un triángulo rectángulo no dependen de la longitud de sus lados*, pero esto debemos demostrarlo.

Teorema 4.2 (unicidad de las razones trigonométricas)

Si *ACB* y *A´C´B´* son dos triángulos rectángulos en *C* y *C´* respectivamente (figura 4.5), tales que $\alpha = \alpha'$, entonces: $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha'$, $\cos\alpha = \cos\alpha'$, $\tan\alpha = \tan\alpha'$, $\cot\alpha = \cot\alpha'$, $\sec\alpha = \sec\alpha'$ y $\csc\alpha = \csc\alpha'$

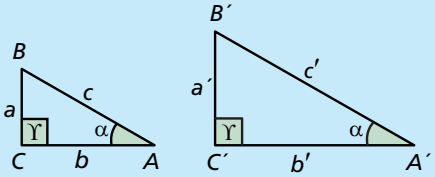


Fig. 4.5

Demostración:

Como está dada la condición $\alpha = \alpha'$ y por ser los triángulos rectángulos en *C* y *C´* respectivamente (figura 4.5), entonces dichos triángulos son semejantes por tener dos ángulos respectivamente iguales; luego $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (por la proporcionalidad de lados homólogos, en triángulos semejantes).

Ahora, si se aplica la propiedad fundamental de las proporciones se obtiene:

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}\ ;\ \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}\ ;\ \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}\ ;\ \frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}\ ;\ \frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}\ ;\ \frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$$

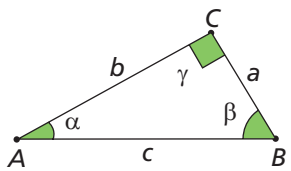
Entonces,

$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha'$, $\cos\alpha = \cos\alpha'$, $\tan\alpha = \tan\alpha'$, $\cot\alpha = \cot\alpha'$, $\sec\alpha = \sec\alpha'$ y $\csc\alpha = \csc\alpha'$

Reflexiona

¿Has pensado el porqué de los nombres de las razones trigonométricas, sobre todo, cuando los analizamos por parejas: seno y coseno; tangente y cotangente; secante y cosecante? En todos los casos el nombre de una de ella se obtiene colocando el prefijo "co" delante del nombre de la otra. ¿Qué significa eso?
Analiza el resumen que aparece en la tabla siguiente y reflexiona sobre los enlaces realizados.

Resumen de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

ΔBCA	**Razones trigonométricas de α**	**Razones trigonométricas de β**
 $\gamma = 90°$ **Fig. 4.6**	$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\cot\alpha = \frac{b}{a}$ $\sec\alpha = \frac{c}{b}$ $\csc\alpha = \frac{c}{a}$	$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{c}$ $\cos\beta = \frac{a}{c}$ $\tan\beta = \frac{b}{a}$ $\cot\beta = \frac{a}{b}$ $\sec\beta = \frac{c}{a}$ $\csc\beta = \frac{c}{b}$
a: longitud de $\overline{CB}$		
b: longitud de $\overline{AC}$		
c: longitud de $\overline{AB}$		

Seguramente has notado que en los pares de razones se obtiene el mismo resultado, por ejemplo, $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ y $\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha$; análogamente ocurre con las otras parejas *tangente* ⇔ *cotangente* y *secante* ⇔ *cosecante.* Analiza el ejemplo 4.2 y comprueba qué ocurre en estos casos particulares.

Ejemplo 4.2

Las longitudes de los lados del triángulo *BCA* (figura 4.7) son $\overline{AB} = 17\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 8{,}0\,\text{cm}$ y $\overline{AC} = 15\,\text{cm}$. Calcular las razones trigonométricas de los ángulos interiores agudos.

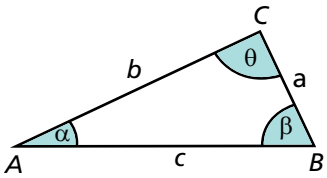


Fig. 4.7

Resolución:

Si denotamos $a = \overline{BC} = 8{,}0\,\text{cm}$, $b = \overline{AC} = 15\,\text{cm}$ y $c = \overline{AB} = 17\,\text{cm}$, se tiene que 64 + 225 = 289, es decir, $a^2 + b^2 = c^2$; por el recíproco del Teorema de Pitágoras, por tanto, el triángulo es rectángulo en *C*, $\theta = 90°$ y los ángulos α y β son los ángulos interiores agudos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{c} = \frac{8}{17} \approx 0{,}4706 \qquad \text{sen}\,\beta = \frac{b}{c} = \frac{15}{17} \approx 0{,}8824$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{15}{17} \approx 0{,}8824 \qquad \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{8}{17} \approx 0{,}4706$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{8}{15} \approx 0{,}5333 \qquad \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} \approx 1{,}875$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} \approx 1{,}875 \qquad \cot\beta = \frac{a}{b} = \frac{8}{15} \approx 0{,}5333$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{17}{15} \approx 1{,}133 \qquad \sec\beta = \frac{c}{a} = \frac{17}{8} \approx 2{,}125$$

$$\csc\alpha = \frac{c}{a} = \frac{17}{8} \approx 2{,}125 \qquad \csc\beta = \frac{c}{b} = \frac{17}{15} \approx 1{,}133 \;\blacklozenge$$

Reflexiona

¿Qué regularidad encuentras en los valores de las razones trigonométricas sen α y cos β; cos α y sen β; tan α y cot β; cot α y tan β; sec α y csc β; csc α y sec β?

Luego se puede concluir que:

Si α y β son los ángulos interiores agudos en un triángulo rectángulo, entonces α y β son ángulos complementarios, es decir $\alpha + \beta = 90°$ y $\beta = 90° - \alpha$. Luego se cumple que:

- El seno de un ángulo agudo es igual al coseno de su complemento y viceversa.

  Simbólicamente: sen α = cos $(90° - \alpha)$ cos α = sen $(90° - \alpha)$

- La tangente de un ángulo agudo es igual a la cotangente de su complemento y viceversa.
  Simbolicamente: $\tan \alpha = \cot (90^\circ - \alpha)$ $\cot \alpha = \tan (90^\circ - \alpha)$
- La secante de un ángulo agudo es igual a la cosecante de su complemento y viceversa.
  Simbólicamente: $\sec \alpha = \csc (90^\circ - \alpha)$ $\csc \alpha = \sec (90^\circ - \alpha)$

Ejemplo 4.3

Sean α y δ ángulos agudos, interiores en triángulos rectángulos diferentes.

a) Si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$, calcular, sin utilizar tablas trigonométricas, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$, $\sec \alpha$ y $\csc \alpha$
b) Hallar las razones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante del ángulo complementario de α.
c) Si δ es uno de los ángulos interiores agudos de un triángulo rectángulo isósceles *PQR* y $\cos \delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, calcula $\operatorname{sen} \delta$, $\tan \delta$, $\cot \delta$, $\sec \delta$ y $\csc \delta$

Resolución:

Como no debemos utilizar las tablas trigonométricas, podemos referirnos al triángulo rectángulo. Para esto hay que conocer las longitudes de los tres lados y comprender que las razones trigonométricas de un ángulo agudo son constantes, pues todos los triángulos rectángulos que tienen a α como un ángulo interior agudo, son semejantes, por tanto sus lados son respectivamente proporcionales.

a) Ya conocemos que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$; por tanto, podemos trabajar con un triángulo *BCA*, rectángulo en *C* (figura 4.8), en el cual $a = 1$ u y $c = 2$ u.

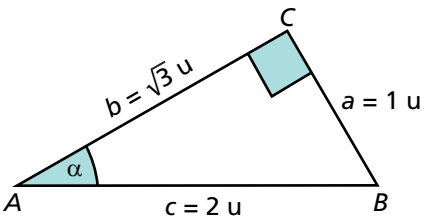


Fig. 4.8

Ahora podemos hallar la longitud del otro cateto, mediante el teorema de Pitágoras; en este caso se obtiene $b = \sqrt{3}$ u y las razones trigonométricas que se quieren hallar son:

$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cot \alpha = \frac{b}{a} = \sqrt{3}$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \csc\alpha = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$$

b) Sea $\beta = 90° - \alpha$, el complemento de α entonces:

$$\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\tan\beta = \cot\alpha = \sqrt{3}, \cot\beta = \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec\beta = \csc\alpha = 2, \csc\beta = \sec\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

c) Siguiendo el mismo razonamiento que en el inciso a), podemos trabajar con el triángulo isósceles *PQR*, rectángulo en *Q*, o con otro cualquiera semejante a él (figura 4.9).

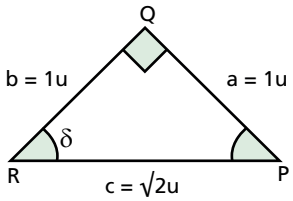


Fig. 4.9

$$\operatorname{sen}\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{tag}\,\delta = \frac{1}{1} = 1, \cot\delta = 1$$

$$\sec\delta = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}, \csc\delta = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Observa en este caso cómo los valores de las razones trigonométricas de la tangente y la cotangente son iguales, al igual que los valores de las razones trigonométricas de la secante y la cosecante. ♦

Razones trigonométricas de ángulos notables y de ángulos de 0° y 90°


Fig. 4.10

Si un carpintero cuenta con listones de madera para construir el marco de un cuadro rectangular, debe realizar cortes en los extremos de los listones con una inclinación de 45° para unirlos y obtener los ángulos de 90° del rectángulo (figura 4.10).

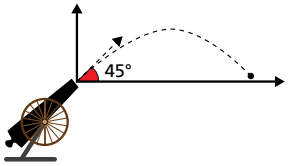


Fig. 4.11

De los estudios realizados en la Física conoces que para lanzar un objeto lo más distante posible el ángulo de lanzamiento debe ser de 45° (figura 4.11).

Los arquitectos utilizan con frecuencia estructuras triangulares formadas por triángulos

equiláteros. Los ángulos interiores de estas estructuras triangulares son de 60° y en ellas se colocan vigas que coinciden con las alturas y bisectrices de estos triángulos, por tanto, aparecen también los ángulos de 30° (figura 4.12).

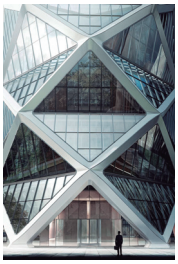


Fig. 4.12

El uso frecuente que tienen los ángulos de 30°, 60° y 45° le dan el nombre de **ángulos notables**, por lo que es conveniente memorizar las razones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de estos ángulos.

En el inciso a) del ejemplo 4.3, las razones trigonométricas calculadas corresponden al ángulo de 30° y las del inciso b) a 60°, que es el complementario de 30°. En el inciso c) de ese mismo ejemplo se hallaron las razones trigonométricas del ángulo de 45°.

Tabla 4.1

Razones trigonométricas de los ángulos notables			
α	**30°**	**45°**	**60°**
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
sec α	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
csc α	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ejemplo 4.4

a) Calcular $\dfrac{\text{sen } 30° + \cos 60°}{\tan 45° \cdot \cot 45°} + \dfrac{\sec 60° \cdot \cot 30°}{\csc 60°}$

b) Un estudiante de décimo grado, para trasladar algunos libros al almacén de su escuela en una vagoneta, aplica una fuerza de 10,0 N formando un ángulo de 30° con la horizontal (figura 4.13). Calcular la componente horizontal y la vertical de dicha fuerza.

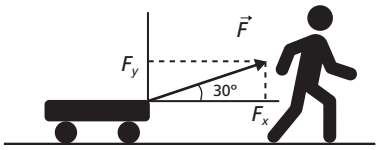


Fig. 4.13

c) En un triángulo *BCA,* rectángulo en *C,* la hipotenusa es c = 11,2 cm y el cateto opuesto al ángulo β es b = 5,6 cm. Hallar la amplitud del ángulo agudo β del triángulo.

d) En un triángulo rectángulo *BCA* rectángulo en *C,* con $\alpha = 30°$, aplicar las razones trigonométricas y expresar la hipotenusa c y el cateto b en función del cateto a.

Resolución:

a) $$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1\cdot 1}+\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{1}{1}+2\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{3}}=1+3=4$$

b) La figura 4.13 representa la problemática planteada; luego, podemos afirmar que:

$$\operatorname{sen}30°=\frac{F_y}{|\vec{F}|}\text{, entonces } F_y=|\vec{F}|\cdot\operatorname{sen}30°=10\text{N}\cdot\frac{1}{2}=5{,}00\text{ N}$$

$$\cos 30°=\frac{F_x}{|\vec{F}|}\text{, entonces } F_x=|\vec{F}|\cdot\cos 30°=10\text{N}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}\text{ N}\approx 8{,}65\text{N}$$

c) La figura 4.14 representa la situación planteada; luego:

$\operatorname{sen}\beta=\frac{b}{c}=\frac{5{,}6}{11{,}2}=\frac{1}{2}$. Este valor del seno corresponde a un ángulo de 30°, por tanto $\beta = 30°$.

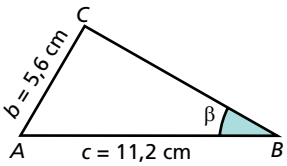


Fig. 4.14

d) En la figura 4.15 se cumple:

$\operatorname{sen}30°=\frac{a}{c}$ $\qquad$ $\cos 30°=\frac{b}{c}$

$\frac{1}{2}=\frac{a}{c}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{b}{c}$

$c = 2a$ $\qquad$ $b=\frac{c\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{2a\sqrt{3}}{2}$

$b = a\sqrt{3}$ ♦

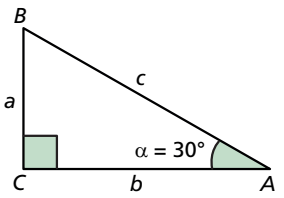


Fig. 4.15

Los resultados obtenidos en el ejemplo anterior te permiten obtener el siguiente teorema:

Teorema 4.3 (Teorema del ángulo de 30° en un triángulo rectángulo)

Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo agudo de 30°, entonces la longitud de la hipotenusa es el doble de la longitud del cateto opuesto al ángulo de 30° y la del cateto adyacente a dicho ángulo es igual a la longitud del cateto opuesto multiplicada por $\sqrt{3}$.

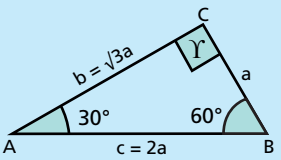


Fig. 4.16

Las definiciones, relaciones y cálculos realizados hasta ahora con las razones trigonométricas, corresponden a un ángulo α en el intervalo $0° < \alpha < 90°$, es decir, no incluye los extremos; entonces

▲ ¿Cómo hallar las razones trigonométricas de 0° y 90°?, ¿será posible calcularlas utilizando la longitud de los lados de un triángulo rectángulo?

Reflexiona

¿Se puede construir un triángulo rectángulo en el que uno de sus ángulos interiores sea de 0°? ¿Puede un triángulo rectángulo tener dos ángulos de 90°?

Seguramente respondiste que no es posible en ninguno de los dos casos, pues no existen, luego, en el trabajo con el triángulo rectángulo no es posible determinar las razones trigonométricas de estos ángulos; para ello refirámonos a un sistema de coordenadas con una circunferencia de radio *r* centrada en su origen y un ángulo central α con un lado inicial situado sobre el eje de la abscisas y otro lado final que se obtiene moviendo el punto *P* por la circunferencia en sentido antihorario como muestra la figura 4.17 a). Si el lado final coincide con el inicial sobre el eje de las abscisas el ángulo α es de 0° (figura 4.17 b) y cuando el lado final está sobre el eje de las ordenadas, entonces se trata de un ángulo α de 90° (figura 4.17 c).

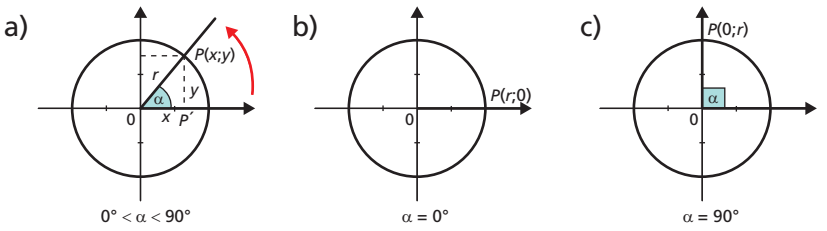


Fig. 4.17

Puesto que el triángulo $OP'P$ es rectángulo en P' (figura 4.17 a), la longitud de sus catetos coincide con las coordenadas de P y la hipotenusa tiene la longitud del radio, entonces las razones trigonométricas del ángulo α son:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r}\ ;\ \cos\alpha = \frac{x}{r}\ ;\ \tan\alpha = \frac{y}{x}\ ;\ \cot\alpha = \frac{x}{y};\ \sec\alpha = \frac{r}{x}\ ;\ \csc\alpha = \frac{r}{y}$$

¿Cuáles son las razones trigonométricas de 0° y 90°? ¿Podemos calcularlas?

Tabla 4.2

Si α = 0° las coordenadas de *P* son (*r*; 0) como se muestra en la figura 4.17 b)	**Si α = 90° las coordenadas de *P* son (0;*r*) como se muestra en la figura 4.17 c)**
$\operatorname{sen} 0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{r} = 0$	$\operatorname{sen}\ 90° = \frac{y}{r} = \frac{r}{r} = 1$
$\cos 0° = \frac{x}{r} = \frac{r}{r} = 1$	$\cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0$
$\tan 0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{r} = 0$	$\tan 90° = \frac{y}{x} = \frac{r}{0}$ (no definida)
$\cot 0° = \frac{x}{y} = \frac{r}{0}$ (no definida)	$\cot 90° = \frac{x}{y} = \frac{0}{r} = 0$
$\sec 0° = \frac{r}{x} = \frac{r}{r} = 1$	$\sec 90° = \frac{r}{x} = \frac{r}{0}$ (no definida)
$\csc 0° = \frac{r}{y} = \frac{r}{0}$ (no definida)	$\csc 90° = \frac{r}{y} = \frac{r}{r} = 1$

Ahora las acotaciones de las razones trigonométricas para los ángulos α del intervalo $0° \le \alpha \le 90°$, no son estrictas:

$$0 \le \operatorname{sen}\alpha \le 1,\ 0 \le \cos\alpha \le 1$$

$$\tan\alpha \ge 0\ \ (\alpha \ne 90°) \qquad \cot\alpha \ge 0\ \ (\alpha \ne 0°)$$

$$\sec\alpha \ge 1\ (\alpha \ne 90°) \qquad \csc\alpha \ge 1\ \ (\alpha \ne 0°)$$

Ejemplo 4.5

a) Calcular $\dfrac{\cos 0° + \csc 90° - \cot 90°}{\sec 0° + \tan 0° + \operatorname{sen} 90°}$

Resolución:

$$\frac{\cos 0° + \csc 90° - \cot 90°}{\sec 0° + \tan 0° + \operatorname{sen} 90°} = \frac{1 + 1 - 0}{1 + 0 + 1} = \frac{2}{2} = 1 \ \blacklozenge$$

Ecuaciones e identidades trigonométricas

Ecuaciones trigonométricas

Hasta ahora has estudiado ecuaciones como las siguientes:

Lineales: $5x + 3 = 8$; $3{,}1t + 3 = 8 - \frac{t}{2}$; $\omega - 1 = 0{,}0001$

Cuadráticas: $x^2 + 1 = -5x$; $5t - t^2 = 0$; $2y + 3 = y^2$

Fraccionarias: $\frac{1}{x} + 1 = 0$; $\frac{x}{x-1} - 2x = 1$; $\frac{z-2}{z} - 1 = z$

Recuerda que...

Una ecuación es una igualdad donde al menos existe una variable. Cualquier valor de la variable que satisface la ecuación es una de sus soluciones y todas las soluciones forman el conjunto solución.

Observa que en cada uno de los ejemplos la ecuación tiene un "nombre" según la posición que tiene la variable dentro de la ecuación; luego, si en una ecuación la variable es el ángulo de una razón trigonométrica estamos en presencia de una **ecuación trigonométrica**.

Resolver una ecuación trigonométrica es encontrar la amplitud del ángulo del cual se conoce la razón trigonométrica; para esto nos auxiliamos, según sea el caso, de los valores notables o axiales, de las tablas o de las calculadoras científicas.

Ejemplo 4.6

Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\operatorname{sen}\beta = 0{,}6494$ c) $\tan x = 0{,}479$ d) $4\cos x - 1 = 0$

Resolución:

a) En este caso el valor de la razón trigonométrica corresponde a la de un ángulo notable. Luego la solución de la ecuación es $\alpha = 60°$.

b) La solución no es un ángulo notable; por tanto, en este inciso debemos utilizar las tablas trigonométricas donde están calculadas las razones de los ángulos entre 0° y 90° o calculadora científica para encontrar la solución, en este caso $\beta \approx 40{,}5°$.

Recuerda que...

Para utilizar la tabla de senos y cosenos debes buscar la sucesión de cifras 6 494 en el interior de la tabla. Observa que esta aparece en la intersección de fila 40 y la columna 5 (figura 4.18 a); por tanto, la solución es $\beta = 40{,}5°$. Si utilizas la calculadora científica del paquete Office es suficiente dar entrada a la razón trigonométrica, en este caso 0,6494, y después ejecutar las teclas Inv→sin $^{-1}$ (figura 4.18 b).

a) Tabla de senos y cosenos

Grad	..... 5	
40 ←	6494 ↑	
		Grad

b)

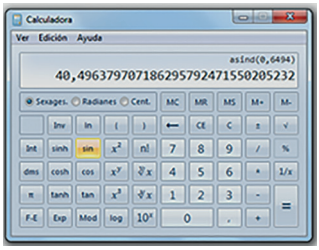


Fig. 4.18

c) tan $x = 0{,}479$

Seguimos el mismo procedimiento del inciso b), pero en la tabla de las tangentes y cotangentes como la sucesión de cifras tiene 4, debemos redondear hasta la tercera cifra, en la intersección de la fila 25 (a la derecha) y la columna 6 (arriba) encontramos el valor que al redondear conduce a esta sucesión ($4\,791 \approx 479$) (figura 4.19).

Tabla de tangentes y cotangentes		
Grad	..... 6	
25 ←	4791 ↑	
		Grad

Fig. 4.19

Luego la respuesta es $x = 25{,}6°$

En caso de existir varias sucesiones de cifras que al aproximar da el número buscado, tomamos aquella sucesión de cifras que está más próxima a la buscada.

d) $4 \cos x - 1 = 0$

En este caso debemos despejar y obtenemos $\cos x = 0{,}25$; ahora utilizando la tabla o la calculadora científica, el resultado es $x = 75{,}5°$

Generalmente, resolver problemas de la práctica nos conducen al planteamiento y resolución de una ecuación de cualquier tipo. ♦

Ejemplo 4.7

a) Los catetos de un triángulo *BCA*, rectángulo en *C,* miden $a = 52{,}6$ cm y $b = 34{,}2$ cm. Calcular la amplitud del ángulo β.

b) Una escalera de 1,95 m de largo está apoyada en una pared vertical. Si el pie de la escalera está 68,4 cm separado de la pared, ¿qué ángulo forma esta con el piso?

Resolución:

a) $\tan\beta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{34{,}2}{52{,}6} \approx 0{,}650$ (figura 4.20),

luego debemos resolver la ecuación $\tan\beta \approx 0{,}650$ que tiene como solución $\beta = 33{,}0^o$.

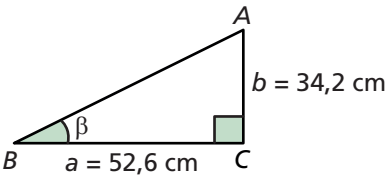


Fig. 4.20

Cuando se trabaja con datos tomados de mediciones de la práctica hay que tener en cuenta las reglas de aproximación. Como los datos representan valores de mediciones con tres cifras significativas, la respuesta debemos darla con tres cifras.

b) Sea β (figura 4.21) el ángulo de inclinación de la escalera respecto al piso, $a = 68{,}4$ cm $= 0{,}684$ m la separación del pie de la escalera a la pared y $c = 1{,}95$ m su longitud.

$\cos\beta = \dfrac{a}{c} = \dfrac{0{,}684}{1{,}95} \approx 0{,}3508$, entonces $\beta = 69{,}5^o$. ♦

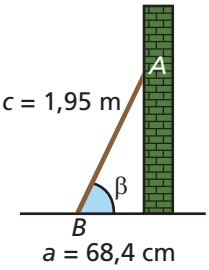


Fig. 4.21

***Ejemplo* 4.8**

Resolver las ecuaciones siguientes.

a) $\text{sen}^2\varphi - \text{sen}\,\varphi = 0$ b) $\tan^2\beta - 2\tan\beta + 1 = 0$ c) $2\cos^2 x + 3 = 7\cos x$

¡Atención!

En la ecuación $\text{sen}^2\varphi - \text{sen}\,\varphi = 0$, aparece la expresión $\text{sen}^2\varphi$, que es lo mismo que $(\text{sen}\,\varphi)^2$. Se trata de dos notaciones que tienen el mismo significado: el cuadrado de la razón trigonométrica sen φ. Esta ecuación tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, solo que en lugar de la variable x, aparece sen φ; luego, esta ecuación es cuadrática trigonométrica, por lo que para resolverla podemos utilizar el procedimiento que se aplica en las ecuaciones cuadráticas y finalmente hallar el valor de φ que es la variable de la ecuación.

Resolución:

a) $\text{sen}^2\varphi - \text{sen}\,\varphi = 0$
$\text{sen}\,\varphi\,(\text{sen}\,\varphi - 1) = 0$ (descomponiendo en factores extrayendo factor común)
$\text{sen}\,\varphi = 0$ o $\text{sen}\,\varphi - 1 = 0$ (igualando cada factor a cero)
$\varphi_1 = 0°$ $\quad \text{sen}\,\varphi = 1$ (despejando el sen φ)
$\varphi_2 = 90°$

b) $\tan^2\beta - 2\tan\beta + 1 = 0$ El miembro izquierdo de la ecuación es un trinomio cuadrado perfecto, entonces:
$(\tan\beta - 1)^2 = 0$ (descomponiendo en factores)
$\tan\beta - 1 = 0$ (una potencia es cero solo si su base es cero)
$\tan\beta = 1$ (despejando la tan β)
$\beta = 45°$

c) $2\cos^2 x + 3 = 7\cos x$ En este caso procedemos igual que en los incisos anteriores
$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$ (igualamos la ecuación a cero por ser una ecuación trigonométrica de 2.° grado)
$(2\cos x - 1)(\cos x - 3) = 0$ (descomponiendo el trinomio $mx^2 + px + q$)
$2\cos x - 1 = 0$ o $\cos x - 3 = 0$ (igualando a cero cada factor)
$\cos x = \frac{1}{2}$ o $\cos x = 3$ (despejando cos x)
$\cos x = \frac{1}{2}$ se satisface para $x = 60°$ y $\cos x = 3$ no tiene solución porque $0 \leq \cos x \leq 1$ ♦

Identidades trigonométricas

Existen otras igualdades con variables que relacionan las razones trigonométricas entre sí y que se cumplen para todos los valores de la variable para los cuales las expresiones estén definidas, estas igualdades reciben el nombre de **identidades trigonométricas.** Por las numerosas aplicaciones que tienen es conveniente memorizar las fundamentales.

Recuerda que...

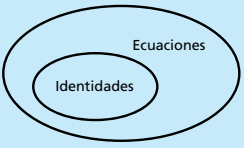


Fig. 4.22

Una **identidad** es una ecuación que se satisface para todos los valores de la variable para los cuales está definida (figura 4.22), o lo que es lo mismo, se satisface para todos los valores admisibles de la variable.

Si partimos de la definición 4.1, de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, podemos encontrar algunas identidades fundamentales, las cuales servirán de base para deducir otras.

Ejemplo 4.9

Sea *BCA* un triángulo rectángulo en *C* (figura 4.23). Comprobar que $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

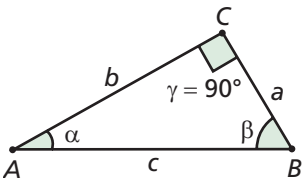


Fig. 4.23

Resolución:

En virtud del teorema de Pitágoras se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$. Ahora, utilizando este teorema y la definición de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, podemos hallar $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha$, cualquiera sea el ángulo α del intervalo $0° \le \alpha \le 90°$.

Si α es un ángulo agudo, tenemos que:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Ahora falta comprobar para $\alpha = 0°$ y $\alpha = 90°$, pero:

$\text{sen}^2\,0° + \cos^2 0° = 0^2 + 1^2 = 1$ y $\text{sen}^2\,90° + \cos^2 90° = 1^2 + 0^2 = 1$, entonces, de esta forma hemos deducido que $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$ es una identidad trigonométrica, porque se cumple para todos los valores admisibles de la variable, en este caso $0° \le \alpha \le 90°$. ♦

Las identidades trigonométricas fundamentales aparecen en el teorema siguiente, y por las variadas aplicaciones que tienen debes aprender a deducirlas o memorizarlas.

Teorema 4.4 (Identidades trigonométricas fundamentales)

1) $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \quad \left(\alpha \neq 90^\circ\right)$

3) $\cot\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha} \left(\alpha \neq 0^\circ\right)$

4) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \quad (\alpha \neq 90°)$

5) $1 + \cot^2\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}^2\,\alpha} \left(\alpha \neq 0^\circ\right)$

6) $\sec\,\alpha = \dfrac{1}{\cos\,\alpha} \left(\alpha \neq 90°\right)$

7) $\csc\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} \left(\alpha \neq 0^\circ\right)$

8) $\tan\,\alpha \cdot \cot\,\alpha = 1 \; (\alpha \neq 0°)(\alpha \neq 90°)$

Demostración de la identidad 2

Si aplicamos la definición 4.1 para cualquier ángulo α del intervalo $0° < \alpha < 90°$ se obtiene: $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{c \cdot \operatorname{sen}\alpha}{c \cdot \cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Para $\alpha = 0°$ se tiene: MI: $\tan\alpha = 0$ y MD: $\frac{\operatorname{sen} 0°}{\cos 0°} = \frac{0}{1} = 0$.

Con este resultado hemos demostrado que la igualdad es una identidad para todo ángulo α del intervalo $0° \leq \alpha < 90°$.

Tú puedes demostrar la identidad 3 utilizando un procedimiento análogo al anterior

Demostración de la identidad 4

Si dividimos ambos miembros de la igualdad $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ por $\cos^2\alpha$ $(0° \leq \alpha < 90°)$ se obtiene $\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, aplicando la identidad 2) se obtiene $\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ y aplicando la propiedad conmutativa de la adición en el primer miembro se llega a que $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Tú puedes demostrar la identidad 5 si divides ambos miembros de la identidad 1 por $\operatorname{sen}^2\alpha$.

Demostración de la identidad 6

Si aplicamos la definición 4.2 para cualquier ángulo α del intervalo $0° \leq \alpha < 90°$ se obtiene $\sec\alpha = \frac{c}{b}$ aplicando la definición 4.1 en que $b = c \cdot \cos\alpha$ se obtiene $\sec\alpha = \frac{c}{c \cdot \cos\alpha}$ y simplificando c se obtiene que $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$.

Tú puedes demostrar la identidad 7 aplicando el procedimiento utilizado en la demostración de la identidad 6. Además, te invito a que demuestres la identidad 8 aplicando la definición 4.1.

Las identidades trigonométricas fundamentales del teorema 4.4, y otras que estudiarás en 11.º grado, podrás utilizarlas en la demostración de otras identidades y en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Ejemplo 4.10

a) Transformar la expresión A, que se da a continuación, de modo que solo contenga $\cos\alpha$. Calcular el valor de A para $\alpha = 30°$.

$$A = \frac{1}{\cos\alpha} - \tan\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha \; ; \; (\alpha \neq 90°)$$

b) Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{1+\cos z} + \csc z + \cot z \; ; \; (0° < z < 90°)$$

Resolución:

a) $$A = \frac{1}{\cos\alpha} - \tan\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha$$

$A = \cos\alpha$

En este cálculo trigonométrico hay que utilizar una de las identidades fundamentales, en este caso, $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, de donde se obtiene que $1 - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha$

Como $\alpha = 30°$ pertenece al conjunto de valores admisibles de la expresión A, podemos hallar su valor, evaluando en el resultado obtenido, en este caso $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{1{,}73}{2} \approx 0{,}865$

b) Sustituyendo la csc z y cot z por sus identidades correspondientes queda:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{1+\cos z} + \csc z + \cot z = \frac{\operatorname{sen} z}{1+\cos z} + \frac{1}{\operatorname{sen} z} + \cot z \quad \text{(sustituyendo)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 z + 1 + \cos z + \cos z\,(1+\cos z)}{\operatorname{sen} z\,(1+\cos z)} \quad \text{(efectuando la adición)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 z + 1 + \cos z + \cos z + \cos^2 z}{\operatorname{sen} z(1+\cos z)} \quad \text{(aplicando propiedad distributiva en el numerador)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 z + 1 + 2\cos z + \cos^2 z}{\operatorname{sen} z(1+\cos z)} \quad \text{(como } \cos^2 z = 1 - \operatorname{sen}^2 z\text{) (reduciendo términos semejantes)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 z + 1 + 2\cos z + 1 - \operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z\,(1+\cos z)} \quad \text{(sustituyendo } \cos^2 z \text{ por } 1 - \operatorname{sen}^2 z\text{)}$$

$$= \frac{2+2\cos z}{\operatorname{sen} z(1+\cos z)} \quad \text{(reduciendo términos semejantes)}$$

$$= \frac{2(1+\cos z)}{\operatorname{sen} z(1+\cos z)} \quad \text{(extrayendo factor común 2 y simplificando)}$$

$$= \frac{2}{\operatorname{sen} z} \; \blacklozenge$$

Demostración de identidades

Seguramente te encontrarás ejercicios en los que debas demostrar que ciertas igualdades son identidades y aunque no existen reglas de validez general para la demostración de identidades pueden recomendarse tres procedimientos o vías que te permitan realizar la demostración de trabajo.

Vía 1: Desarrollar un miembro, sobre todo el que tenga más facilidades de transformación, hasta llegar al otro (el más complejo).

Vía 2: Desarrollar ambos miembros y comparar los resultados para verificar si son iguales.

Vía 3: Sustraer las expresiones que aparecen en ambos miembros para ver si el resultado es cero.

Es importante comprobar en todos los casos si las transformaciones realizadas son válidas en el dominio de definición de la igualdad.

Ejemplo 4.11

Prueba que para los valores admisibles de la variable las siguientes igualdades son identidades:

a) $\dfrac{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x} = 1 - \tan^2 x \quad (x \neq 90°)$

b) $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{2\operatorname{sen}^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha} \qquad (\alpha \neq 0°, \alpha \neq 90°)$

c) $\sec^2\beta + \csc^2\beta = \sec^2\beta \cdot \csc^2\beta \quad (\beta \neq 0°, \beta \neq 90°)$

Resolución:

a) En este caso el miembro que ofrece mayores posibilidades de transformación es el miembro izquierdo.

Como el numerador es una diferencia de cuadrados, descomponemos en factores, luego:

$$\frac{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x}$$ (como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ queda)

$$= \frac{1(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x}$$ (aplicando la propiedad distributiva)

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$ (simplificando y aplicando la definición de tan x, se obtiene)

$= 1 - \tan^2 x$ que es lo que se quería demostrar

Luego se cumple la igualdad para todo $x \neq 90°$

b) En este caso vamos a trabajar en ambos miembros y transformar la identidad original en otra.

Transformando el miembro izquierdo se obtiene:

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$ (aplicando la definición de $\tan\alpha$ y $\cot\alpha$)

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha}$$ (efectuando la adición indicada)

$$= \frac{1}{\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha}$$ (aplicando la identidad de $1 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$)

Transformando el miembro derecho

$$\frac{2\operatorname{sen}^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{2\left(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha\right)}{2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}$$ (extrayendo en el numerador el factor común)

$$= \frac{2 \cdot 1}{2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}$$ (aplicando la identidad de $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$)

$$= \frac{2}{2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}$$ (simplificando obtenemos)

$$= \frac{1}{\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha}$$

Luego hemos demostrado que:

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{1}{\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha} = \frac{2\operatorname{sen}^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}$$

para todo valor de $\alpha \neq 0°$ y $\alpha \neq 90°$

En este caso hemos utilizado solamente igualdades, eso garantiza que los pasos son reversibles.

c) En este caso vamos a sustraer las expresiones que aparecen en ambos miembros para comprobar que la diferencia es igual a cero

$\sec^2\beta + \csc^2\beta - \sec^2\beta \cdot \csc^2\beta$

$$\frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta} - \frac{1}{\cos^2\beta} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta}$$ (aplicando las identidades básicas de la sec y csc)

$$= \frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta} - \frac{1}{\cos^2\beta \cdot \operatorname{sen}^2\beta}$$ (efectuando el producto indicado)

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta - 1}{\cos^2\beta \cdot \operatorname{sen}^2\beta}$$ efectuando la operación de adición indicada)

$= \dfrac{1-1}{\cos^2\beta \cdot \operatorname{sen}^2\beta}$ (aplicando la identidad $\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$)

$= \dfrac{0}{\cos^2\beta \cdot \operatorname{sen}^2\beta}$ (efectuando)

$= 0$

Luego queda demostrado que al sustraer las expresiones de ambos miembros se obtiene el valor de cero

Por tanto, se cumple la igualdad para todo $\beta \neq 90°$ y $\beta \neq 0°$ ♦

Ecuaciones con más de una razón trigonométrica

Las ecuaciones que resolviste anteriormente contenían solo una razón trigonométrica,

▲ ¿Cómo resolver ecuaciones de la forma $2\cos^2\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha = 2$?

Si observas te darás cuenta que en esta intervienen más de una razón trigonométrica.

Pues con el conocimiento de las identidades trigonométricas fundamentales que acabas de conocer estarás en condiciones de resolverla.

▲ ¿Cuál de las identidades trigonométricas te permite transformar esta ecuación en otra equivalente en que solo intervenga una razón?

Seguramente pensaste en la identidad $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ de la que se obtiene que $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$. Si sustituyes esta expresión trigonométrica en la ecuación podrás transformarla de forma tal que contenga una sola razón (en este caso la razón) como se muestra a continuación:

$2(1 - \operatorname{sen}^2\alpha) + 3\operatorname{sen}\alpha = 2$; $2 - 2\operatorname{sen}^2\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha = 2$; $-2\operatorname{sen}^2\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha = 0$

Ejemplo 4.12

Hallar el conjunto solución de las ecuaciones siguientes, si se conoce que las variables pueden tomar valores desde 0° hasta 90°.

a) $3\cos x + \operatorname{sen}^2 x - 3 = 0$ b) $\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$ c) $2\tan\beta = \cos\beta$

Resolución:

a) Esta ecuación contiene dos razones trigonométricas y la de mayor posibilidad de transformación es $\operatorname{sen}^2 x$, pues utilizando la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y despejando, se obtiene $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Al sustituir y realizar las trasformaciones necesarias se obtiene una ecuación cuadrática trigonométrica que ya aprendiste a resolver.

$3\cos x + \operatorname{sen}^2 x - 3 = 0$

$3\cos x + (1 - \cos^2 x) - 3 = 0$

$3\cos x + 1 - \cos^2 x - 3 = 0$

$-\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

$\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$

$(\cos x - 2)(\cos x - 1) = 0$

$\cos x = 2$ o $\cos x = 1$

$\cos x = 2$ no tiene solución pues $0 \leq \cos x \leq 1$

$\cos x = 1$ se satisface para $x = 0°$

Luego el conjunto solución es $S = \{ 0° \}$

b) Primera vía

En este caso podemos realizar una transformación auxiliar al dividir ambos miembros de la ecuación por cos α, teniendo en cuenta que, si cos $\alpha = 0$, entonces $\alpha = 90°$, pero este ángulo no es solución de la ecuación.

$\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 1$$

$\tan\alpha = 1$; $\alpha = 45°$; $S = \{45°\}$

Segunda vía

En este caso como no tenemos identidades para el cos α y el sen α para poder transformar la ecuación debemos en este caso elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación, luego sen α = cos α

$\operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha$

$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$

$\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$

$2\operatorname{sen}^2\alpha = 1$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ luego $\alpha = 45°$

$\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ no tiene solución en el intervalo $0° \leq \alpha \leq 90°$

Pero como se elevó al cuadrado en ese momento la ecuación resultante no es equivalente a la anterior luego debemos comprobar el resultado obtenido.

Miembro izquierdo: $\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Miembro derecho: $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Comparación: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Luego el conjunto solución de la ecuación es: $S = \{45°\}$.

c) En este caso sustituimos la $\tan\beta$ por $\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$

$2 \cdot \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \cos\beta$ (se ha transformado en una ecuación fraccionaria luego multiplicamos ambos miembros de la ecuación por $\cos\beta$)

$2 \operatorname{sen}\beta = \cos^2\beta$ (sustituyendo $\cos^2\beta = 1 - \operatorname{sen}^2\beta$

$2 \operatorname{sen}\beta = 1 - \operatorname{sen}^2\beta$ (transponiendo al miembro izquierdo)

$\operatorname{sen}^2\beta + 2 \operatorname{sen}\beta - 1 = 0$

Cómo no es posible la descomposición en factores, aplicamos la fórmula de la resolución de la ecuación cuadrática (donde en este caso $a = 1$; $b = 2$; $c = -1$).

$$\operatorname{sen}\beta_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\approx \frac{-2 \pm 2 \cdot 1{,}41}{2} = \frac{-2 \pm 2{,}82}{2}$$

$\operatorname{sen}\beta_1 = \frac{-2 + 2{,}82}{2}$ $\operatorname{sen}\beta_2 = \frac{-2 - 2{,}82}{2}$ despreciamos este valor por ser negativo

$\operatorname{sen}\beta_1 = \frac{0{,}82}{2} = 0{,}41$ buscamos en la tabla, pero como el valor sustituido es con tres cifras las seguras son dos, luego $\beta_1 = 24°$, comprobemos los resultados ya que los valores obtenidos son aproximados.

Miembro izquierdo: $2 \tan 24° \approx 2 \cdot 0{,}45 = 0{,}9$

Miembro derecho: $\cos 24° \approx 0{,}91$ (como trabajamos con valores aproximados)

$\cos 24° \approx 0{,}9$

Comparación: $0{,}9 = 0{,}9$

Entonces el conjunto solución de la ecuación es $S = \{24°\}$. ♦

Reflexiona sobre lo aprendido

¿Qué otras razones trigonométricas aprendiste en este epígrafe?

¿Cómo se definen cada una de ellas?

¿Se puede afirmar que: sen α = cos (90° – α)? ¿Por qué?

¿Se puede establecer esta relación entre otras razones trigonométricas? ¿Cuáles?

¿Qué diferencia existe entre una ecuación trigonométrica y una identidad trigonométrica?

¿Cómo proceder para resolver una ecuación trigonométrica donde aparecen dos o más razones trigonométricas?

¿Cómo proceder para demostrar una identidad trigonométrica?

Ejercicios del epígrafe 4.1

Las razones trigonométricas de ángulos agudos en un triángulo rectángulo

1. En un triángulo *ACB* rectángulo en *C* los catetos *a* y *b* miden:

a) a = 3,00 cm y b = 4,00 cm
b) a = 12,0 dm y b = 5,00 dm
c) a = 9,40 cm y b = 10,0 cm
d) a = 20,0 dm y b = 10,0 dm
e) $a = \sqrt{2}$ cm y b = 1,00 cm
f) a = 15,0 dm y b = 8,00 dm

Halla las razones trigonométricas de los ángulos interiores agudos α y β.

2. En un triángulo *BAC* rectángulo en *A* se tiene a = 25 cm y c = 24 cm. Calcula las razones trigonométricas de sus ángulos interiores agudos.

3. La medida de la hipotenusa de un triángulo *CAB* rectángulo en *A* e isósceles es 2,0 dm. Calcula las razones trigonométricas del ángulo interior agudo β.

4. Sean α y β las amplitudes de los ángulos interiores agudos de un triángulo *BCA* rectángulo en *C*, si:

a) sen $\alpha = \frac{3}{5}$; calcula cos α, tan α, csc α y cos β.

b) cos $\beta = \frac{12}{13}$; calcula sen β, cot β, sec β y sen α.

c) tan $\alpha = \frac{4}{3}$; calcula sen α, cos α, cot α y cos β.

d) cot β = 1; calcula cos β, sen β; tan β, y cos α.

5. Sea α uno de los ángulos interiores agudos en un triángulo rectángulo. Construye en cada caso un triángulo *BCA,* cuyo ángulo α satisfaga la condición dada.

a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ d) $\cot\alpha = \frac{12}{5}$ e) $\sec\alpha = \frac{5}{3}$

6. Sea α uno de los ángulos interiores agudos en un triángulo rectángulo tal que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$. Construye el ángulo α y halla las razones trigonométricas de α en el triángulo.

7. Sean α y β los ángulos interiores agudos de un triángulo *BCA* rectángulo en *C*. Dado $\cos\beta = \frac{3}{4}$, construye el ángulo α y halla las razones trigonométricas de β en el triángulo.

8. Sean α y β los ángulos interiores agudos de un triángulo *BCA* rectángulo en *C*. Dado $\tan\beta = 3$, construye los ángulos α y β y halla las razones trigonométricas de α en el triángulo.

9. Sean β y γ los ángulos interiores agudos de un triángulo *BAC* rectángulo en *A*. Si $\tan\gamma = 1\frac{1}{3}$, calcula: sen γ y sen β.

10. Halla la longitud de la hipotenusa de un triángulo *BAC* rectángulo en *A,* sabiendo que $\cos\angle BCA = \frac{4}{5}$ y $b = 16$ cm.

11. En un triángulo *ACB* rectángulo en *C,* $\operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5}$ y $b = 40$ cm. Halla la longitud de la hipotenusa del triángulo y los valores de cos β, tan α y sec β.

12. Si $\tan\alpha = \frac{7}{3}$ y $0° < \alpha < 90°$, calcula sen α y cos α.

13. Sea el triángulo *BAC* rectángulo $\operatorname{sen}\angle BCA = \frac{5}{6}$ y $\overline{BC} = 18\text{cm}$. Calcula la longitud de los catetos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\cos\angle ABC$ y $\tan\angle BCA$.

14. Traza un triángulo rectángulo con un ángulo interior $\alpha = 30°$, mide sus lados y calcula las razones trigonométricas de α.

15. Demuestra que en todo triángulo *ACB* rectángulo en *C,* en el que $\gamma = 90°$, α y β son las amplitudes de sus ángulos interiores, se cumple que:

a) sen α = sen(γ - β) b) cos α = cos(γ – β)

Razones trigonométricas de ángulos notables y de ángulos de 0° y 90°

16. Calcula:

a) $\operatorname{sen}30^\circ \cdot \cos 45^\circ$

b) $\tan 45^\circ - \cos 30^\circ$

c) $\cos 30^\circ + \tan 60^\circ$

d) $\operatorname{sen}30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \tan 60^\circ$

e) $\dfrac{\operatorname{sen}30^\circ}{\cos 45^\circ} + \dfrac{1}{\cos 45^\circ \cdot \tan 45^\circ}$

f) $\operatorname{sen}^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$

g) $\tan 60^\circ - \dfrac{\cos^2 45^\circ}{\operatorname{sen}^2 45^\circ} \cdot \sec 30^\circ$

h) $\csc^2 30^\circ - 2\tan^2 60^\circ$

i) $\dfrac{\operatorname{sen}45^\circ}{\tan 60^\circ} - \dfrac{\cos^2 60^\circ}{\operatorname{sen}30^\circ}$

17. Si $A = \cos 60^\circ$ y $B = \dfrac{1}{\cos 45^\circ}$ calcula el valor de $2A - 3B$.

18. Si $M = \operatorname{sen}30^\circ$, $N = \cos 60^\circ$, $P = \tan 45^\circ$ y $Q = \cos 30^\circ$ calcula el valor de $\dfrac{M+2N}{P-Q}$.

19. Si $a = 30^\circ$, $b = 60^\circ$ y $c = 45^\circ$ halla el valor de las expresiones:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 a + \cos b}{\cos c + 1}$ b) $\sqrt{\dfrac{\cos^2 a + 2\operatorname{sen} a}{\tan c - \dfrac{2}{9}}}$

20. Comprueba si se cumplen las siguientes igualdades:

a) $2\operatorname{sen}30^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \tan 60^\circ + \operatorname{sen}45^\circ = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{2}{\cos 45^\circ} + \dfrac{3\cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ}{\operatorname{sen}60^\circ} = \dfrac{3+4\sqrt{2}}{2}$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}30^\circ}{\cos 45^\circ} - \cos 60^\circ \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$

d) $\sqrt{3}\tan 30^\circ \cdot \cos 30^\circ - \operatorname{sen}60^\circ + \sec 60^\circ = 2$

e) $\dfrac{\dfrac{1}{\cos 60^\circ} - \cos 30^\circ}{\tan 45^\circ - \operatorname{sen}60^\circ} = 5 + 2\sqrt{3}$

f) $2\operatorname{sen}^2 60^\circ + 3 \cdot \dfrac{\cos 45^\circ}{\operatorname{sen}45^\circ} - \dfrac{1}{\cos^2 30^\circ} = 3\dfrac{1}{6}$

g) $\dfrac{3\cos^2 60^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\operatorname{sen}^2 60^\circ} - \operatorname{sen}60^\circ + \csc 60^\circ = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

h) $\dfrac{\dfrac{3\tan^2 30^\circ}{\cos^2 45^\circ}}{1-\dfrac{\cos^2 60^\circ}{\operatorname{sen}^2 60^\circ}} = 3$

i) $\dfrac{4\cos^2 30^\circ \cdot \operatorname{sen}^2 45^\circ \cdot \tan 60^\circ}{3 \cdot \dfrac{\cos^2 30^\circ}{\operatorname{sen}^2 30^\circ} - 2\cos^2 45^\circ} + \dfrac{\cos^2 60^\circ}{16\operatorname{sen}^2 60^\circ} = \dfrac{1+9\sqrt{3}}{48}$

21. Una fuerza de 50,0 N forma un ángulo de 60° con la horizontal. Calcula su componente horizontal y la vertical.

22. Una fuerza forma un ángulo de 30° con la horizontal y su proyección vertical es de 15,3 N. Determina la fuerza y su proyección horizontal.

23. Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $2\operatorname{sen} 90^\circ - \cos 0^\circ + \tan 45^\circ + \cot 45^\circ \cdot \csc 45^\circ$

b) $\dfrac{3}{4}\tan 0^\circ + \dfrac{\operatorname{sen} 90^\circ}{3\cos 0^\circ} - \operatorname{sen}^2 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sec 60^\circ$

c) $\dfrac{2\operatorname{sen} 30^\circ}{\cos 0^\circ} + \dfrac{1}{\operatorname{sen} 90^\circ} \cdot \operatorname{sen} 0^\circ - \tan^2 30^\circ$

d) $\dfrac{2\tan 0^\circ}{\cos 0^\circ} - \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}^2 90^\circ}{\cos^2 0^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ}} + \tan 45^\circ$

24. Halla el valor de x en cada una de las igualdades siguientes:

a) $x + \operatorname{sen} 30^\circ - \cos 60^\circ = \tan 30^\circ + \operatorname{sen} 90^\circ + 2\cos 0^\circ$

b) $2x \cdot \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = \cos 60^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ - \cos 90^\circ \cdot \operatorname{sen} 0^\circ$

25. Determina el complemento de cada uno de los siguientes ángulos:

a) 48,7° b) 64,9° c) 25,3° d) 45° e) 10,2° f) 39°

26. Escribe en cada inciso las igualdades que se obtienen entre las siguientes razones trigonométricas:

a) sen 35° ; sen 60° ; sen 42° ; cos 55° ; cos 44,7° ; cos 30°

b) tan 75° ; cot 15° ; sec 29,7° ; sen 60,3° ; cos 60,3° ; csc 60,3°

c) sen 51° ; tan 37° ; cos 10,7° ; sec 85° ; sen 79,3° ; cot 43° csc 5° ; cos 39°

27. Determina una solución para cada una de las siguientes ecuaciones:

a) sen 30° = cos α b) sen α = cos 37,5° c) cos 15° = sen α

d) cos α = sen 22,3° e) cos 82,3° = sen x f) cos x = sen 17°

g) tan β = cot β h) cot 37,1° = tan y i) sec 50°= csc γ

28. Simplifica tanto como sea posible:

a) $\operatorname{sen} x + \cos(90° - x)$

b) $\dfrac{2\cos(90° - x) \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}$

c) $2\cos(90° - x) + \operatorname{sen} x$

d) $\dfrac{\operatorname{sen}(90° - x) \cdot \cos x}{\cos^2 x} - \dfrac{\cot(90° - x)}{\tan x}$

Ecuaciones e identidades trigonométricas

29. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4 \operatorname{sen} \alpha = 2$

b) $2 \cos \alpha = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3} \tan \alpha = 1$

d) $2 \cos \alpha - 1 = 0$

e) $\tan \alpha - 1 = 0$

f) $4 \operatorname{sen} \alpha - 1 = 2 \operatorname{sen} \alpha$

g) $\cot \alpha + 0{,}698 = 1$

h) $\tan \alpha - 1 = 0{,}257$

i) $\dfrac{4}{3} \cos \alpha = 1$

j) $\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \dfrac{1}{2}$

k) $\tan(90° - \alpha) = 1$

l) $\operatorname{sen}^2 \alpha = \dfrac{1}{2}$

m) $\cos^2 \alpha = \dfrac{3}{4}$

n) $4 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1 = 0$

ñ) $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}9816$

o) $\cos \alpha = 0{,}6921$

p) $\dfrac{1}{2} \sec \alpha = 1$

q) $\csc^2 \alpha = 2$

30. Determina el valor de x en las siguientes igualdades

a) $\cos x = \cos^2 x$

b) $2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$

c) $\tan^2 x = \tan x$

d) $\cot^2 x - \cot x = 0$

e) $\tan^2 x - \sqrt{3} \tan x = 0$

f) $3 \operatorname{sen} x = 2 - 2 \operatorname{sen}^2 x$

g) $4 \cos x = \dfrac{1}{\cos x}$

h) $\tan x = \dfrac{3}{\tan x}$

i) $\dfrac{3}{\operatorname{sen} x} - 2 = \operatorname{sen} x$

j) $\sec^2 x - 2 \sec x = 0$

k) $3 \csc^2 x - 2\sqrt{3} \csc x = 0$

31. Los catetos $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo BCA, rectángulo en C, miden respectivamente:

a) 2,35 cm y 4,21 cm b) 6,12 m y 5,02 m c) 1,02 dm y 9,33 dm

Determina en cada caso la amplitud de $\beta = \angle ABC$.

32. Las proyecciones horizontal y vertical de una fuerza $\vec{F}$ son 35 N y 42 N respectivamente. Determina el ángulo que forma la fuerza $\vec{F}$ con la horizontal.

33. Una fuerza de 60 N y su proyección horizontal de 24 N forman un ángulo φ. ¿Qué amplitud tiene dicho ángulo?

34. (Astronomía) El planeta Mercurio viaja alrededor del Sol con una órbita elíptica en la que la distancia r (en millas), de este planeta al Sol, está dada aproximadamente por:

$r = \dfrac{3{,}44 \cdot 10^7}{1 - 0{,}206\cos\theta}$ (figura 4.24).

Encuentra el ángulo θ ($0° \leq \theta \leq 90°$) cuando Mercurio está a $3{,}70 \cdot 10^7$ millas del Sol.

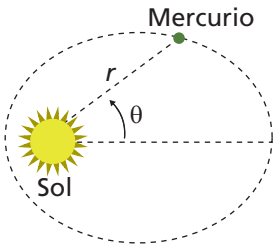


Fig. 4.24

35. Transforma las siguientes expresiones de modo que solo contengan la razón trigonométrica que se indica y calcula su valor para el dato correspondiente.

a) $\dfrac{1}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1}{1-\cos\alpha}$ $\alpha \neq 0°$ $\left(\operatorname{sen}\alpha \text{ ; dato: } \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{4}{5}\right)$

b) $\dfrac{\tan^2\beta}{\sec^2\beta} \cdot \dfrac{\csc^2\beta}{\cot^2\beta}$ $\beta \neq 0°; \beta \neq 90°$ $\left(\tan\beta \text{ ; dato: } \cos\beta = \dfrac{5}{13}\right)$

36. Simplifica las siguientes expresiones tanto como sea posible:

a) $\dfrac{1}{1+\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ $(\alpha \neq 0°)$

b) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x$ $(x \neq 90°)$

c) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} - \dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ $(\alpha \neq 0°)$

37. Prueba que se cumple para los valores admisibles de la variable.

a) $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot \dfrac{1}{\tan^2\alpha} = \cot^2\alpha$ $(\alpha \neq 0°)$

c) $\operatorname{sen}^3\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos^2\alpha = \operatorname{sen}\alpha$

d) $(1 + \tan^2 x)(1 - \cos^2 x) = \tan^2 x$ $(x \neq 90°)$

e) $(1 - \operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 2(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \cos x)$

f) $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x} + \dfrac{1}{1-\operatorname{sen} x} = 2\sec^2 x$ $(x \neq 90°)$

g) $(\cot\alpha + 1)^2 + (\cot\alpha - 1)^2 = 2\csc^2\alpha$ $(\alpha \neq 0°)$

h) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (\operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 2$

i) $(\sec x + 1)(\sec x - 1) = \tan^2 x$ $(x \neq 90°)$

j) $\operatorname{sen}^4 x + 2\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x = 1$

k) $\operatorname{sen}\beta(\csc\beta - \operatorname{sen}\beta) = \cos^2\beta \quad (\beta \neq 0°)$

l) $(\sec x - \tan x)^2 = \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} \quad (x \neq 90°)$

38. Demuestra las siguientes igualdades para todo valor admisible de la variable.

a) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

b) $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}$ $(\alpha \neq 90°;\ \alpha \neq 0°)$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} + \cot\alpha = \csc\alpha \quad (\alpha \neq 0°)$

39. Determina el conjunto solución de las ecuaciones siguientes ($0° \leq x \leq 90°$):

a) $\cos^2 x = 3(1 - \operatorname{sen} x)$
b) $2 - \operatorname{sen} x = 2\cos^2 x$
c) $2\cos^2 x + 4\operatorname{sen}^2 x = 3$
d) $3\cot x = \tan x$
e) $2\operatorname{sen} x = \sqrt{3}\tan x$
f) $2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \tan x$
g) $7 - 2\operatorname{sen} x = 7\cos^2 x$
h) $\cos^2 x - 2 = \cos x$
i) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 2 = 0$
j) $4\cos x = \sec x$
k) $4(1 - 2\operatorname{sen}^2 x) + 3\cos x = 1$
l) $2\cos^2 x - 1 = \operatorname{sen} x$

4.2 Circunferencia trigonométrica

¿Es posible calcular las razones trigonométricas de ángulos mayores de 90° y hasta 360°?

Razones trigonométricas de ángulos mayores de 90° y menores o iguales que 360°. Fórmulas de reducción

En el epígrafe 4.1, para obtener el valor de las razones trigonométricas de los ángulos desde 0° a 90° se utilizó un sistema de coordenadas con una circunferencia de radio *r* centrada en el origen de coordenadas.

Esta idea puede ser utilizada para definir las razones trigonométricas de ángulos que no son agudos; por tanto, consideremos nuevamente una circunferencia de radio *r* centrada en el origen de coordenadas (figura 4.25).

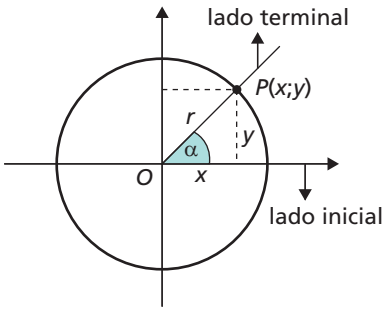


Fig. 4.25

Mediante esta forma, cualquier ángulo α en el intervalo $0° \leq \alpha \leq 360°$ puede ser representado de manera única, si:

- Su vértice se sitúa en el origen de coordenadas.
- Uno de los lados es fijo (lado inicial) y se sitúa sobre el semieje positivo de las abscisas.
- El otro lado (lado terminal) queda en la zona barrida en sentido contrario a las manecillas del reloj y corta a la circunferencia en un punto P de coordenadas $(x;y)$.

Esta circunferencia recibe el nombre de **circunferencia trigonométrica** y nos permite extender la definición de las razones trigonométricas de ángulos agudos para cualquier ángulo α del intervalo $0° \leq \alpha \leq 360°$.

Definición 4.3 (Razones trigonométricas en la circunferencia trigonométrica)

Sean x y y las coordenadas del punto P donde el lado terminal del ángulo α corta a la circunferencia trigonométrica de radio r, entonces las razones trigonométricas de los ángulos del intervalo $0° \leq \alpha \leq 360°$ se definen de la manera siguiente:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} \; ; \; \cos\alpha = \frac{x}{r} \; ; \; \tan\alpha = \frac{y}{x} \; ; \; \cot\alpha = \frac{x}{y} \; ; \; \sec\alpha = \frac{r}{x} \; ; \; \csc\alpha = \frac{r}{y}$$

Las razones trigonométricas así definidas son constantes y únicas para cada ángulo, cualquiera sea el radio r de la circunferencia, pues si variamos el radio, los triángulos rectángulos que contienen al ángulo α son semejantes (figura 4.26).

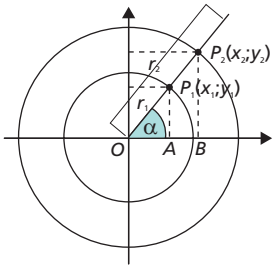


Fig. 4.26

Como consecuencia de lo explicado anteriormente, las razones trigonométricas de la definición 4.3 se pueden expresar de una manera más simple, en este caso en el contexto de una **circunferencia trigonométrica unitaria** en la que el radio es la unidad (figura 4.27).

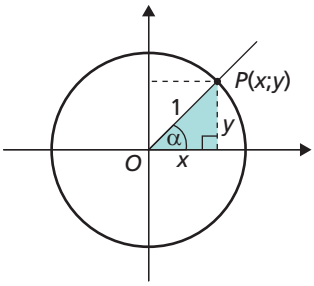


Fig. 4.27

$$\operatorname{sen}\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{x} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{y}$$

Ya conoces del subepígrafe anterior los valores de las razones trigonométricas de los ángulos 0° y 90°.

Reflexiona

¿Cuáles son las razones trigonométricas de los ángulos 180°, 270° y 360°? ¿Cómo calcularlas?

Si observas estos ángulos, al igual que los ángulos de 0° y 90° su lado terminal está sobre uno de los ejes de coordenadas (figura 4.28). Estos ángulos reciben el nombre de **ángulos axiales** y como puedes observar ellos se encuentran en los ejes de coordenadas y no pertenecen a los cuadrantes. I; II; III y IV.

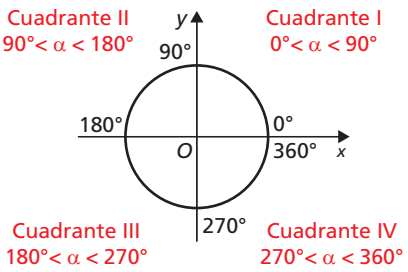


Fig. 4.28

Si aplicamos la definición de las razones trigonométricas en una circunferencia unitaria, entonces podemos obtener rápidamente las que corresponden a los ángulos axiales. Para ello es suficiente conocer las coordenadas del punto donde el lado terminal del ángulo corta a la circunferencia, que en este caso es un punto situado sobre los ejes de coordenadas (figura 4.29).

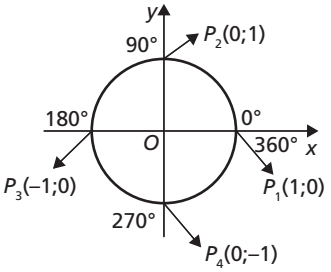


Fig. 4.29

Tabla 4.4

Si $\alpha = 180°$. Las coordenadas de P_3 son $(-1;0)$ (figura 4.29)	Si $\alpha = 270°$. Las coordenadas de P_4 son $(0;-1)$ (figura 4.29)	Si $\alpha = 360°$. Las coordenadas de P_1 son $(1;0)$ (figura 4.29)
$\operatorname{sen} 180° = 0$	$\operatorname{sen} 270° = -1$	$\operatorname{sen} 360° = 0$
$\cos 180° = -1$	$\cos 270° = 0$	$\cos 360° = 1$
$\tan 180° = \frac{0}{-1} = 0$	$\tan 270° = \frac{-1}{0}$ (no definida)	$\tan 360° = 0$
$\cot 180° = \frac{1}{0}$ (no definida)	$\cot 270° = 0$	$\cot 360° = \frac{1}{0}$ (no definida)
$\sec 180° = \frac{1}{-1} = -1$	$\sec 270° = \frac{1}{0}$ (no definida)	$\sec 360° = \frac{1}{1} = 1$
$\operatorname{csc} 180° = \frac{-1}{0}$ (no definida)	$\operatorname{csc} 270° = 0$	$\operatorname{csc} 360° = \frac{1}{0}$ (no definida)

Con la definición 4.3 y los resultados obtenidos en la tabla 4.4, las razones trigonométricas seno y coseno pueden ser no positivas y no negativas, pero tienen las acotaciones siguientes:

$-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1$ y $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

Reflexiona

¿Qué puedes decir acerca de los valores de las otras razones trigonométricas?

Ya conoces cómo determinar las razones trigonométricas de los ángulos agudos y los axiales, pero ¿cómo hallar las razones trigonométricas de los ángulos de los cuadrantes II, III y IV?

Para resolver este problema, lo primero que se debe lograr es expresar cualquier ángulo de los cuadrantes II, III y IV en función de un ángulo del primer cuadrante. Esto no resulta difícil, por ejemplo, si α es un ángulo del primer cuadrante, entonces se puede obtener un ángulo θ que tiene su lado terminal en los cuadrantes II, III y IV respectivamente. Para cada ángulo así determinado existe un ángulo α en el primer cuadrante que es su correspondiente (coterminal).

En el **segundo cuadrante** (figura 4.30) el punto P_1 está determinado por el ángulo θ con $90° < \theta < 180°$ y tiene coordenadas *(– x; y)*, entonces, según lo analizado anteriormente podemos plantear que:

$$\operatorname{sen}\theta = y$$
$$\cos\theta = -x$$
$$\tan\theta = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x}$$
$$\cot\theta = \frac{-x}{y} = -\frac{y}{x}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$$
$$\csc\theta = \frac{1}{y}$$

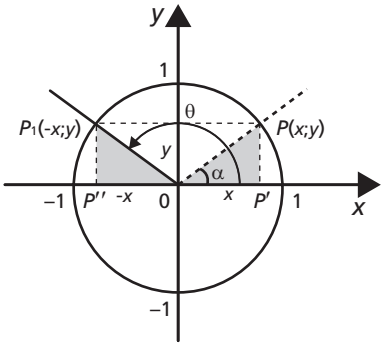


Fig. 4.30

Si comparas estos resultados con los obtenidos para los ángulos entre $0° < \alpha < 90°$ podrás concluir que:

$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\alpha$ $\quad \cos\theta = -\cos\alpha$ $\quad \tan\theta = -\tan\alpha$

$\cot\theta = -\cot\alpha$ $\quad \sec\theta = -\sec\alpha$ $\quad \csc\theta = \csc\alpha$

Reflexiona

¿Por qué se cumplen las igualdades anteriores?

Se cumplen porque como la circunferencia es una figura simétrica respecto al eje y , el punto $P_1(-x; y)$ determinado por el ángulo de amplitud θ, en el segundo cuadrante, tiene un punto simétrico $P(x; y)$ determinado por un ángulo de amplitud α en el primer cuadrante, lo cual significa que para θ existe solo un ángulo α tal que los valores absolutos de sus razones trigonométricas son iguales.

Observa en la figura 4.30 que los puntos P (determinados por α) y P_1 (determinados por θ) son simétricos respecto al eje y; luego los triángulos OPP' en el primer cuadrante y $P_1P''O$ en el segundo, son iguales, por lo que $\angle P_1OP'' = \angle POP' = \alpha$.

Entonces $\theta = 180° - \alpha$, por tanto tenemos que:

$\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ $\quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad \tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(180° - \alpha) = -\cot\alpha$ $\quad \sec(180° - \alpha) = -\sec\alpha$ $\quad \csc(180° - \alpha) = \csc\alpha$

Estas relaciones son las llamadas **Fórmulas de Reducción** para los ángulos del **segundo cuadrante** (II C) al primero y que nos permiten reducir el cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo obtuso por medio de las razones trigonométricas del ángulo agudo que es su suplemento.

Observa que las razones trigonométricas coseno, tangente, cotangente y secante de estos ángulos ($90° < \theta < 180°$) difieren en el signo respecto a su suplemento en el primer cuadrante.

Reflexiona

¿Por qué en el **segundo cuadrante** son positivas solo el seno y la cosecante y negativas las restantes razones trigonométricas?

Ejemplo 4.13

Calcular las razones trigonométricas de un ángulo cuya amplitud es de 120°.

Resolución:

El ángulo de 120° pertenece al intervalo $90° < \theta < 180°$ porque $90° < 120° < 180°$ luego es un ángulo del segundo cuadrante, calculemos entonces su suplemento: $180° - 120° = 60°$ por tanto:

$$\text{sen } 120° = \text{sen } (180° - 60°) = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = \cos (180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120° = \tan (180° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120° = \cot (180° - 60°) = -\cot 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 120° = \sec (180° - 60°) = -\sec 60° = -2$$

$$\csc 120° = \csc (180° - 60°) = \csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3} \ \blacklozenge$$

En el **tercer cuadrante** (figura 4.31) el punto P_2 está determinado por el ángulo θ con $180° < \theta < 270°$ y tiene coordenadas $(-x; -y)$, entonces, según lo analizado anteriormente podemos plantear que:

$$\text{sen}\theta = -y$$

$$\cos\theta = -x$$

$$\tan\theta = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{-y} = -\frac{1}{y}$$

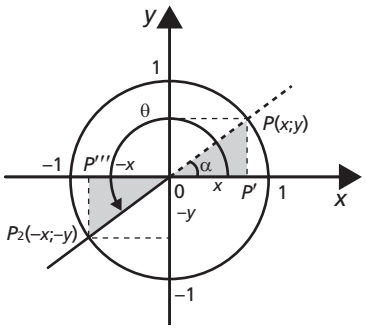


Fig. 4.31

Si comparas estos resultados con los obtenidos para los ángulos entre $0° < \alpha < 90°$ podrás concluir que:

$\text{sen}\theta = -\text{sen}\,\alpha$ $\quad \cos\theta = -\cos\alpha$ $\quad \tan\theta = \tan\alpha$

$\cot\theta = \cot\alpha$ $\quad \sec\theta = -\sec\alpha$ $\quad \csc\theta = -\csc\alpha$

Reflexiona

¿Observa las igualdades anteriores y reflexiona sobre la relación de estas con la simetría del lado terminal del ángulo θ?

Como el ángulo θ está medido en sentido antihorario este se puede expresar como $\theta = 180° + \alpha$ (por ser $\angle P_2 OP''' = \angle POP' = \alpha$) luego:

$\text{sen}\,(180° + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$ $\quad \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad \tan(180° + \alpha) = \tan\alpha$

$\cot(180° + \alpha) = \cot\alpha$ $\quad \sec(180° + \alpha) = -\sec\alpha$ $\quad \csc(180° + \alpha) = -\csc\alpha$

Al igual que en el segundo cuadrante estas son las **Fórmulas de Reducción** para ángulos del **tercer cuadrante**.

Reflexiona

¿Por qué en el tercer cuadrante solo son positivas la tangente y la cotangente y negativas las restantes?

Ejemplo 4.14

Calcular las razones trigonométricas de un ángulo cuya amplitud es de 225°.

Resolución:

El ángulo de 225° pertenece al intervalo $180° < \theta < 270°$ porque $180° < 225° < 270°$ luego es un ángulo del tercer cuadrante, calculemos entonces: $225° - 180° = 45°$ por tanto:

$\operatorname{sen} 225° = \operatorname{sen}(180° + 45°) = -\operatorname{sen} 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 225° = \cos(180° + 45°) = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 225° = \tan(180° + 45°) = \tan 45° = 1$

$\cot 225° = \cot(180° + 45°) = \cot 45° = 1$

$\sec 225° = \sec(180° + 45°) = -\sec 45° = -\sqrt{2}$

$\csc 225° = \csc(180° + 45°) = -\csc 45° = -\sqrt{2}$ ♦

En el **cuarto cuadrante** (figura 4.32) el punto P_3 está determinado por el ángulo θ con $270° < \theta < 360°$ y tiene coordenadas $(x; -y)$, entonces, según lo analizado anteriormente podemos plantear que:

$\operatorname{sen}\theta = -y$

$\cos\theta = x$

$\tan\theta = \dfrac{-y}{x} = -\dfrac{y}{x}$

$\cot\theta = \dfrac{x}{-y} = -\dfrac{x}{y}$

$\sec\theta = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$

$\csc\theta = \dfrac{1}{-y} = -\dfrac{1}{y}$

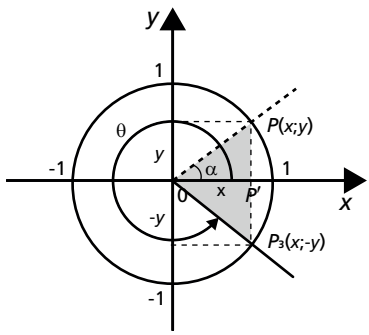


Fig. 4.32

Si comparas estos resultados con los obtenidos para los ángulos entre $0° < \alpha < 90°$ podrás concluir que:

$\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}\alpha$ $\quad \cos\theta = \cos\alpha$ $\quad \tan\theta = -\tan\alpha$

$\cot\theta = -\cot\alpha$ $\quad \sec\theta = \sec\alpha$ $\quad \csc\theta = -\csc\alpha$

Reflexiona

Basándote en la figura (4.32) fundamenta el porqué de las igualdades que se muestran de las razones trigonométricas.

Como el ángulo θ está medido en sentido antihorario este se puede expresar como

$\theta = 360° - \alpha$ (por ser $\angle P_3 OP' = \angle POP' = \alpha$) luego:

$\operatorname{sen}(360°-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\quad \cos(360°-\alpha) = \cos\alpha$ $\quad \tan(360°-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(360°-\alpha) = -\cot\alpha$ $\quad \sec(360°-\alpha) = \sec\alpha$ $\quad \csc(360°-\alpha) = -\csc\alpha$

Al igual que en el tercer cuadrante, estas son las **Fórmulas de Reducción** para ángulos del **cuarto cuadrante**.

Reflexiona

¿Por qué en el **cuarto cuadrante** solo son positivas el coseno y la secante, y negativas las restantes?

Ejemplo 4.15

Calcular las razones trigonométricas de un ángulo cuya amplitud es de 330°.

Resolución:

El ángulo de 330° pertenece al intervalo $270° < \theta < 360°$ porque $270° < 330° < 360°$ luego es un ángulo del cuarto cuadrante, calculemos entonces: $360° - 330° = 30°$, por tanto:

$$\operatorname{sen}330° = \operatorname{sen}(360° - 30°) = -\operatorname{sen}30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330° = \cos(360° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 330° = \tan(360° - 30°) = -\tan 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 330° = \cot(360° - 30°) = -\cot 30° = -\sqrt{3}$$

$\sec 330° = \sec (360° - 30°) = \sec 30° = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\csc 330° = \csc (360° - 30°) = -\csc 30° = -2$ ♦

Procedimiento general para hallar las razones trigonométricas de un ángulo obtuso o sobreobtuso

Para hallar la razón trigonométrica de un ángulo δ en el intervalo $0° \leq \delta \leq 360°$ podemos seguir los pasos siguientes:

1) Determinar el cuadrante al cual pertenece δ.
2) Determinar el signo de la razón trigonométrica en ese cuadrante.
3) Hallar el ángulo α correspondiente en el primer cuadrante.
4) Aplicar fórmula de reducción.
5) Utilizar las tablas trigonométricas o la calculadora científica para hallar la razón correspondiente.

Ejemplo: Hallar $\text{sen}216,1°$

1) $216,1° \in$ III cuadrante
2) Signo negativo
3) $\alpha = 216,1° - 180°$
   $\alpha = 36,1°$
4) $\text{sen}216,1° = \text{sen}(180° + 36,1°) = -\text{sen}36,1°$
5) $= -0,5892$

En general se cumple que:

Si $\gamma \in [0°; 360°)$, entonces:

$-1 \leq \text{sen}\,\gamma \leq 1 \qquad -1 \leq \cos\gamma \leq 1$

$\tan\gamma = a$; con $a \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 90°$, $\gamma \neq 270°$ $\qquad \cot\gamma = \dfrac{1}{a}$; con $a \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0°$, $\gamma \neq 180°$

$\sec\gamma \geq 1$; $\sec\gamma \leq -1$ con $\gamma \neq 90°$, $\gamma \neq 270°$ $\quad \csc\gamma \geq 1$; $\csc\gamma \leq -1$ con $\gamma \neq 0°$, $\gamma \neq 180°$

La extensión de las razones trigonométricas para ángulos desde 0° hasta 360° brinda la posibilidad de **resolver ecuaciones trigonométricas** en un dominio de definición más amplio.

Ejemplo 4.16

Hallar el conjunto solución de las ecuaciones siguientes:

a) $\text{sen}\,x = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ b) $\cos x = 0,8796$ $\qquad$ c) $3\text{sen}\,x = 2\cos^2 x$

d) $\tan^2 x + \dfrac{1}{\cos x} = 1$ e) $\dfrac{3}{\cos x} = \dfrac{4}{\sec x}$

Resolución:

a) $\operatorname{sen} x$ es positivo en los cuadrantes I y II

Cuad. I: $x_1 = 30°$

Cuad. II: $180° - 30° = 150°$

$S = \{30°; 150°\}$

Acciones

- Se determina el signo de la razón trigonométrica.
- Se determinan los cuadrantes en que se encuentra la solución de la ecuación.
- La solución del primer cuadrante se busca directamente en la tabla (en este caso la tabla de los valores notables).
- Para la de otros cuadrantes se aplica la relación que permite calcular el ángulo. En este caso la del segundo cuadrante.

  $180° - 30°$
- Se escribe el conjunto solución.

b) $\cos x$ es positivo en los cuadrantes I y IV.

Cuad. I: $x_1 = 28,4°$

Cuad. IV:

$x_2 = 360° - 28,4° = 331,6^0$

$S = \{28,4°; 331,6°\}$

El procedimiento es análogo al aplicado en el inciso a), solo que el ángulo no es notable, luego para buscar la solución en el primer cuadrante, debemos utilizar las tablas trigonométricas o una calculadora científica y para la del cuarto cuadrante la relación.

$360° - 28,4°$

c) $3\operatorname{sen} x = 2\cos^2 x$

$3\operatorname{sen} x = 2(1 - \operatorname{sen}^2 x)$

$2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 2 = 0$

$(2\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 2) = 0$

$\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$ o $\operatorname{sen} x = -2$

$\operatorname{sen} x = -2$ no tiene solución

En este caso en la ecuación intervienen dos razones trigonométricas por lo que debemos expresar la ecuación en función de una sola razón.

Se utiliza la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ para que la ecuación contenga una sola razón trigonométrica.

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ tiene soluciones en los cuadrantes I y II.

Cuad. I: $x_1 = 30^\circ$

Cuad. II: $x_2 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

$S = \{30^\circ; 150^\circ\}$

Se realizan transformaciones equivalentes, hasta obtener la ecuación cuadrática trigonométrica $2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 2 = 0$.

Se resuelve la ecuación cuadrática y se obtiene

$\operatorname{sen} x = -2$ no tiene solución porque

$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$ para todo ángulo x del intervalo $0^\circ \le x \le 360^\circ$.

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ y se aplica el procedimiento descrito al resolver la ecuación del inciso a)

d) $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} = 1$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos x = \cos^2 x$

$1 - \cos^2 x + \cos x = \cos^2 x$

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$(2 \cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$

$2 \cos x + 1 = 0 \qquad \cos x - 1 = 0$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ tiene soluciones en los cuadrantes II y III

Cuad. II: $x_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Cuad. III: $x_2 = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$

$\cos x = 1$ son soluciones los ángulos axiales $x_3 = 0^\circ$; $x_4 = 360^\circ$

$S = \{0^\circ; 120^\circ; 240^\circ; 360^\circ\}$

- En este caso al igual que en el anterior intervienen dos razones trigonométricas por lo que debemos expresa la ecuación en función de una sola.
- Se transforma $\tan^2 x$ por $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$.
- Se multiplican ambos miembros de la ecuación por $\cos^2 x$ para eliminar los denominadores.
- Se expresa la ecuación en función de $\cos x$ aplicando la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.
- Se realizan las transformaciones equivalentes hasta obtener la ecuación cuadrática trigonométrica $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.
- Se aplica el procedimiento descrito en el ejemplo c) al resolver la ecuación cuadrática.

Observa que en el caso del coseno negativo se buscó en el primer cuadrante el ángulo que tenía

el mismo valor positivo y se aplicaron las fórmulas donde el coseno es negativo y en el caso de $\cos x = 1$ las soluciones son ángulos axiales.

e) $\dfrac{3}{\cos x} = \dfrac{4}{\sec x}$

$3 \sec x = \dfrac{4}{\sec x}$

$3 \sec^2 x = 4$

$\sec^2 x = \dfrac{4}{3}$

$\sec x = \pm\sqrt{\dfrac{4}{3}}$

$\sec x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\sec x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ tiene soluciones en los cuadrantes I y IV

Cuad. I $x_1 = 30°$

Cuad. II $x_2 = 180° - 30° = 150°$

$\sec x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Cuad. III. $x_3 = 180° + 30° = 210°$

Cuad. IV. $x_4 = 360° - 30° = 330°$

$S = \{30°; 150°; 210°; 330°\}$ ♦

- En este caso expresamos toda la ecuación en función de la razón *sec x* aplicando la identidad $\dfrac{1}{\cos x} = \sec x$ para expresarla en función de una sola razón trigonométrica.
- Se multiplican ambos miembros de la ecuación por sec *x* para eliminar el denominador.
- Se despeja sec *x*
- Se calcula la raíz cuadrada de $\pm\sqrt{\dfrac{4}{3}}$

Observa que como se obtienen valores positivos y negativos de la secante debemos buscar los ángulos en los cuatro cuadrantes por ser esta razón positiva en I y IV cuadrantes y negativa en II y III cuadrantes. Comenzamos determinando el valor del ángulo en el primer cuadrante y aplicamos las fórmulas que permiten calcular los valores de los ángulos para los restantes.

Reflexiona sobre lo aprendido

Construye:

- Una tabla en la que resumas los valores de las razones trigonométricas para los ángulos axiales.
- Una tabla en la que resumas el signo de las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.

- Una tabla en la que resumas las fórmulas de reducción para el segundo, tercero y cuarto cuadrantes.

Generalización del concepto de ángulo. Ángulos coterminales

Hasta ahora has utilizado el concepto de ángulo como la porción del plano limitado por dos semirrectas de origen común, el cual es suficiente para el trabajo en la Geometría, donde los ángulos toman valores desde 0° a 360°, pero en la práctica y para el trabajo en la trigonometría este concepto de ángulo es insuficiente. Por esta razón, a partir de ahora, debemos trabajar en la trigonometría con un concepto más general de ángulo.

Piensa en los ángulos que describe cualquier radio en la polea cuando gira en los dos sentidos (horario y antihorario) para subir y bajar un objeto (figura 4.33) o en los que determina cualquier rayo de la llanta de una bicicleta que marcha hacia delante y luego hacia atrás o en los que generan los sistemas de ciertas lavadoras de ropas que giran en ambos sentidos o en otros ejemplos de la vida cotidiana.

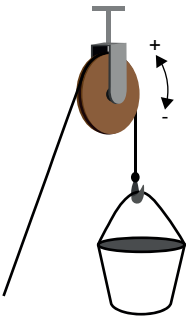


Fig. 4.33

Definición 4.4

Dado un par de semirrectas de origen común, consideramos que el ángulo está determinado por la rotación que lleva una de las semirrectas sobre la otra (figura 4.34 a).

Si este concepto se aplica a un sistema de coordenadas rectangulares, de manera que el vértice coincida con el origen de coordenadas, uno de los lados está sobre el semieje positivo de las abscisas (lado inicial) y el otro (lado terminal) rota en sentido de las manecillas del reloj (sentido horario) o contrario a estas (sentido antihorario) (figura 4.34 b).

Al ángulo determinado por una rotación en sentido contrario a las manecillas (sentido antihorario) se considera positivo y el determinado por una rotación en el mismo sentido que las manecillas del reloj, negativo (figura 4.34 c).

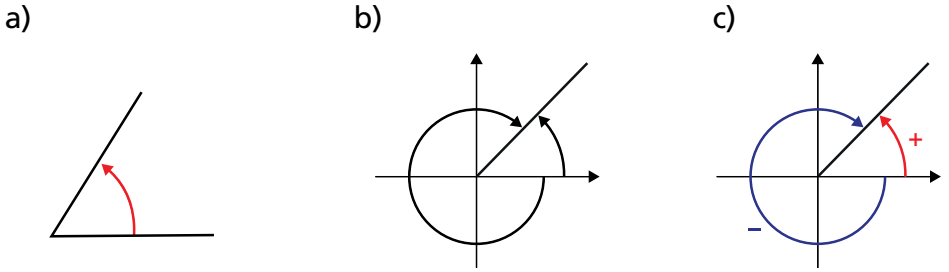


Fig. 4.34

Si observas la figura 4.34 *c*, notarás que el ángulo negativo determinado por una semirrecta se puede obtener restándole 360° al ángulo positivo que esta semirrecta determina. Por ejemplo, si se tienen los ángulos $\alpha = 60°$ y $\beta = 150°$, entonces los negativos que tiene el mismo lado terminal que α y β son $\delta = 60° - 360° = -300°$ y $\phi = 150° - 360° = -210°$, respectivamente. También, si es conocido el ángulo negativo se puede determinar el positivo que tiene ese mismo lado terminal, en este caso sumándole 360°.

Está claro que una semirrecta (lado terminal del ángulo) puede rotar alrededor del origen, de coordenadas ilimitadamente (figura 4.35); esto nos permite definir ángulos mayores de 360° y menores que 0°.

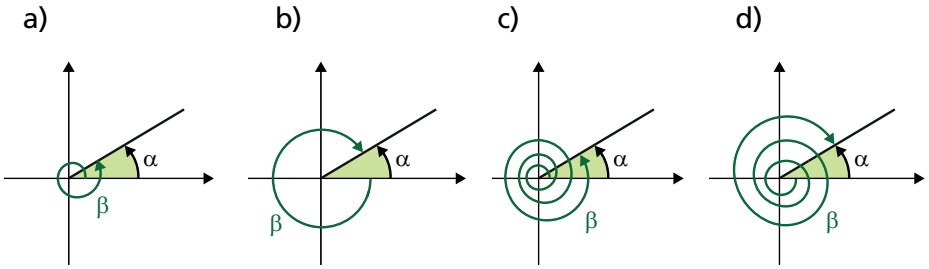


Fig. 4.35

Si consideramos un ángulo cualquiera (α), entonces los ángulos (β) que tienen el mismo lado terminal que α se pueden expresar de la manera siguiente:

$\beta_0 = \alpha$; $\beta_1 = \alpha \pm 360°$; $\beta_2 = \alpha \pm 2 \cdot 360°$; $\beta_3 = \alpha \pm 3 \cdot 360°$; $\beta_k = \alpha + k \cdot 360°$; en este caso *k* es un número entero que expresa el número de vueltas del lado terminal.

Los ángulos determinados por una misma semirrecta se llaman coterminales y se diferencian en un múltiplo entero de 360° (figura 4.35).

El intervalo $[0°;360°]$ se denomina **intervalo fundamental**; entonces, de manera general, si $\alpha \in [0°;360°]$ el conjunto de todos los ángulos coterminales con α se puede representar mediante la igualdad $\beta_k = \alpha + k \cdot 360°$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 4.17

Determinar para cada ángulo β el coterminal que pertenece al intervalo fundamental.

a) $\beta = 1\,860°$ b) $\beta = 2\,370{,}5°$ c) $\beta = -835°$

Resolución:

a) Dividimos 1 860° entre 360° y obtenemos $1\,860° = 5 \cdot 360° + 60°$; luego, el único ángulo que satisface la condición es $\alpha = 60°$.

b) Se procede de forma análoga al caso anterior y se obtiene $2\,370{,}5° = 6 \cdot 360° + 210{,}5°$; entonces la respuesta es $\alpha = 210{,}5°$.

c) $\alpha = 210{,}5°$ pero $-115°$; es un coterminal negativo que no pertenece al intervalo fundamental; por tanto, tenemos que adicionarle 360° para obtener el ángulo buscado, en este caso $\alpha = 245°$. ♦

Como las razones trigonométricas dependen de las coordenadas $(x;y)$ del punto donde el lado terminal del ángulo corta a la circunferencia trigonométrica, entonces se satisface la propiedad siguiente:

Razones trigonométricas de un conjunto de ángulos coterminales

Si $\alpha \in [0°;360°]$, entonces las razones trigonométricas de todos los ángulos coterminales con α son las mismas que las del ángulo α.

Anteriormente en este epígrafe hallaste las razones trigonométricas de ángulos en el intervalo $[0°;360°]$; esto quiere decir que se pueden calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo utilizando las definiciones ya conocidas.

Procedimiento:

Para hallar la razón trigonométrica de un ángulo cualquiera δ, que no pertenece al intervalo fundamental, debes buscar el coterminal de δ en el intervalo fundamental y después aplicar el procedimiento conocido para ángulos de ese intervalo.

Ejemplo 4.18

Calcular:

a) $\cot 765°$ b) $\cos 843{,}3°$ c) $\operatorname{sen}(-30°)$

Resolución:

a) $765° = 2 \cdot 360° + 45°$; $45° \in$ Cuad. I; $\cot 765° > 0$ $\cot 765° = \cot 45° = 1$

b) $843{,}3° = 2 \cdot 360° + 123{,}3°$; $123{,}3° \in$ Cuad. II $\cos 123{,}3° < 0$;
$123{,}3° = 180° - \alpha$; $\alpha = 56{,}7°$
$\cos 843{,}3° = \cos 123{,}3° = -\cos 56{,}7° = -0{,}5490$

c) $-30° + 360° = 330°$; $330° \in$ Cuad. IV; $\operatorname{sen} 330° < 0$ ¸ $330° = 360° - \alpha$;
$\alpha = 30°$
$\operatorname{sen}(-30°) = \operatorname{sen} 330° = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$ ♦

Razones trigonométricas de ángulos opuestos

Las razones trigonométricas de los ángulos negativos se pueden reducir a la de los ángulos positivos. En la figura 4.36 se muestra la relación entre las coordenadas de P y P_1, que son los puntos de intersección de los respectivos lados terminales de los ángulos α y $-\alpha$ con la circunferencia trigonométrica.

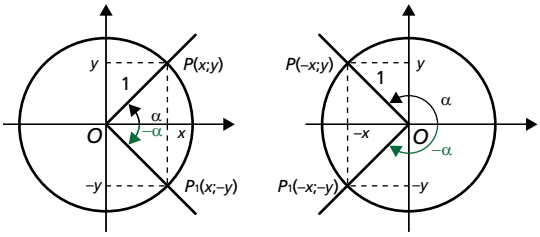


Fig. 4.36

A partir de las coordenadas de P se puede expresar la relación entre las razones trigonométricas de ángulos opuestos.

Teorema 4.5 (Razones trigonométricas de ángulos opuestos)

Para todo ángulo α se cumple: $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$, $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$, $\sec(-\alpha) = \sec\alpha$, $\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$

Ejemplo 4.19

Calcular: a) $\operatorname{sen}(-30°)$ b) $\cos(-561°)$ c) $\tan(-890°)$

Resolución:

a) $\operatorname{sen}(-30°) = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$

(Observa que el procedimiento empleado ahora es más simple que el utilizado en el ejemplo 4.15 c)

b) $561° = 1 \cdot 360° + 201°$; $201° \in$ Cuad III; $\cos 201° < 0$; $201° = 180° + \alpha$; $\alpha = 21°$

$\cos(-561°) = \cos 561° = \cos 201° = -\cos 21° = -0{,}9336$

c) $890° = 2 \cdot 360° + 170°$; $170° \in$ Cuad II; $\tan 170° < 0$; $170° = 180° - \alpha$; $\alpha = 10°$

$\tan(-890°) = -\tan 890° = -\tan 170° = -(-\tan 10°) = 0{,}1763$ ♦

En el epígrafe anterior al resolver las ecuaciones, las soluciones podían encontrarse en cualquiera de los cuatro cuadrantes incluyendo los ángulos axiales, o sea, en el intervalo fundamental $0° \leq \alpha \leq 360°$. Ahora, al resolver las ecuaciones, el conjunto solución puede ser infinito, ya que se incluirán ángulos coterminales en él como se aprecia en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 4.20

Hallar el conjunto solución de las ecuaciones siguientes.

a) $\cos x = -1$ b) $2\sec^2 x = \tan^2 x + 5$

Resolución:

a) $\cos x = -1$

$x_0 = 180°$

$S = \{180° + k \cdot 360°; k \in \mathbb{Z}\}$

b) $2\sec^2 x = \tan^2 x + 5$

$2\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 5$

$\dfrac{2}{\cos^2 x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 5$ multiplicando ambos miembros de la ecuación por el mcm / $\cos^2 x$

$2 = \operatorname{sen}^2 x + 5\cos^2 x$

$2 = 1 - \cos^2 x + 5\cos^2 x$

$1 = 4\cos^2 x$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{4}$

$\cos x = \pm\dfrac{1}{2}$

Observaciones

La ecuación tiene soluciones en 180° y sus ángulos coterminales.

La ecuación tiene soluciones en los cuatro cuadrantes. En este caso se halla el que corresponde al primer cuadrante y después se utilizan las fórmulas para hallar los del intervalo fundamental, que pertenecen a los otros cuadrantes.

Cuad. I: $x_1 = 60^\circ$ ∘
Cuad. II: $x_2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
Cuad. III: $x_2 = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$
Cuad. IV: $x_2 = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$
$S = \{60° + k \cdot 360°; 120° + k \cdot 360°; 240° + k \cdot 360°; 300° + k \cdot 360°; k \in \mathbb{Z}\}$
También puede expresarse de la siguiente forma
$S = \{60° + k \cdot 180°; 120° + k \cdot 180°; k \in \mathbb{Z}\}$ ♦

Reflexiona sobre lo aprendido

Sabes que para hallar las razones trigonométricas de ángulos entre 0° y 90° utilizas las tablas trigonométricas o los valores de los ángulos notables

1. Determina: sen 50°; cos 75,2°; tan 45°; cot 36,3°; sec 56,4° y csc 15,3°.
2. ¿Para qué se utilizan las fórmulas de reducción? ¿Son todas las razones trigonométricas positivas para todos los ángulos entre 0° y 90°?
3. ¿Cómo hallar los valores de las razones trigonométricas para ángulos mayores de 90°?
4. Determina: sen 120°; cos 150°; tan 205°; cot 300°; sec 135°; csc 210°; sen 750° y cos 1 050°.

Ejercicios del epígrafe 4.2

Razones trigonométricas de ángulos mayores de 90° y menores o iguales que 360°. Fórmulas de reducción

1. Di en qué cuadrante pudiera estar situado el ángulo θ si:

a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$ b) $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\tan\theta = 2$

e) $\tan\theta = -1$ f) $\cos\theta = \frac{1}{3}$ g) $\cos\theta = 0{,}32$ h) $\sec\theta = 2{,}5$

i) $\csc\theta = -15$

2. Di en que cuadrante está situado α si:

a) $\operatorname{sen}\alpha > 0$ y $\cos\alpha > 0$ b) $\tan\alpha > 0$ y $\cos\alpha < 0$ c) $\operatorname{sen}\alpha > 0$ y $\cos\alpha < 0$

d) $\tan\alpha < 0$ y $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e) $\operatorname{sen}\alpha < 0$ y $\cos\alpha > 0$ f) $\sec\alpha > 0$ y $\operatorname{sen}\alpha < 0$

3. Determina si son posibles las siguientes combinaciones de signos:

a) $\operatorname{sen}\beta > 0$, $\cos\beta < 0$ y $\tan\beta < 0$ b) $\operatorname{sen}\beta < 0$, $\cos\beta > 0$ y $\tan\beta > 0$

c) $\operatorname{sen}\beta > 0$, $\cos\beta > 0$ y $\tan\beta < 0$ d) $\csc\beta > 0, \sec\beta < 0$ y $\cot\beta < 0$

En los casos posibles, señala en qué cuadrante está situado β.

4. De las siguientes combinaciones, ¿cuáles son verdaderas? Fundamenta.

a) $\operatorname{sen}\gamma > 0$, $\cos\gamma = 0$ y $\tan\gamma$ no está definida

b) $\operatorname{sen}\beta < 0$, $\tan\beta = 1$ y $-1 < \cos\beta < 0$

c) $\operatorname{sen}\beta = 0$, $\cos\beta = 0$ y $\tan\beta = 0$

5. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) 120° b) 210° c) 315°

6. En cada uno de los siguientes casos determina las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) del ángulo θ bajo las condiciones dadas.

a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{4}$ y $\theta \in$ IIC

b) $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$

c) $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{13}$ y $\cos\theta < 0$

d) $\tan\theta = -\frac{3}{4}$ y $\cos\theta > 0$

e) $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ y $\cos\theta < 0$

f) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\theta \in$ IVC

g) $\sec\theta = 2$ y $\cot\theta < 0$

7. Calcula las razones trigonométricas (seno, coseno y cotangente) de α sabiendo que:

$\tan\alpha = -\frac{2}{5}$ y $90° < \alpha < 180°$

8. Calcula:

a) $\frac{\operatorname{sen}90° - \cos180° + \tan360°}{2\cos0°}$

b) $\frac{\cos180° - 2\tan0° + \operatorname{sen}270°}{\operatorname{sen}30°}$

9. Prueba que:

a) $\operatorname{sen}90° + \tan180° - \cos360° = 0$

b) $\cos30° - \cos180° - \tan360° \cdot \operatorname{sen}45° = \frac{\sqrt{3}+2}{2}$

10. Si $a = 30°$; $b = 180°$; $c = 90°$ y $d = 270°$. Calcula:

a) $\frac{\operatorname{sen}^2 a + 2\cos b}{\tan^2 b - \operatorname{sen} c}$

b) $\sqrt{\frac{\cos^2 a + 2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} c + \tan b}}$

c) $\frac{5\csc d - 3\cos^2 b}{1 - \tan^2 b - \cos b} - \cos^2 a$

11. Expresa las cantidades de amplitud siguientes como una suma de la forma $180° + x$, o como una diferencia de las formas $180° - x$ o $360° - x$, de modo que $0° < x < 90°$.

a) 125° b) 217° c) 314° d) 162° e) 265° f) 285° g) 330°

12. Calcula los valores siguientes:

a) sen 135° b) cos 120° c) tan 210° d) tan 330° e) cos 225°

f) cot 210° g) sen 150° h) cos 315° i) sec 330° j) csc 225°

13. Simplifica las siguientes expresiones para todo valor admisible de la variable:

a) $\dfrac{\cos x}{\cos(180° - x)} - \dfrac{\operatorname{sen}(360° - x)}{-\operatorname{sen} x}$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}(180° + a)}{\operatorname{sen} a} + \dfrac{\cos(90° - a)}{\operatorname{sen} a}$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}(180° + 30°)}{\tan(90° - 45°)} \cdot \dfrac{\tan(360° - 60°)}{\cos(180° - 45°)}$

d) $\tan 210° \cdot \cos 210° \cdot \csc 210°$

e) $\dfrac{\cos 120° \cdot \cos 225°}{(1 + \sec 240°)\operatorname{sen} 225°}$

14. Prueba que:

a) $\cos 330° - \operatorname{sen} 60° = 0$

b) $\cos 225° - \tan 210° \cdot \operatorname{sen} 300° = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$

c) $\dfrac{\tan 45° - \cot 150°}{\cos 210° - \sec 60°} = -\dfrac{6\sqrt{3} + 2}{13}$

d) $\operatorname{sen}(90° - x) \cdot \operatorname{sen}(180° + x) + \cos(90° - x) \cdot \cos(360° - x) = 0$

15. a) Si $a = \operatorname{sen} 240°$; $b = \cos 90°$ y $c = \operatorname{sen} 270°$ calcula el valor de $\sqrt{\dfrac{3a^2 - b}{c^2}}$

b) Si $A = \tan 150°$; $B = \cos 210°$; $C = \operatorname{sen} 315°$ y $D = \cos 0°$ calcula $\dfrac{3A + 2B}{D \cdot C}$

16. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\cos 60° \cdot x + \operatorname{sen} 210° = \tan 180°$

b) $(3 \operatorname{sen} 215° \cdot x)^2 - 4 \cos^2 150° \cdot x = \tan 45°$

17. Resuelve las siguientes ecuaciones con $0° \leq x \leq 360°$:

a) $6 \operatorname{sen}^2 x = 3$

b) $\tan x + 1 = 0$

c) $3 \operatorname{sen} x = 2 - 2 \operatorname{sen}^2 x$

d) $2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 0$

e) $2 \cos^2 x - 1 = 2 \operatorname{sen}^2 x$

f) $3(1 + \cos x) = 2 \operatorname{sen}^2 x$

g) $2 \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 2$

h) $3 \operatorname{sen} x - 1 = 0$

i) $2 \cos x + 9 = -3 \cos x$

j) $2 \tan x + \sqrt{5} = 0$

k) $3 - 7 \cos x = 6 \operatorname{sen}^2 x$

l) $2 \tan^2 x - 2 = 3 \tan x$

m) $10 - 5 \operatorname{sen} x = 12 \cos^2 x$ n) $1 - 2 \operatorname{sen}^2 x + \cos x = 0$

ñ) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$ o) $3 \sec x(1 + \operatorname{sen} x) = \cos x$

p) $\sec x(5 \operatorname{sen}^2 x) = -2 \tan x$

Generalización del concepto de ángulo. Ángulos coterminales

18. Considera el origen de coordenadas como vértice de los ángulos cuyas amplitudes son las siguientes:

a) 45°; b) 135°; c) 305°; d) 710°; e) – 30°; f) – 120°; g) – 315°; h) – 430°

¿En qué cuadrante se encuentra el lado terminal de cada uno de estos ángulos?

19. Determina para cada uno de los siguientes ángulos un coterminal entre 0° y 360°.

a) 4 380° b) 3 675° c) 27 134°

d) 515,6° e) 7 584,4° f) 438,5°

g) 3 205,6° h) – 1573° i) – 157°

j) – 479,6° k) – 47,6°

20. Dados los conjuntos de cantidades de amplitudes siguientes, comprueba en qué casos se trata de ángulos coterminales y di su amplitud principal.

a) {2 015°; 1 295°; 575°} b) {473°; – 247°; 1 193°}

c) {385°; 1 115°; 1 315°} d) {445°; 1 165°; 1 885°}

e) {444°; 1 164°; 1 514°} f) {893°; – 547°; 1 253°}

21. Reduce al primer cuadrante las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de los siguientes ángulos y calcula su valor.

a) 185° b) 130° c) 294° d) 3 062° e) –42°

22. Calcula el valor de:

a) sen(– 45°) b) cos(– 30°) c) tan(– 120°)

d) cot(– 240°) e) sen(1 000°) f) csc(210°) g) sec(–300°)

23. Determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $2 \cos^2 x = \operatorname{sen} x + 1$ b) $2 \operatorname{sen} x \cos x = \tan x$

c) $4(1 - 2 \operatorname{sen}^2 x) + 3 \cos x = 1$ d) $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$

e) $\dfrac{1 - 2\operatorname{sen}^2 x}{2 \operatorname{sen} x \cos x} + \cot x = 0$ f) $\dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} - \tan x = 0$

4.3 Aplicaciones de la trigonometría

De la historia

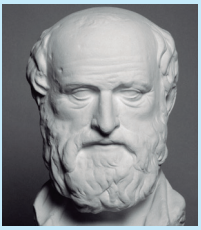


Fig. 4.37

El célebre astrónomo de la antigüedad Hiparco, nacido en Nicea en el año 161 a.n.e., siendo todavía un adolescente, se preguntaba en qué medida podían los conocimientos geométricos que poseía sobre las amplitudes de los ángulos y sus propiedades serle útiles. La respuesta a esto vino años después: como era muy aficionado a la observación de la esfera celeste se dispuso a calcular la distancia entre la Tierra y la Luna. Para lograr sus propósitos midió la amplitud de ciertos ángulos bajo los cuales se veía la Luna desde distintas posiciones desde la Tierra. De este modo pudo calcular, mediante un rudimentario dispositivo para medir ángulos (el Astrolabio) y con una precisión increíble para su época, que la distancia máxima entre ambos astros era de unos 400 000 km. Esta medida comparada con los cómputos actuales, que estiman la distancia entre los dos astros en unos 385 000 km, ofrece solo un error de 3,5%. Hiparco procedió con las medidas de los ángulos con que se veía la Luna desde la Tierra y la distancia entre los puntos de observación, resolvió el triángulo formado por estos puntos y la Luna. Para ello, también utilizó el valor del radio de la Tierra que había calculado Eratóstenes casi un siglo antes, el cual también lo realizó por medio de la resolución de triángulos, en ese caso de triángulos rectángulos.

La **trigonometría** tiene entre sus aplicaciones no solo a la Astronomía, sino también se utiliza en la ingeniería, la arquitectura, en la fotografía, entre otras.

Por ejemplo, en una cámara fotográfica el ángulo de visión cambia con la longitud focal del lente de la cámara. Un lente gran angular de 28 mm tiene un ángulo de visión ancho, y un lente de telefoto de 300 mm tiene un ángulo de visión estrecho.

Para una cámara de formato de 35 mm el ángulo de visión θ (figura 4.38) está dado por $\theta = 2\ \tan^{-1}\left(\frac{21{,}634}{x}\right)$, donde x es la longitud focal del lente que se usa, pero esta relación no la podrás utilizar todavía hasta el onceno grado.

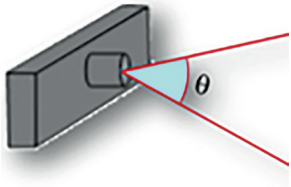


Fig. 4.38

En este epígrafe conocerás otras aplicaciones de la trigonometría y aprenderás a resolver triángulos cualesquiera y nuevas relaciones para el cálculo de áreas de figuras planas.

Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo es conocer sus seis elementos, es decir, conocer las amplitudes de sus tres ángulos interiores y las longitudes de sus tres lados. De estos elementos, en el triángulo rectángulo se conoce la amplitud de un ángulo (el ángulo recto) y en el equilátero la amplitud de sus tres ángulos (60°).

Es importante saber resolver un triángulo rectángulo, pues esto nos permite, en ocasiones, hallar los elementos de cualquier triángulo, debido a que todo triángulo es posible descomponerlo en dos triángulos rectángulos mediante el trazado de una de sus alturas.

La resolución de un triángulo rectángulo comprende cuatro casos distintos:

– conocido un ángulo agudo y la hipotenusa,
– conocido un ángulo agudo y un cateto,
– conocido un cateto y la hipotenusa, o
– conocidos los dos catetos.

Es indispensable considerar entre los elementos conocidos, además del ángulo recto, uno de los lados.

Ayuda para aprender

Al resolver un triángulo rectángulo deben tener en cuenta:

1. Dibujar un triángulo rectángulo y señalar los elementos conocidos y desconocidos.
2. Cuando se conoce un ángulo agudo, se puede hallar el otro agudo restándolo de 90°, ya que son complementarios.
3. Para hallar un elemento desconocido se escoge una relación que lo contenga y a otros dos conocidos, y se despeja en ella el elemento desconocido.

Esta relación escogida puede ser una razón trigonométrica o uno de los teoremas del Grupo de Teoremas de Pitágoras.

Recuerda que...

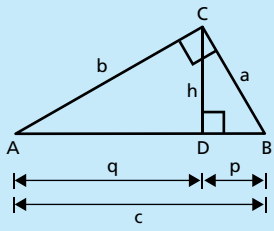


Fig 4.39

El Grupo de Teoremas de Pitágoras está compuesto por tres teoremas que tienen como premisa el triángulo rectángulo y son:

Teorema de Pitágoras. En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos ($c^2 = a^2 + b^2$) (figura 4.39).

Teorema de la Altura. El cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de los segmentos que esta determina sobre la hipotenusa ($h^2 = p \cdot q$) (figura 4.39).

Teorema de los catetos. El cuadrado de la longitud de cada cateto es igual al producto de la longitud de la hipotenusa por la longitud del segmento de hipotenusa correspondiente al cateto

($a^2 = p \cdot c$; $b^2 = q \cdot c$) (figura 4.39).

El Teorema de la altura y el de los catetos se pueden expresar también en términos de la proporcionalidad de segmentos y del área de figuras planas.

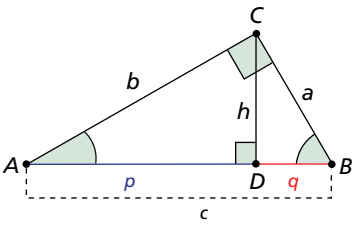


Fig. 4.40

Teorema de la altura

Por proporción:

En todo triángulo rectángulo, si se traza la altura relativa a la hipotenusa, la longitud de cada cateto es media proporcional entre la longitud de la hipotenusa y la del segmento de hipotenusa adyacente al cateto.

Simbólicamente: $\frac{p}{h} = \frac{h}{q}$

Por áreas:

En todo triángulo rectángulo el área del cuadrado que tiene por lado la longitud de la altura relativa a la hipotenusa (h^2) es igual al área del rectángulo que tiene por lados las longitudes de los segmentos que esta determina sobre la hipotenusa ($p \cdot q$).

En este caso: $h^2 = p \cdot q$

Teorema de los catetos

Por proporción:

En todo triángulo rectángulo la longitud de cada cateto es media proporcional entre las longitudes de los segmentos que ella determinan sobre la hipotenusa y la hipotenusa.

Simbólicamente: $\frac{q}{a} = \frac{a}{c}$; $\frac{p}{b} = \frac{b}{c}$

Por áreas:

En todo triángulo rectángulo el área del cuadrado que tiene por lado la longitud de cada cateto (a^2 o b^2) es igual al área del rectángulo que tiene por lados las longitudes de los segmentos que estos determinan sobre la hipotenusa y la hipotenusa ($q \cdot c$ o $p \cdot c$).

En este caso: $a^2 = q \cdot c$ y $b^2 = p \cdot c$

Ejemplo 4.21

Resolver los triángulos *BCA* y *NPM* rectángulos en *C* y *P* respectivamente, con los datos que se dan en la figura 4.41.

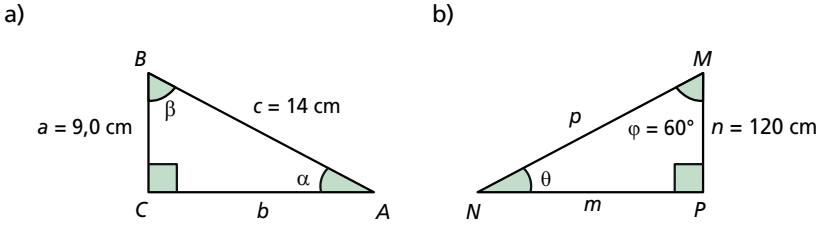


Fig. 4.41

Resolución:

a) $c^2 = a^2 + b^2$ (Teorema de Pitágoras) luego se cumple que: $b^2 = c^2 - a^2$ $b^2 = 14^2 - 9^2$	Conocemos la hipotenusa y un cateto. Para resolver el triángulo debemos hallar el otro cateto y los ángulos agudos.

$b^2 = 196 - 81 = 115$

$b \approx 10{,}7\,\text{cm}$

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{9}{14} \approx 0{,}6429$

$\alpha = 40^\circ$

$\beta = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

- Para calcular el otro cateto desconocido b debemos aplicar el Teorema de Pitágoras.
- Para calcular el ángulo α debemos utilizar una razón trigonométrica de este ángulo.

  En este caso una que se corresponda con los elementos conocidos que son suficientes.
- Para hallar β se puede utilizar la relación entre los ángulos interiores agudos en un triángulo rectángulo: α y β son complementarios; por tanto, $\beta = 90^\circ - \alpha$.

b) Sean $\delta = 90^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ y θ los ángulos interiores del triángulo *NPM*.

$\theta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$\cos\varphi = \dfrac{n}{p}$, luego $p = \dfrac{n}{\cos\varphi}$

$p = \dfrac{120\,\text{cm}}{\cos 60^\circ} = \dfrac{120\,\text{cm}}{0{,}5}$

$p = 240\,\text{cm}$

$\tan\varphi = \dfrac{m}{n}$, luego: $m = n \cdot \tan\varphi$

$m = 120\,\text{cm} \cdot \tan 60^\circ = 120\,\text{cm} \cdot \sqrt{3}$

$m = 120\sqrt{3}\,\text{cm}$ ♦

Conocemos un cateto y un ángulo agudo. Para resolver el triángulo debemos calcular el otro ángulo, la hipotenusa y el otro cateto.

- Para calcular el otro ángulo θ se puede utilizar la relación entre los ángulos interiores agudos en un triángulo rectángulo:
- Para calcular uno de los lados desconocidos utilizamos, igual que en el inciso anterior, una razón trigonométrica que relacione los elementos dados con el lado que queremos hallar.
- Para hallar el otro cateto podemos utilizar el teorema de Pitágoras o la razón trigonométrica que relacione este cateto con los datos que conocemos.

Ejemplo 4.22

Dos tensores están atados a lo alto de una antena de transmisión, formando entre sí un ángulo recto. Si están sujetos al suelo a una distancia de 16 m y 9,0 m de la base de la antena respectivamente, calcular la altura de la antena, la longitud de los tensores y el ángulo que forman con el suelo.

La representación gráfica del problema planteado se muestra en la figura 4.42.

Resolución:

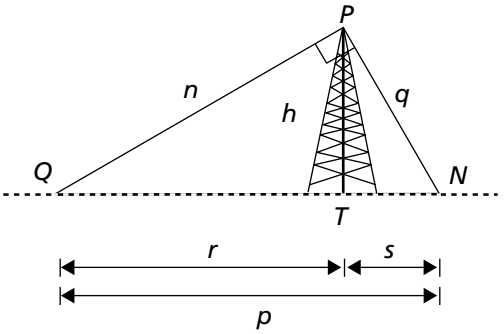


Fig. 4.42

En este caso el ΔNPQ es rectángulo en P y $\overline{PT}$ es altura relativa a la hipotenusa $\overline{QN}$.

$\overline{QP}$ y $\overline{NP}$ son los tensores y r = 16 m y s = 9,0 m la distancia de la base de la antena a los extremos Q y N de los tensores que se encuentran en el suelo.

Luego como se conocen estas longitudes se cumple que:

$h^2 = r \cdot s$ (Teorema de la altura en el triángulo NPQ)
$h^2 = 16\text{ m} \cdot 9{,}0\text{ m} = 144\text{ m}^2$
$h = \sqrt{144}\,\text{m}$ por tanto $h = 12$ m

Para hallar la longitud de los tensores se representan los catetos n y q del triángulo NPQ primeramente calculamos la longitud de la hipotenusa representada en la figura por p.

Luego $p = r + s = 16\text{ m} + 9{,}0\text{ m} = 25\text{ m}$.

$n^2 = r \cdot p$ y $q^2 = s \cdot p$ (Teorema de los catetos en el triángulo *NPQ*)

$n^2 = 16\text{ m} \cdot 25\text{ m}$; $q^2 = 9{,}0\text{ m} \cdot 25\text{ m}$

$n = 20\text{ m}$; $q = 15\text{ m}$

Para hallar el ángulo que forma cada tensor con el suelo, podemos utilizar las razones trigonométricas en los triángulos *QTP* y *PTN* rectángulos en *T*. En este caso:

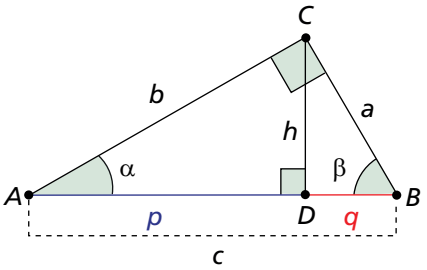
$$\cos \angle PQT = \frac{r}{n} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = 0{,}8;\ \angle PQT = 36{,}9°$$

$$\cos \angle TNP = \frac{s}{q} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0{,}6;\ \angle TNP = 53{,}1°$$

La altura de la antena es de 12 m, los tensores miden 20 m y 15 m y forman ángulos con el suelo de 36,9° y 53,1°, respectivamente. ♦

Ejemplo 4.23

Hallar una expresión trigonométrica para el Teorema de la altura (figura 4.43).



figra 4.43

Resolución:

En el ΔBCA rectángulo en *C*, $\overline{CD} = h$ es la altura relativa a la hipotenusa $\overline{AB} = c$.

$h^2 = p \cdot q$ (Teorema de la altura) (1)

En el ΔADC rectángulo en *D*, se tiene:

$\cos\alpha = \dfrac{p}{b}$, de donde: $p = b \cdot \cos\alpha$ (2)

En el ΔCDB rectángulo en D, se tiene:

$\cos\beta = \frac{q}{a}$, de donde: $q = a \cdot \cos\beta$ (3)

Ahora, sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$h^2 = a \cdot b \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta$ ♦

En situaciones prácticas relacionadas con la Topografía, la Navegación aérea o marítima, al observar la parte superior de un edificio, etc. es necesario conocer el ángulo que se forma al dirigir la vista ya sea a un punto que está por encima de nuestra posición o por debajo; por tanto, es necesario diferenciar estos tipos de ángulos.

Ángulo de depresión: es el ángulo formado por una línea horizontal y otra cualquiera no horizontal por debajo de la horizontal (figura 4.44 a).

Ángulo de elevación: es el ángulo formado por una línea horizontal y cualquier otra no horizontal por encima de la horizontal (figura 4.44 b).

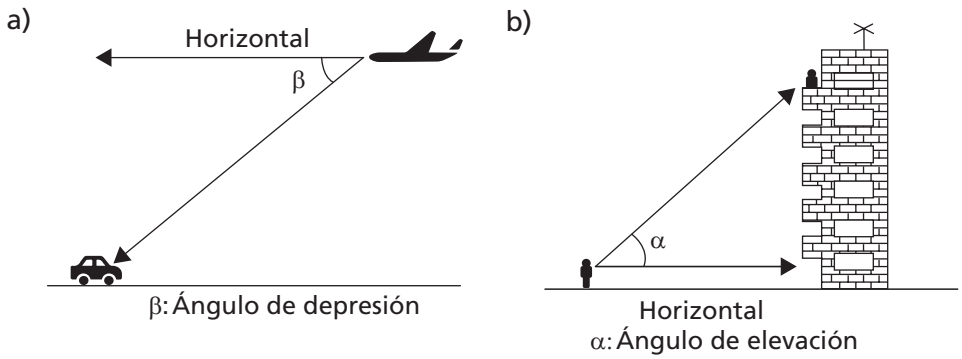


Fig. 4.44

Ejemplo 4.24

Desde un punto *C*, que se encuentra a 15 m de un punto *B* situado en la base de un edificio se observa en la azotea la parte superior de una antena de 2,0 m de altura, bajo un ángulo de elevación de 60°. Si se realiza la misma observación desde un punto *D* más distante de la base del edificio, el ángulo de elevación es de 30°, ¿cuál es la altura del edificio? ¿Qué distancia separa los puntos de observación si estos están alineados con *B*?

Resolución:

La figura 4.45 muestra la situación planteada donde:

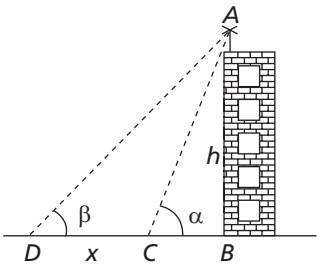


Fig. 4.45

h es la altura del edificio y *x* la distancia entre los puntos de observación.

$\overline{AB} = h + 2{,}0\ \text{m}$; $\overline{BC} = 15\text{m}$; $\angle ACB = \alpha = 60^\circ$

$\overline{BD} = x + 15\text{m}$ y $\angle ADB = \beta = 30^o$

Un procedimiento general para resolver esta problemática puede ser el siguiente:

En el ΔCBA, rectángulo en *B,* se tiene:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\ ;\ \text{luego,}\ \overline{AB} = \overline{BC}\cdot\tan\alpha\ ;\ \overline{AB} = 15\text{m}\cdot\tan 60^\circ = 15\sqrt{3}\text{m}$$

Pero $\overline{AB} = h + 2{,}0\ \text{m}$, de donde $h = \overline{AB} - 2{,}0\text{m} \approx 15\cdot 1{,}73\text{m} - 2{,}0\text{m}$

$h \approx 23{,}95\ \text{m} \approx 24\ \text{m}$

En el ΔDBA, rectángulo en *B,* se tiene:

$$\tan\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}\ ;\ \text{luego},\ \overline{BD} = \frac{\overline{AB}}{\tan\beta};\quad \overline{BD} = \frac{15\sqrt{3}\text{m}}{\tan 30^0} = \frac{15\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 45\text{m}$$

Pero $\overline{BD} = x + 15\text{m}$, de donde $x = \overline{BD} - 15\text{m} = 45\text{m} - 15\text{m}$

$x = 30\ \text{m}$

La altura del edificio es aproximadamente de 24 m y la separación entre los puntos de observación es de 30 m. ♦

Reflexiona

De acuerdo con los ángulos dados en el ejemplo anterior, ¿la resolución podría haber sido mediante un procedimiento más simple?

Observa que los ángulos de elevación son de 30° y 60° respectivamente y esto simplifica el trabajo cuando se aplica el teorema del ángulo de 30° en un triángulo rectángulo. Por ejemplo:

En el ΔCBA rectángulo en *B*, $\angle CAB = 90° - \alpha = 30°$ por ser ángulos complementarios. Luego: $\overline{AB} = \sqrt{3}\cdot\overline{BC}$ (cateto adyacente al ángulo de 30° en el triángulo rectángulo)

$\overline{AB} = 15\sqrt{3}\,\text{m}$ y $\overline{AB} = h + 2{,}0\,\text{m}$, entonces: $h \approx 15 \cdot 1{,}73\,\text{m} - 2{,}0\,\text{m} \approx 24\,\text{m}$

En el ΔDBA rectángulo en B, $\angle ADB = 30°$, luego $\overline{BD} = \sqrt{3} \cdot \overline{AB}$ (cateto adyacente al ángulo de 30° en el triángulo rectángulo)

$\overline{BD} = \sqrt{3} \cdot 15 \cdot \sqrt{3}\,\text{m} = 45\,\text{m}$ y $\overline{DB} = x + 15\,\text{m}$, entonces:

$x = 45\,\text{m} - 15\,\text{m} = 30\,\text{m}$

La altura del edificio es aproximadamente de 24 m y la separación entre los puntos de observación es de 30 m. ♦

Cálculo de áreas utilizando la trigonometría

En tus estudios de Geometría analizaste fórmulas para el cálculo en las figuras planas.

Veamos cómo utilizando la trigonometría podemos calcular el área de algunas de estas figuras.

Recuerda que...

Área del triángulo: $A = \frac{1}{2}\, b \cdot h$ Área del paralelogramo: $A = b \cdot h$

Área del rombo: $A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ Área del rectángulo: $A = a \cdot b$

Área del trapecio: $A = \frac{B + b}{2} \cdot h$

En un ΔABC trazamos $\overline{CD} = h$ que es la altura relativa al lado c (figuras 4.46 y 4.47), por lo que el área del triángulo ΔABC es $A = \frac{1}{2} c \cdot h$ (1).

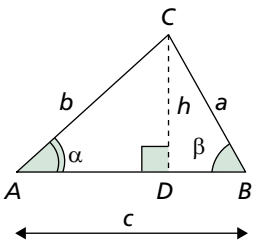


Fig. 4.46

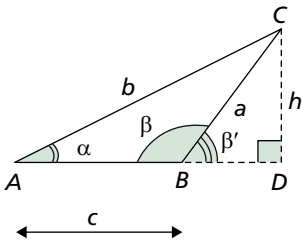


Fig. 4.47

En la figura 4.46, la altura *h* divide al triángulo *ABC* en dos triángulos rectángulos; entonces podemos aplicar las razones trigonométricas en cada caso y despejar la altura:

Triángulo acutángulo (figura 4.46)

En el triángulo *ADC*, rectángulo en *D*, $h = b \cdot \operatorname{sen}\alpha$ (2) y

En el triángulo *CDB*, rectángulo en *D*, $h = a \cdot \operatorname{sen}\beta$ (3)

Estas expresiones también se obtienen en el triángulo obtusángulo (figura 4.47).

En el triángulo *ADC*, rectángulo en *D* $h = b \cdot \operatorname{sen}\alpha$ (2)

En el triángulo *BDC*, rectángulo en *D* $h = a \cdot \operatorname{sen}\beta'$.

Pero, $\beta' = 180^\circ - \beta$, luego: $\operatorname{sen}\beta' = \operatorname{sen}(180^\circ - \beta) = \operatorname{sen}\beta$, entonces $h = a \cdot \operatorname{sen}\beta$ (2)

Ahora, sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtienen las fórmulas:

$$A = \frac{1}{2}cb\operatorname{sen}\alpha \quad \text{y} \quad A = \frac{1}{2}ca\operatorname{sen}\beta$$

Si se traza la altura relativa a los lados *a* o *b* y se realiza un procedimiento análogo, se obtiene la fórmula $A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\gamma$.

Si el triángulo es rectángulo (figura 4.48), se obtiene:

$$A = \frac{1}{2}cb\operatorname{sen}\alpha,\ A = \frac{1}{2}ca\operatorname{sen}\beta \text{ y } A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\gamma$$

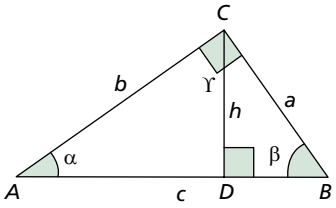


Fig. 4.48

Pero:

$$A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}90^\circ = \frac{1}{2}ab(1) = \frac{1}{2}ab,$$

es decir $A = \frac{1}{2}ab$; por tanto, el área es el semiproducto de los catetos.

Observa que en las tres fórmulas se tienen dos lados del triángulo y el ángulo comprendido entre esos lados.

Teorema 4.6 (Áreas de un triángulo)

El área de un triángulo es igual al semiproducto de las longitudes de dos lados cualesquiera por el seno del ángulo comprendido entre ellos.

El análisis anterior es suficiente para la demostración de este teorema.

En el caso del **triángulo equilátero,** como sus ángulos tienen una amplitud de 60° y todos sus lados son iguales, se tiene:

$A = \frac{1}{2}a \cdot a\,\text{sen}60° = \frac{1}{2}a^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, es decir, el área de un triángulo equilátero de lado α es:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Área del paralelogramo

Todo paralelogramo, al trazar una de sus diagonales, se descompone en dos triángulos acutángulos iguales (figura 4.49 a) o en dos triángulos oblicuángulos iguales (figura 4.49 b).

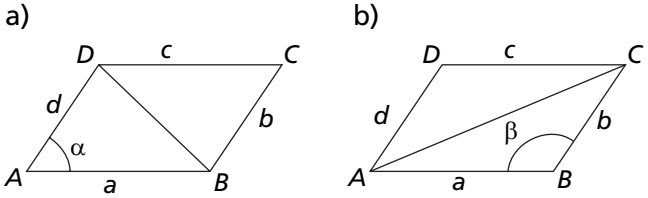


Fig. 4.49

En la figura 4.49 a) se cumple:

$A_{ABCD} = 2\,A_{\Delta ABD}$

$A_{ABCD} = 2\cdot(\frac{1}{2}\ a \cdot d\ \text{sen}\ \alpha)$; $0° < \alpha < 90°$

$A_{ABCD} = a \cdot d\ \text{sen}\ \alpha$ (1)

En la figura 4.49 b) se cumple: $A_{ABCD} = 2\,A_{\Delta ABC}$

$A_{ABCD} = 2\cdot(\frac{1}{2}\ a \cdot b\ \text{sen}\ \beta)$; $90° < \beta < 180°$

$A_{ABCD} = a \cdot b\ \text{sen}\ \beta$ (2), pero $b = d$ y $\beta = 180° - \alpha$; luego, sustituyendo en (2) obtenemos:

$A_{ABCD} = a \cdot d\ \text{sen}\ (180° - \alpha)$; $A_{ABCD} = a \cdot d\ \text{sen}\ \alpha$

Teorema 4.6 (Área del paralelogramo)

El área de un paralelogramo es igual al producto de dos lados consecutivos por el seno del ángulo formado por esos lados.

El análisis anterior es suficiente para la demostración de este teorema.

En el caso del *rombo,* como es un paralelogramo con sus cuatro lados iguales, se tiene:

$A = a^2 \operatorname{sen} \alpha$ (a es la longitud de los lados y α cualquiera de los ángulos interiores)

Recuerda que dos ángulos interiores consecutivos de un rombo son suplementarios y, por tanto, tienen igual seno.

Ejemplo 4.25

En la figura 4.50, *ABCD* es un paralelogramo en el cual *F* y *C* son los puntos medios de $\overline{CD}$ y $\overline{BE}$ respectivamente.

$\overline{AB} = \overline{BE} = 4{,}0$ cm y $\angle FCE = 135^\circ$.

Calcular el área del pentágono *ABEFD*.

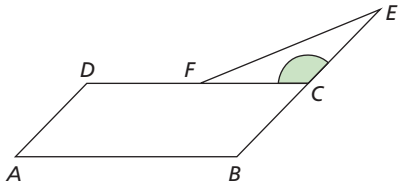


Fig. 4.50

Resolución:

Para hallar el área del pentágono *ABEFD*, hallamos en este caso, el área del paralelogramo *ABCD* y del triángulo *FCE*.

Según los datos se cumple:

$\overline{CE} = \overline{BC} = \dfrac{\overline{BE}}{2} = 2{,}0\,\text{cm}$, por ser *C* punto medio de $\overline{BE}$.

$\overline{DC} = \overline{AB} = 4{,}0\,\text{cm}$, por ser lados opuestos en el paralelogramo *ABCD*.

$\overline{FC} = \dfrac{\overline{DC}}{2} = 2{,}0\,\text{cm}$, por ser *F* punto medio de $\overline{CD}$.

$\overline{AB} \,||\, \overline{DC}$, por ser lados opuestos del paralelogramo *ABCD*.

$\angle ABC = \angle FCE = 135^\circ$, por ser ángulos correspondientes entre $\overline{AB} \,||\, \overline{DC}$ y $\overline{BE}$ secante.

$$A_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \operatorname{sen} \angle ABC = 4{,}0\,\text{cm} \cdot 2{,}0\,\text{cm} \cdot \operatorname{sen} 135^\circ$$

$$= 8{,}0\,\text{cm}^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}\,\text{cm}^2$$

$$A_{\Delta FCE} = \frac{1}{2}\overline{FC} \cdot \overline{CE} \cdot \operatorname{sen} \angle FCE = \frac{1}{2} \cdot 2{,}0\,\text{cm} \cdot 2{,}0\,\text{cm} \cdot \operatorname{sen} 135^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{cm}^2 = \sqrt{2}\ \text{cm}^2$$

$$A_{ABEFD} = A_{ABCD} + A_{\Delta FCE} = 4\sqrt{2}\,\text{cm}^2 + \sqrt{2}\,\text{cm}^2 = 5\sqrt{2}\ \text{cm}^2 \approx 5 \cdot 1{,}41\,\text{cm}^2 \approx 7{,}05\,\text{cm}^2$$

$A_{ABEFD} \approx 7{,}1\,\text{cm}^2$ ♦

Ley de los senos y Ley de los cosenos

En el trabajo con el triángulo rectángulo hemos analizado teoremas y relaciones que nos permiten determinar todos sus elementos, a partir de otros conocidos previamente.

Ya conoces que cualquier triángulo puede ser inscribible en una circunferencia y en el caso del triángulo rectángulo, es muy simple trazar la circunferencia circunscrita, porque el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa.

Recuerda que...

El ángulo inscrito sobre una semicircunferencia es recto (Teorema de Tales).

Luego, el triángulo *ACB,* en el que $\overline{AB}$ es el diámetro y *C* es un punto de la circunferencia diferente de *A* y *B*, es rectángulo en *C* (figura 4.51).

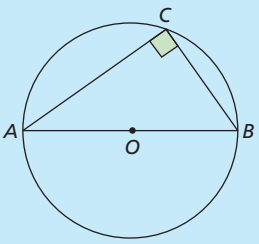


Fig. 4.51

Reflexiona

¿Cómo poder determinar la circunferencia circunscrita en el caso en que el triángulo no sea rectángulo?

Tomando como base la figura 4.52 a), que muestra un triángulo acutángulo *ABC* inscrito en una circunferencia de centro *O*, se obtiene la figura 4.52 b) de la siguiente manera:

Se traza el diámetro $\overline{CD}$ y las cuerdas $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$. De esta manera quedan determinados los ángulos $\angle ADC = \varphi$ y $\angle CDB = \theta$ y los triángulos *CAD* y *DBC* rectángulos en *A* y *B*, respectivamente.

En el triángulo *DBC* tenemos $\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{\overline{CD}}$, de donde $\overline{CD} = \frac{a}{\operatorname{sen}\theta}$. Pero $\theta = \alpha$ por ser ángulos inscritos sobre el mismo arco CB y $\overline{CD} = 2R$, donde *R* es el radio de la circunferencia circunscrita; entonces $2R = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$ (1).

a) b)

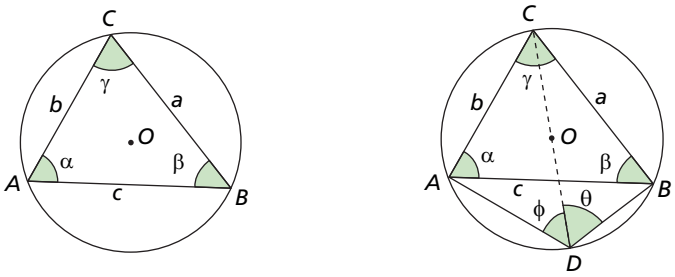


Fig. 4.52

Análogamente, realizando el mismo análisis en el triángulo *CAD* se obtiene $2R = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta}$ (2) y si se traza un diámetro en el que uno de los extremos sea *A* o *B*, se obtiene la relación $2R = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$ (3)

Ahora, de las igualdades (1), (2) y (3) se obtiene:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R \text{ (4).}$$

En el caso del triángulo obtusángulo con relación a los ángulos agudos obtendríamos los mismos resultados. Debemos analizar si sucede lo mismo con respecto al ángulo obtuso.

Sea la figura 4.53, donde el triángulo *CAB* es obtusángulo. En este caso al trazar el diámetro $\overline{CD}$, se obtiene el ΔCBD rectángulo en *B*, al trazar el diámetro $\overline{CD}$ y la cuerda $\overline{BD}$. De esta manera queda determinado el ángulo $\angle CDB = \theta$ y el triángulo *CBD* rectángulo en *B*, en el cual $\overline{CD} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\theta}$ (1).

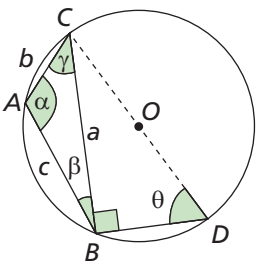


Fig. 4.53

Los ángulos α y θ están inscritos sobre arcos que suman 360°, por lo que $\alpha + \theta = 180^o$, luego $\theta = 180^o - \alpha$. De esta igualdad se obtiene $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(180^o - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$.

Ahora, sustituyendo $\overline{CD} = 2R$ y $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\alpha$ en (1), se tiene: $2R = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$.
Por tanto, la relación también se cumple para triángulos obtusángulos y es conocida como Ley de los senos.

Teorema 4.7 (Ley de los senos)

En todo triángulo, el cociente entre la longitud de un lado y el seno del ángulo opuesto a ese lado es constante e igual al duplo del radio de la circunferencia circunscrita.

En símbolos: $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$

La demostración de este teorema es el análisis realizado anteriormente.

Ejemplo 4.26

La figura 4.54 muestra un triángulo *ABC* inscrito en una circunferencia de centro en *O* y radio $r = \overline{AO}$.

Calcular los elementos que faltan en el ΔABC de acuerdo con los datos siguientes en cada caso.

a) $c = 3{,}2\,\text{cm}$; $\alpha = 45^o$ y $\beta = 60^o$

b) $a = 5{,}0\,\text{dm}$; $b = 7{,}0\,\text{dm}$ y $r = 6{,}0\,\text{dm}$

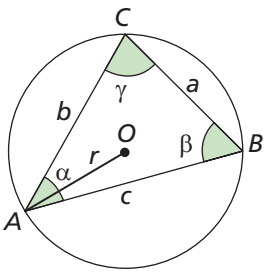


Fig. 4.54

Resolución:

a) Se debe calcular la amplitud del ángulo γ y la longitud de los lados *a* y *b*.

$\gamma = 180^o - (\alpha + \beta) = 180^o - 105^o$ (por suma de ángulos interiores en el triángulo *ABC*), entonces $\gamma = 75^o$.

$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$ y $\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$ (Ley de los senos en el triángulo *ABC*).

$$a = \frac{c \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{3{,}2\ \text{cm} \cdot \operatorname{sen}45^o}{\operatorname{sen}75^o} = \frac{3{,}2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{0{,}966}\,\text{cm}$$

$$a \approx \frac{3{,}2 \cdot 0{,}705}{0{,}966}\,\text{cm} \approx \frac{2{,}26}{0{,}966} \approx 2{,}3\,\text{cm}$$

$$b = \frac{c \cdot \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{3{,}2\,\text{cm} \cdot \operatorname{sen}60^o}{\operatorname{sen}75^o} = \frac{3{,}2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}966}\,\text{cm}$$

$$b \approx \frac{3{,}2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}966}\,\text{cm} \approx \frac{2{,}77}{0{,}966}\,\text{cm} \approx 2{,}9\,\text{cm}$$

b) Se deben calcular las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo *ABC* y la longitud del lado *c*.

$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = 2R$ y $\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = 2R$ (Ley de los senos en el triángulo *ABC*), entonces:

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2R} = \frac{5{,}0\ \text{dm}}{2 \cdot 6\ \text{dm}} = 0{,}4167$ y como esta ecuación tiene soluciones en los cuadrantes I y II, los valores de α pueden ser $\alpha_1 = 24{,}6^\circ$ o $\alpha_2 = 155{,}4^\circ$

$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{2R} = \frac{7{,}0\ \text{dm}}{2 \cdot 6\ \text{dm}} \approx 0{,}5833$, luego los valores de β pueden ser $\beta_1 = 35{,}7^\circ$ o $\beta_2 = 144{,}3^\circ$

Como $b > a$, entonces $\beta > \alpha$. En este caso las posibilidades son:

(1) $\beta = 35{,}7^\circ$; $\alpha = 24{,}6^\circ$ y $\gamma = 119{,}7^\circ$

(2) $\beta = 144{,}3^\circ$; $\alpha = 24{,}6^0$ y $\gamma = 11{,}1^\circ$

Luego, hay dos triángulos, ambos obtusángulos, que satisfacen las condiciones.

Debemos hallar ahora la longitud del lado *c* en ambos triángulos:

$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$, luego $c = 2R \cdot \operatorname{sen}\gamma$

$c_1 = 2 \cdot 6{,}0\,\text{dm} \cdot \operatorname{sen} 119{,}7^\circ = 12 \cdot 0{,}869\,\text{dm}$

$c_1 \approx 10\,\text{dm}$

$c_2 = 2 \cdot 6{,}0\,\text{dm} \cdot \operatorname{sen} 11{,}1^\circ = 12 \cdot 0{,}193\,\text{dm}$

$c_2 \approx 2{,}3\,\text{dm}$ ♦

Ejemplo 4.27

Calcular los elementos que faltan en el triángulo *ABC* (figura 4.55), de acuerdo con los datos en cada caso.

a) $b = 4{,}6\ \text{m}$; $c = 6{,}3\ \text{m}$; $\gamma = 30^\circ$

b) $b = 4{,}8\ \text{dm}$; $c = 6{,}3\ \text{dm}$; $\beta = 40^\circ$

c) $a = 20\,\text{cm}$: $c = 60\ \text{cm}$; $\alpha = 30^\circ$

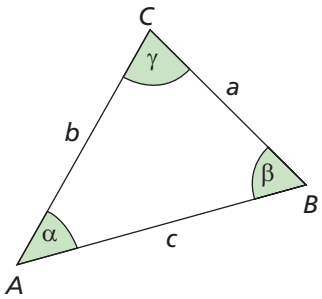


Fig. 4.55

Resolución:

a) Debemos hallar la longitud del lado *a* y las amplitudes de los ángulos α y β.

Como se observa en la figura 4.55 γ es el ángulo opuesto al lado *c* y β el ángulo opuesto al lado *b*, luego por la Ley de los senos podemos plantear:

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \text{ entonces: } \operatorname{sen}\beta = \frac{b \cdot \operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{4{,}6\text{m} \cdot \operatorname{sen}30^\circ}{6{,}3\text{m}}$$

$\operatorname{sen}\beta = \dfrac{4{,}6\text{ m} \cdot 0{,}5}{6{,}3\text{ m}} = 0{,}3651$, de donde $\beta_1 = 21{,}4°$ y $\beta_2 = 180° - 21{,}4° =$
$= 158{,}6°$, pero $c > b$ por lo que $\gamma > \beta$, y esto se cumple solo para $\beta = 21{,}4°$

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 51{,}4° = 128{,}6°$

$$a = \frac{c \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{6{,}3\text{ m} \cdot \operatorname{sen}128{,}6°}{\operatorname{sen}30°} = \frac{6{,}3\text{m} \cdot \operatorname{sen}51{,}4°}{\operatorname{sen}30°} = \frac{6{,}3\text{m} \cdot 0{,}782}{0{,}5}$$

$$\approx \frac{4{,}93}{0{,}5}\text{m} = 9{,}86\text{m};\ a \approx 9{,}9\text{ m}$$

b) Debemos hallar la longitud del lado *a* y las amplitudes de los ángulos α y γ.

Al tener como dato dos lados y el ángulo que se opone a uno de ellos se puede plantear la Ley de los senos para calcular el ángulo que se opone al otro lado conocido.

$\dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta}$, entonces: $\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{c \cdot \operatorname{sen}\beta}{b} = \dfrac{6{,}3\text{dm} \cdot \operatorname{sen}40°}{4{,}8\text{dm}}$

$\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{6{,}3\text{ dm} \cdot 0{,}643}{4{,}8\text{dm}} \approx \dfrac{4{,}05}{4{,}8} \approx 0{,}8438$, de donde $\gamma_1 = 57{,}5°$ y $\gamma_2 = 180° - 57{,}5° = 122{,}5°$ y como $c > b$ ambos valores de γ son posibles, entonces:

$\alpha_1 = 180° - (40° + 57{,}5°) = 82{,}5°$

$\alpha_2 = 180° - (40° + 122{,}5°) = 17{,}5°$

Debemos hallar ahora la longitud del lado *a* en ambos triángulos:

$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta}$ (Ley de los senos en el triángulo *ABC*), entonces:

$$a = \frac{b \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{4{,}8\text{dm} \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}40°} = \frac{4{,}8\text{dm} \cdot \operatorname{sen}\alpha}{0{,}643} = 7{,}47\text{dm} \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$a_1 = 7{,}47\text{dm} \cdot \operatorname{sen}82{,}5° = 7{,}47 \cdot 0{,}991\text{dm} \approx 7{,}4\text{dm}$

$a_2 = 7{,}47\text{dm} \cdot \operatorname{sen}17{,}5° = 7{,}47 \cdot 0{,}301\text{ dm} \approx 2{,}2\text{ dm}$

c) Debemos hallar la longitud del lado *b* y las amplitudes de los ángulos γ y β.

$\dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$ (Ley de los senos en el triángulo *ABC*),

entonces: $\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{c \cdot \operatorname{sen}\alpha}{a} = \dfrac{60\text{cm} \cdot \operatorname{sen}30°}{20\text{cm}} = \dfrac{3}{2} > 1$, lo cual es imposible; por tanto, no hay ningún triángulo que cumpla con las condiciones iníciales ♦

Observa la disposición de los datos de los incisos a, en los ejemplos 4.26 a) y 4.27 a), como se muestran en la figura 4.56.

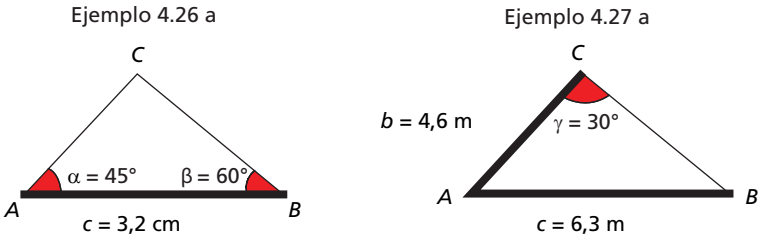


Fig. 4.56

En el ejemplo 4.26 a) se conoce un lado y los ángulos adyacentes a ese lado y en el del ejemplo 4.27 a) se conocen dos lados y el ángulo que se opone al mayor de los lados. En ambos casos la solución es única, no sucede así en los incisos b) y c) del ejemplo 4.27 donde se conocen dos lados y el ángulo opuesto al menor de ellos.

En casos como en el inciso b) existen dos soluciones y como en el inciso c) ninguna. ¿Por qué sucede esto?

Al analizar la expresión sen $\gamma = \dfrac{c \cdot \operatorname{sen}\beta}{b}$ verás que:

- Si $c \cdot \operatorname{sen}\beta > b$ entonces sen $\gamma > 1$ por lo que no existe ningún ángulo que cumpla esa condición por tanto no existe un triángulo con las condiciones dadas.
- Si $c \cdot \operatorname{sen}\beta < b$ entonces $0 <$ sen $\gamma < 1$ luego existen soluciones en el IC y IIC, entonces existen dos soluciones por lo que existen dos triángulos que cumplen las condiciones iniciales.

Los triángulos están determinados de forma única si se conocen:

- un lado y los ángulos adyacentes a ese lado (ejemplo 4.24 a), o
- dos lados y el ángulo comprendido, o
- los tres lados.

En el ejemplo 4.25 a) se dan dos lados y el ángulo que se opone al mayor de ellos. Este es un caso que también garantiza la unicidad y existencia de la solución.

Teorema 4.8

Un triángulo está determinado unívocamente si se conocen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Demostración:

Según la hipótesis de este teorema, conocemos dos lados y el ángulo opuesto al mayor de los dos y debemos demostrar que bajo estas condiciones se determina un único triángulo.

Sea el triángulo *ABC* donde conocemos dos lados, *a* y *b* con $a > b$, y el ángulo α opuesto al lado *a*, figura 4.57. Para que el triángulo esté determinado de forma única es suficiente que el ángulo β exista y sea único, ya que obtendríamos unívocamente determinado al ángulo γ, pues:

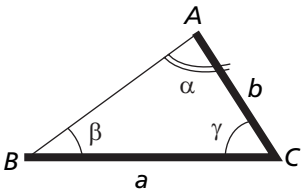


Fig. 4.57

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ y se conocerían entonces dos lados y el ángulo comprendido, caso este ya estudiado.

Calculemos utilizando la Ley de los senos el ángulo β.

$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$; luego, $\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a} \cdot \operatorname{sen}\alpha$ (I) y como $\frac{b}{a} \cdot \operatorname{sen}\alpha < \operatorname{sen}\alpha < 1$ porque $\frac{b}{a} < 1$ (por ser $a > b$) entonces existen dos ángulos β ($0° < \beta < 180°$) que cumplen con la igualdad (I), pero $b < a$ por lo que $\beta < \alpha$ (en todo triángulo a mayor lado se opone el mayor ángulo) y, por tanto, $\beta \leq 90°$, ya que en un triángulo, a lo sumo, hay un ángulo obtuso.

De esta forma resulta que existe un único ángulo β, esto significa que el triángulo *ABC* existe y es único.

Del teorema 4.8 podemos concluir que *dos triángulos son iguales si tienen dos lados respectivamente iguales e igual el ángulo que se opone al mayor de estos lados*. Esto resulta un nuevo criterio de igualdad de triángulos:

Teorema 4.9

Dos triángulos que tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos, son iguales.

Con lo estudiado hasta el momento en la resolución de triángulos no rectángulos, hemos podido resolver aquellos en que se conoce un lado y los ángulos adyacentes a ese lado, dos lados y el ángulo opuesto al mayor de esos lados, donde se obtienen soluciones únicas; y dos lados y el ángulo

opuesto al menor de los lados, donde se pueden dar los casos de no tener solución o la solución son dos triángulos.

Reflexiona

¿Cómo resolver un triángulo si conocemos dos lados y el ángulo comprendido, o los tres lados?

El Teorema de Pitágoras relaciona los tres lados de un triángulo rectángulo y el siguiente teorema establece relaciones entre las longitudes de los lados y el ángulo que se opone a uno de esos lados en un triángulo cualquiera.

Teorema 4.10 (Ley de los cosenos)

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble del producto de las longitudes de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman.
Simbólicamente:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

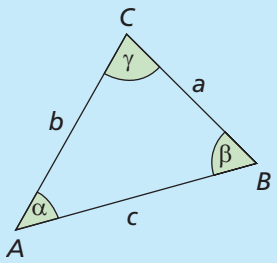


Fig. 4.58

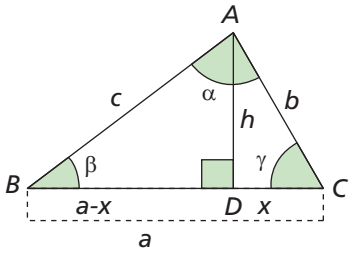
Demostración:

Sea ABC un triángulo cualquiera, el cual descomponemos en dos triángulos rectángulos en D, ADC y ADB, trazando la altura $h = \overline{AD}$ relativa al lado $\overline{BC}$ (figura 4.59).

a) El ΔABC es acutángulo

b) El ΔABC es obtusángulo

a)



b)

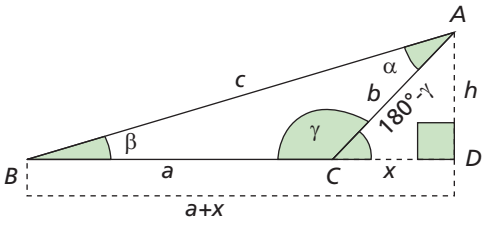


Fig. 4.59

En el ΔADB rectángulo en D (figura 4.59 a), tenemos:

$c^2 = (a - x)^2 + h^2$ (T. de Pitágoras)

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2$ (1)

En el ΔADC rectángulo en D se tiene:

$x = b\cos\gamma$ y $b^2 = x^2 + h^2$

Ahora, sustituyendo estas igualdades en (1) obtenemos:

$c^2 = a^2 - 2ab \cdot \cos\gamma + b^2$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

En el ΔADB rectángulo en D (figura 4.59 b), tenemos:

$c^2 = (a + x)^2 + h^2$ (T. de Pitágoras)

$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + h^2$ (1)

En el ΔADC rectángulo en D se tiene:

$x = b\cos(180° - \gamma) = -b\cos\gamma$ y $b^2 = x^2 + h^2$

Ahora, sustituyendo estas igualdades en (1) obtenemos:

$c^2 = a^2 + 2a(-b\cos\gamma) + b^2$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$

Si trazamos las alturas relativas a los otros dos lados, en ambos triángulos, obtenemos las otras dos relaciones, en este caso:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$

Si despejamos el coseno del ángulo en estas igualdades, podemos hallar la amplitud de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera, del cual se conocen los tres lados.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\ ;\ \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};\ \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Ejemplo 4.28

En el ΔABC (figura 4.60) se conoce que $\angle CAB = \alpha = 60°$, $\overline{AC} = b = 12\text{cm}$ y $\overline{AB} = c = 10\text{cm}$.

Hallar la longitud del lado $\overline{BC} = a$.

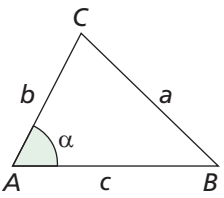


Fig. 4.60

Resolución:

La figura 4.61 muestra los datos, en este caso la longitud de dos lados y la amplitud del ángulo

comprendido entre ellos; por tanto, podemos hallar el tercer lado mediante la Ley de los cosenos.

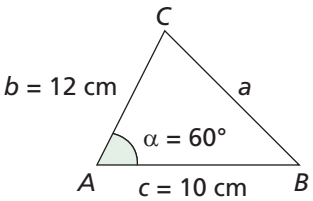


Fig. 4.61

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$a^2 = 12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ =$$

$$= 144 + 100 - 240 \cdot 0{,}5 = 124$$

$$a \approx 11\,\text{cm}$$ ♦

Ejemplo 4.29

Dos poblaciones se encuentran a 5,8 km y 7,5 km respectivamente de una estación de bombeo de agua. El ángulo que determinan ambas poblaciones vistas desde la estación de bombeo es de 60°. Hay que construir una tubería de conducción lo más corta posible desde la estación de bombeo a una carretera rectilínea que une ambas ciudades. Hallar la longitud de dicha tubería.

Resolución:

Los dos pueblos (*A* y *C*) y la estación de bombeo (*B*) determinan el triángulo *ABC*. Luego: $\overline{AB} = c = 5{,}8\,\text{km}$; $\overline{BC} = a = 7{,}5\,\text{km}$ y $\angle ABC = \beta = 60^\circ$ (figura 4.62).

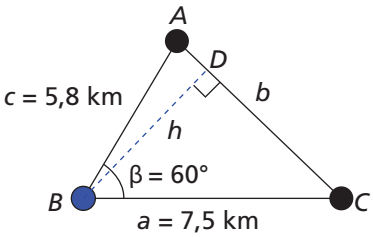


Fig. 4.62

La menor distancia de la estación de bombeo a la carretera $\overline{AC}$, que une los pueblos, es la perpendicular trazada desde *B* hasta $\overline{AC}$ (distancia de un punto a una recta), la cual representa la altura $h = \overline{BD}$ relativa al lado $\overline{AC}$ del triángulo *ABC* y es un cateto de los triángulos rectángulos *ADB* y *BDC*. Si se conoce un ángulo agudo en cualquiera de estos triángulos se puede calcular $h = \overline{BD}$ aplicando las razones trigonométricas.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos 60^\circ$ (Ley de los cosenos en el triángulo *ABC*)

$$b^2 = 7{,}5^2 + 5{,}8^2 - 2 \cdot 7{,}5 \cdot 5{,}8 \cdot 0{,}5 = 56{,}25 + 33{,}64 - 43{,}5 = 46{,}39$$

$$b = \sqrt{46{,}39}\,\text{km} \approx 6{,}81\,\text{km}$$

Sea $\angle BAC = \alpha$, entonces $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ (Ley de los cosenos en el triángulo *ABC*)

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{46{,}39 + 33{,}64 - 56{,}25}{2 \cdot 6{,}81 \cdot 5{,}8} = \frac{23{,}78}{79} \approx 0{,}3010;$$

luego, $\alpha = 72{,}5^\circ$

$\text{sen}\alpha = \dfrac{h}{c}$ (Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo *ADB*)

$h = c \cdot \text{sen}72{,}5^{o} = 5{,}8 \text{ km} \cdot 0{,}954 \approx 5{,}5 \text{ km}$

Respuesta: la longitud de la tubería es aproximadamente de 5,5 km. ♦

Observa en el ejemplo anterior para el cálculo de α o γ se podía también aplicar La Ley de los senos, ya que se conocen los tres lados. ¡Compruébalo!

La Ley de los senos y la de los cosenos no solo se utilizan para resolver triángulos y en situaciones de la vida práctica, como vimos en el ejemplo anterior, sino también en la demostración de propiedades en las figuras planas.

Ejemplo 4.30

Demostrar que la longitud de la mediana relativa al lado *c* de un triángulo *ABC* en función de sus lados es: $m_c = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - \dfrac{c^2}{2}\right)}$.

Demostración:

Sea el triángulo *ABC* y $m_c = \overline{CM}$ la mediana relativa al lado $\overline{AB}$ (figura 4.63).

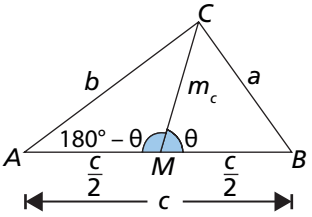


Fig. 4.63

$$b^2 = (m_c)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \cdot m_c \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos(180^{o} - \theta)$$

(Ley de los cosenos en el triángulo *AMC*), pero $\cos(180^{o} - \theta) = -\cos\theta$, entonces

$$b^2 = (m_c)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2m_c \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos\theta \quad (1)$$

$$a^2 = (m_c)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2m_c \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos\theta \quad (2)$$ (Ley de los cosenos en el triángulo *CMB*)

Ahora, si adicionamos miembro a miembro las igualdades (1) y (2), obtenemos:

$$a^2 + b^2 = 2(m_c)^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2;\ a^2 + b^2 = 2(m_c)^2 + \frac{c^2}{2};\ (m_c)^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right)$$

Ahora despejando m_c, obtenemos $m_c = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - \dfrac{c^2}{2}\right)}$, que es lo que queríamos demostrar. ♦

Analiza la relación anterior y expresa cómo quedaría la longitud de la mediana relativa a los lados *a* y *b*.

Ejemplo 4.31

Demostrar que en todo triángulo, la bisectriz de cualquiera de sus ángulos interiores divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.

Demostración:

En el triángulo *ABC*, sea $\overline{CD}$ la bisectriz del ángulo interior γ, $\overline{AD} = x$ y $\overline{DB} = y$.

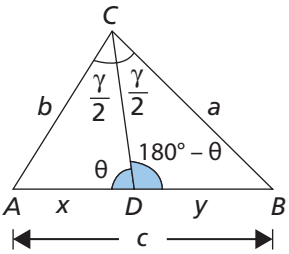


Fig. 4.64

Debemos demostrar que $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$; $\frac{x}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\theta}$

(1) (Ley de los senos en el triángulo *ADC*)

$\frac{y}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{\operatorname{sen}(180^0 - \theta)}$ (Ley de los senos en el triángulo *CDB*), pero $\operatorname{sen}(180^\circ - \theta) = \operatorname{sen}\theta$, entonces $\frac{y}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{\operatorname{sen}\theta}$ (2)

Ahora, dividiendo miembro a miembro las proporciones (1) y (2), se obtiene $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$, que es lo que queríamos demostrar. ♦

Saber más

También existe otro teorema que relaciona lados de un triángulo cualquiera con los ángulos interiores. En este caso se trata de la **Ley de las Tangentes**, que expresa:

"En todo triángulo la suma de dos lados cualesquiera es a su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es a la tangente de su semidiferencia.

Simbólicamente: En todo ΔABC se cumple: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$, donde *a* y *b* son dos lados del triángulo y α y β los ángulos opuestos a estos lados, respectivamente.

La demostración de esta ley resulta más compleja que las realizadas anteriormente, pero si amplías tus conocimientos en la Trigonometría podrás realizarla.

Polígonos regulares

En epígrafes anteriores hemos utilizado la trigonometría no solo para resolver triángulos, también para determinar el área de algunas figuras planas y para determinar propiedades y relaciones en las figuras planas.

Recuerda que...

Polígono: es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada que incluye a esta poligonal.
Polígono convexo: es el polígono que al trazar la recta que contiene cualquiera de sus lados, queda totalmente contenido en uno de los semiplanos determinados por esta recta.
Polígono regular: es el polígono convexo que tiene todos sus lados iguales y también iguales sus ángulos interiores. Los polígonos regulares se dicen que son equiláteros y equiángulos.

Los polígonos regulares son inscribibles en una circunferencia y pueden ser descompuestos en n triángulos isósceles iguales, siendo n la cantidad de lados del polígono. Esto facilita su cálculo, pues se reduce a resolver uno de estos triángulos isósceles con la aplicación de la trigonometría.

Elementos de un polígono regular

n: número de lados del polígono (que también es el número de vértices y, por tanto, el número de ángulos interiores)
l: longitud de los lados
R: radio de la circunferencia circunscrita
a: apotema (es el segmento de perpendicular trazado desde el centro del polígono a un lado, es el radio de la circunferencia inscrita, que coincide con la altura de cualquiera de los n triángulos isósceles en que se descompone el polígono)

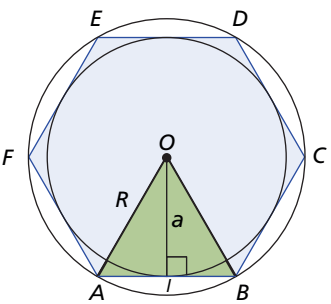


Fig. 4.65

Ejemplo 4.32

El radio de la circunferencia circunscrita a un octógono regular es $R = 5{,}0$ cm. Hallar la longitud del lado y la de la apotema del polígono.

Resolución:

La figura 4.66 muestra un octógono regular ($n = 8$) y uno de los triángulos isósceles que se determina con el centro O y dos vértices consecutivos del polígono (A y B). Como todos estos triángulos isósceles son iguales, entonces:

$$\angle AOB = \frac{360^o}{n} = \frac{360^o}{8} = 45^o$$

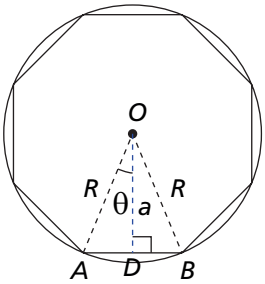


Fig. 4.66

La apotema $a = \overline{OD}$ coincide con la altura de la base del triángulo isósceles, por lo que es también mediatriz del lado $l = \overline{AB}$ y bisectriz y del ángulo AOB. Luego:

$$\theta = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{45^o}{2} = 22{,}5^o$$

Ahora, aplicando razones trigonométricas en el triángulo ADO, rectángulo en D, tenemos:

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\frac{l}{2}}{R}$ y $\cos\theta = \dfrac{a}{R}$; entonces:

$$l = 2R \cdot \operatorname{sen}\theta = 2 \cdot 5{,}0\,\text{cm} \cdot \operatorname{sen} 22{,}5^o \approx 10 \cdot 0{,}383\,\text{cm} = 3{,}83\,\text{cm} \approx 3{,}8\,\text{cm}$$

$$a = R \cdot \cos\theta = 5{,}0\,\text{cm} \cdot \cos 22{,}5^o \approx 5 \cdot 0{,}924\,\text{cm} = 4{,}62\,\text{cm} \approx 4{,}6\ \text{cm}$$

Reflexiona

¿Cómo se puede hallar el área del polígono del ejemplo anterior?

Seguramente, mediante tu reflexión, llegaste a una idea como la siguiente:

Un polígono regular de n lados se puede descomponer totalmente en n triángulos isósceles iguales; entonces su área es n veces el área de uno de estos triángulos. De esta forma, el área del octógono del ejemplo 4.66 es:

$$A = 8 \cdot A_{\Delta AOB} = 8 \cdot \frac{l \cdot a}{2} = 4\,la = 4 \cdot 3{,}8\,\text{cm} \cdot 4{,}6\,\text{cm} = 69{,}92\,\text{cm}^2 \approx 70\,\text{cm}^2$$

Observa en el cálculo anterior que al multiplicar $8 \cdot \frac{1}{2} \cdot l$, donde $8l$ es el perímetro del octógono al adicionar la longitud de todos sus lados iguales y al multiplicar por un medio, obtendrías el semiperímetro. ♦

Teorema 4.11 (Área de un polígono regular)

El área de un polígono regular es $A = p \cdot a$, donde p es el semiperímetro y a la longitud de su apotema.

Demostración:

En un polígono regular de n lados se tiene:

$A_{\Delta} = \frac{l \cdot a}{2}$ (área de uno de los triángulos isósceles en que se descompone el polígono)

Perímetro del polígono: $P = n \cdot l$;

Semiperímetro del polígono: $p = \frac{P}{2} = \frac{n \cdot l}{2}$

Área del polígono: $A = n \cdot \frac{l \cdot a}{2} = \frac{n \cdot l}{2} \cdot a = \frac{P}{2} \cdot a = p \cdot a$ ♦

Ejemplo 4.33

Una pieza plana de bronce está compuesta por dos hexágonos regulares concéntricos de 4,0 cm y 2,0 cm de lado respectivamente, y está perforada por un círculo inscrito en el hexágono de 2,0 cm de lado.

a) ¿Cuántas piezas sin perforar se pueden hacer con una plancha de bronce de 1,0 m^2 de superficie?

b) Determina la cantidad de material que se reciclará para obtener más piezas.

La figura 4.67 muestra una representación de la pieza, en la que O es el centro de la circunferencia y de los hexágonos:

ΔAOB (es un triángulo isósceles del hexágono mayor)

ΔCOD (es un triángulo isósceles del hexágono menor)

Luego, $\overline{OP}$ y $\overline{OM}$ son las apotemas de estos polígonos, respectivamente.

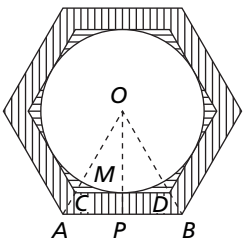


Fig 4.67

Resolución:

a) Para hallar la cantidad de piezas sin perforar que se pueden hacer con 1,0 m² es necesario conocer el área del hexágono mayor.

$\angle AOB = \angle COD = \frac{360^0}{6} = 60^o$, entonces $\angle AOP = \angle COM = 30^o$, porque la apotema es la altura relativa a la base de los triángulos isósceles y además bisectriz de los ángulos *AOB* y *COD*.

De esta forma:

$\overline{OP} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$ (Por *ser* ΔAPO rectángulo en N con un ángulo de 30º)

Luego $a = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$

Área del hexágono mayor:

$$A_E = p \cdot a = \frac{6 \cdot 4{,}0\,\text{cm}}{2} \cdot 2\sqrt{3}\ \text{cm}^2 = 24\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \approx 41{,}5\,\text{cm}^2$$

$1\,\text{m}^2 = 10\,000\,\text{cm}^2$ y $10\,000 : 41{,}5 \approx 240{,}96$;

Respuesta: Se podrán hacer 240 piezas sin perforar.

b) Para saber cuánto material se reciclará, debemos conocer primeramente el área que ocupan las 240 piezas perforadas.

Área A_C del círculo inscrito en el hexágono menor:

$r = a' = \overline{OM} = \overline{CM} \cdot \sqrt{3} = 1{,}0\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}\,\text{cm}$,

luego: $A_C = \pi \cdot r^2 \approx 3.14 \cdot 3{,}0\ \text{cm}^2 = 9{,}42\,\text{cm}^2$

Área A_T de la pieza perforada:

$A_T = A_E - A_C = 41{,}5\,\text{cm}^2 - 9{,}42\,\text{cm}^2 \approx 32{,}1\,\text{cm}^2$

Cantidad de material que se puede reciclar:

$10\,000\,\text{cm}^2 - 240 \cdot 32{,}1\,\text{cm}^2 = 2296\ \text{cm}^2 \approx 0{,}23\ \text{m}^2$

Respuesta: se podrán reciclar aproximadamente 0,23 m² de material. ♦

Ejemplo 4.34

Determinar en función del radio de la circunferencia circunscrita la longitud *l* del lado de un polígono regular de:

a) tres lados b) seis lados c) *n* lados.

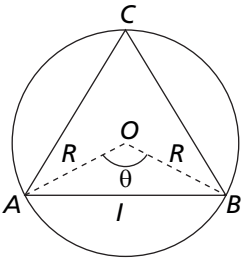


Fig. 4.68

Resolución:

a) El polígono regular de tres lados es el triángulo equilátero.

La figura 4.68 muestra un triángulo equilátero *ABC* inscrito en una circunferencia de radio *R*.

AOB es uno de los triángulos isósceles (que tiene como base el lado del polígono) en que se descompone polígono, luego:

$\theta = \frac{360^0}{3} = 120^o$

$l^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos\theta$ (Ley de los cosenos en el triángulo *AOB*)

$l^2 = 2R^2 - 2 \cdot R^2 \cos\theta$ (reduciendo términos semejantes)

$l^2 = 2R^2(1 - \cos\theta)$ (extrayendo factor común)

$l^2 = 2R^2(1 - \cos 120^o)$ (sustituyendo)

$l^2 = 2R^2(1 + \cos 60^o)$ (aplicando fórmula de reducción)

$l^2 = 2R^2\left(1 + \frac{1}{2}\right)$ (sustituyendo por el valor del cos 60°)

$l^2 = 2R^2\left(\frac{3}{2}\right)$ (efectuando)

$l^2 = 3R^2$

$l = \sqrt{3}R$ ♦

b) El polígono regular de 6 lados es el hexágono regular y siguiendo el procedimiento anterior tenemos:

$\theta = \frac{360^0}{6} = 60^o$

Como el ángulo principal de los triángulos isósceles en que se divide el hexágono regular es de 60°, entonces estos triángulos son equiláteros por tanto los lados (l) del hexágono son iguales al radio (R) de la circunferencia circunscrita, es decir $l = R$.

Esta conclusión se corrobora aplicando el procedimiento utilizado en el inciso anterior.

c) Para un polígono de n lados, se tiene:

$\theta = \frac{360^o}{n}$, luego:

$l^2 = R^2 + R^2 + 2R^2\cos\frac{360^o}{n} = 2R^2 + 2R^2\cos\frac{360^o}{n} = 2R^2\left(1 - \cos\frac{360^o}{n}\right)$; por tanto, $l = R\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{360^o}{n}\right)}$. ♦

Aplica tus conocimientos

Hallar la longitud del lado de un polígono regular, en función del radio de la circunferencia circunscrita. Comprueba los resultados obtenidos para $n = 3;4;5;6$.

Aplicaciones de la trigonometría al cálculo de cuerpos

Muchos problemas el cálculo de cuerpos geométricos se facilitan con el uso de la trigonometría, pero también debes utilizar algunas fórmulas que ya trabajaste en grados anteriores:

Cuerpo	Volumen	Áreas*
Prisma	$V = A_B \cdot h$	$A_L = P_B \cdot h$ $A_T = A_L + 2A_B$
Cilindro	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$	$A_L = 2\pi rh$ $A_T = A_L + 2A_B = 2\pi r(h + r)$
Pirámide	$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h$	$A_L = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$ (suma de las áreas de los triángulos que forman las caras de la pirámide) $A_T = A_L + A_B$
Cono	$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$	$A_L = \pi rg$ $A_T = A_L + A_B = \pi r(g + r)$
Esfera	$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$	$A = 4\pi r^2$

* A_B *:* área de la base*;*
A_L *:* área lateral*;*
A_T *:* área total*;*
P_B *:* perímetro de la base

Ejemplo 4.35

Hallar el volumen del prisma recto de base triangular (figura 4.69) del cual se conoce que $\overline{AB} = 4{,}0\,\text{cm}$; $\overline{AC} = 3{,}0\,\text{cm}$; $\overline{CF} = 5{,}0\,\text{cm}$ y $\alpha = 30^o$.

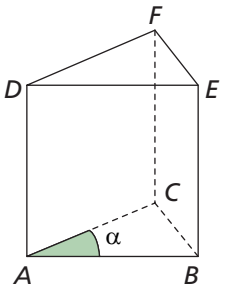


Fig. 4.69

Resolución:

Para calcular el volumen de un prisma debemos hallar el área de la base ($A_{\Delta ABC}$) y la altura ($h = \overline{CF}$). En este caso conocemos la altura y tenemos dos lados y el ángulo comprendido entre esos lados. Luego:

Área de la base:

$$A_B = A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \text{sen } 30^o = \frac{1}{2} \cdot 4{,}0\,\text{cm} \cdot 3{,}0\ \text{cm} \cdot \text{sen}30^\circ = 3{,}0\,\text{cm}^2$$

Volumen del prisma: $V = A_B \cdot h = A_{\Delta ABC} \cdot \overline{CF} = 3{,}0\ \text{cm}^2 \cdot 5{,}0\,\text{cm} = 15\,\text{cm}^3$ ♦

Ejemplo 4.36

La figura 4.70 muestra la sección transversal diametral de un tanque para agua que tiene forma de semiesfera y se le ha colocado una tapa en forma de cono circular recto cuya generatriz $\overline{AB}$ mide 2,5 m y forma un ángulo $\theta = 15^o$ con el plano que contiene al círculo de la base.

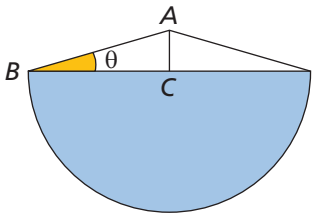


Fig. 4.70

a) Determinar la capacidad (en litros) que tiene el tanque.

b) ¿Cuántos metros cuadrados de zinc galvanizado son necesarios para construir el tanque con su tapa?

Resolución:

a) Para conocer la capacidad de este tanque debemos calcular su volumen y expresarlo en una medida de capacidad (1 dm^3 se llena completamente con 1L).

Volumen de la semiesfera: $V_{tanque} = V_{se} = \frac{V_e}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$ (1)

Los datos conocidos están referidos a la tapa cónica, pero la tapa y el tanque ajustan; por, tanto, podemos calcular el radio $r = \overline{BC}$.

Sean $h = \overline{AC}$ y $g = \overline{AB}$ la altura y la generatriz del cono, respectivamente; entonces podemos aplicar razones trigonométricas en el triángulo *BCA*, rectángulo en *C*.

$\cos\theta = \dfrac{r}{g}$, de donde:

$r = g \cdot \cos\theta = 2{,}5\text{m} \cdot \cos 15^o = 2{,}5\text{m} \cdot 0{,}966 \approx 2{,}42\text{m}$

Ahora, sustituyendo en (1), tenemos:

$$V_{tanque} = \frac{2}{3}\pi r^3 \approx \frac{2}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (2{,}42\text{m})^3 \approx 2{,}09 \cdot 14{,}2\text{m}^3 \approx 29{,}7\text{m}^3 = 29\,700\,\text{dm}^3$$

Respuesta: la capacidad del tanque es, aproximadamente, 29 700 L.

b) La cantidad de zinc galvanizado que se va a utilizar está vinculada al área total del tanque, que está compuesta por el área lateral del cono (A_{Lc}) y el área de la semiesfera (A_{Lse}).

$A_T = A_{Lc} + A_{Lse} = \pi rg + 2\pi r^2 = \pi r(g + 2r)$

$A_T \approx 3{,}14 \cdot 2{,}42(2{,}5 + 4{,}84)\text{m}^2 \approx 7{,}60 \cdot 7{,}34\ \text{m}^2 \approx 55{,}8\ \text{m}^2$

Respuesta: se necesitan, aproximadamente, 56 m² de zinc galvanizado. ♦

Ejemplo 4.37

La figura 4.71 muestra el diseño de un obelisco formado por un ortoedro de base rectangular, en cuya base superior se ha dispuesto una estructura metálica en forma de pirámide recta para colocar cristales.

a) Si $\overline{AB} = 4{,}0\text{m}$; $\overline{CG} = 2\overline{AC}$ y $\alpha = 36{,}9^o$, ¿cuántos metros cúbicos de concreto se necesitan para construir el ortoedro macizo?

b) ¿Qué amplitud debe tener el ángulo de inclinación de la arista $\overline{EJ}$ para que la altura de la pirámide sea dos quintos de la altura del ortoedro?

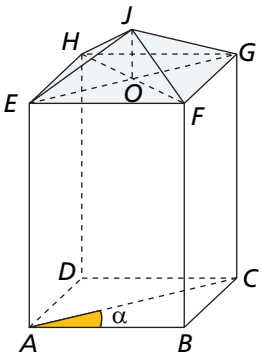


Fig. 4.71

Resolución:

a) Para conocer la cantidad necesaria de concreto debemos hallar el volumen del ortoedro.

$V = A_B \cdot h$ (1), donde $A_B = A_{ABCD}$ y $h = \overline{CG}$

$\tan\alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ y $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ (razones trigonométricas en el triángulo *ABC*, rectángulo en *B*)

$\overline{BC} = \overline{AB} \cdot \tan\alpha = 4{,}0\text{m} \cdot \tan 36{,}9^o \approx 4{,}0\ \text{m} \cdot 0{,}751 = 3{,}004\text{m} \approx 3{,}0\text{m}$

$\overline{AC} = \dfrac{\overline{AB}}{\cos\alpha} = \dfrac{4{,}0\,\text{cm}}{\cos 36{,}9^{\circ}} \approx \dfrac{4{,}0\,\text{cm}}{0{,}800} = 5{,}0\,\text{m}$, como:

$\overline{CG} = 2\overline{AC} = 2 \cdot 5\ \text{m} = 10\,\text{m}$

Ahora, sustituyendo en (1) calculamos el volumen del ortoedro:

$V = A_B \cdot h = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CG} = 4{,}0\,\text{m} \cdot 3{,}0\,\text{m} \cdot 10\ \text{m} = 120\,\text{m}^3$

Respuesta: se necesitan, aproximadamente, 120 m³ de concreto. ♦

b) Según las condiciones del problema, la altura $\overline{OJ}$ de la pirámide debe ser dos quintos de $\overline{CG}$. En este caso debemos hallar $\overline{OJ}$ y después, el ángulo *JEO* en el triángulo *EOJ*, rectángulo en *O*.

$\overline{OJ} = \dfrac{2}{5}\overline{CG} = \dfrac{2}{5} \cdot 10\,\text{m} = 4{,}0\,\text{m}$; luego, $\tan\angle JEO = \dfrac{\overline{OJ}}{\overline{EO}} = \dfrac{4{,}0\,\text{m}}{2{,}5\text{m}} = 1{,}6$,

entonces $\angle JEO \approx 58^{\circ}$

Respuesta: el ángulo de inclinación de la arista $\overline{EJ}$ debe ser de 58°.

Reflexiona sobre lo aprendido

- ¿Qué ventajas encuentras para el cálculo de las razones trigonométricas la existencia de un ángulo de 30° en un triángulo rectángulo?
- ¿Cuáles son las relaciones aprendidas para el cálculo de áreas de algunas figuras planas utilizando la trigonometría? Realiza un resumen de estas.
- Conoces las relaciones métricas en un triángulo rectángulo y de un triángulo no rectángulo, ¿qué relaciones métricas estudiaste?
- Di si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Fundamenta las falsas en tu cuaderno.
  a) En un triángulo *ACB* rectángulo en *C* se cumple que: $a^2 = b \cdot c$.
  b) En un triángulo no rectángulo se cumple que: $a^2 = b^2 + c^2 + b \cdot c \cdot \text{sen}\,\alpha$.
  c) El Teorema de Pitágoras es un caso particular de la Ley de los cosenos.
  d) En todo triángulo, el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo es igual a la razón entre la longitud de un lado y el seno del ángulo opuesto.
  e) En todo triángulo rectángulo de hipotenusa *c* y altura relativa a la hipotenusa *h*, se cumple que: $h = \dfrac{a \cdot b}{c}$.

Ejercicios del epígrafe 4.3

Resolución de triángulos rectángulos

1. En los triángulos rectángulos de la figura 4.72 halla la longitud del lado representado por *x* (el ángulo recto está señalado con una escuadra).

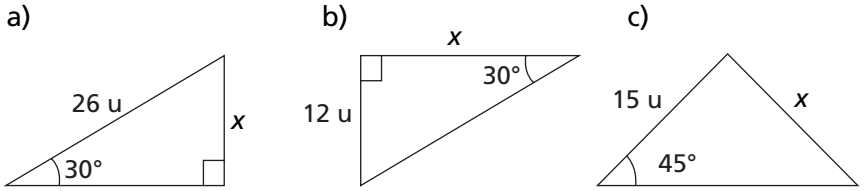


Fig. 4.72

2. En la figura 4.73 halla la medida en grados del ángulo representado por θ

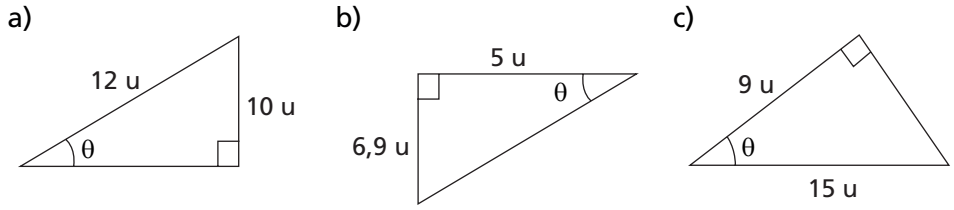


Fig. 4.73

3. Halla el valor de *x* en la figura 4.74 (el ángulo recto está señalado con una escuadra).

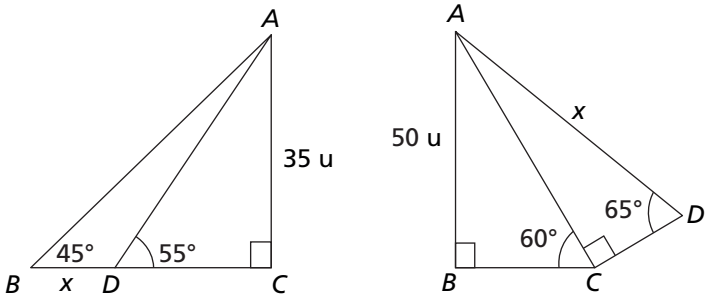


Fig. 4.74

4. Resuelve el triángulo *ABC* si $\beta = \angle ABC = 90^\circ$.

a) $\alpha = \angle CAB = 30^\circ$, $\overline{AC} = 11\,\text{u}$
b) $\gamma = \angle BCA = 42^\circ$, $\overline{AB} = 8{,}0\,\text{u}$

5. Una torre proyecta una sombra de 86,9 m de longitud cuando la altura del sol sobre el horizonte es 56,5°. ¿Cuál es la altura de la torre?

6. Un aviador desea hallar el ancho de la entrada de una bahía. Los controles del avión le indican que va volando a una altura de 500 m. Si se

encuentra directamente sobre un extremo de la entrada y el ángulo de depresión con que ve el otro extremo es de 37,9°, ¿cuál es el ancho de la entrada de la bahía?

7. La velocidad de una pelota que rueda hacia abajo por un plano inclinado (despreciando la resistencia y la fricción aéreas) está dada por $v = g \cdot t \cdot \operatorname{sen}\theta$, donde g es la constante gravitacional, t es el tiempo y θ es el ángulo de inclinación del plano. Una pelota que rueda hacia abajo por un plano inclinado demora 3,0 s en recorrerlo y alcanza una velocidad de 6,9 m/s, ¿qué longitud tiene el plano inclinado, si su punto más alto está a un metro del piso?

¿Sabías que...?

Galileo Galilei (1564-1642) usó esta ecuación en la forma $g = \dfrac{v}{t\operatorname{sen}\theta}$ para poder estimar g después de medir v experimentalmente. En aquel entonces no existía ningún artefacto de sincronización para medir la velocidad de un cuerpo en caída libre, así que Galileo usó un plano inclinado para retardar el movimiento hacia abajo.

8. En la figura 4.75 determina el radio r de la circunferencia menor para que sea tangente a la mayor de 5,0 cm de radio y a los lados del $\angle CAE = 60°$.

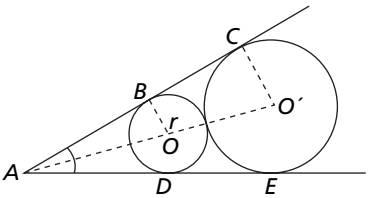


Fig. 4.75

Saber más

Si dos circunferencias son tangentes interiores o exteriores el punto de tangencia está alineado con los centros.

9. Un muchacho empinando un papalote ha soltado 135 m de hilo. El papalote se halla situado verticalmente sobre un punto que está a 75,0 m de distancia del muchacho. Admitiendo que el hilo no forma onda y sin tener en cuenta la altura del muchacho, ¿a qué altura se encuentra el papalote y cuál es el ángulo de elevación?

10. Un poste se dobló de forma tal que su extremo choca con el piso a 8,75 m de la base del poste formando un ángulo de 40,4° con el suelo. Halla la altura original del poste.

11. Dos mástiles tienen 18,0 m y 12,0 m de altura. ¿A qué distancia hay que situarlos para que la viga que une sus extremos superiores tenga una inclinación de 30° con la horizontal?

12. Una escalera eléctrica está construida de modo que eleva 60 cm por cada 50,7 cm de recorrido horizontal. ¿Qué ángulo de elevación tiene la escalera? ¿Cuál es la longitud que ocupa en la horizontal para subir 10 m?

13. A 15 m de la base de un edificio se observa en la azotea la parte superior de una antena de 2,0 m de altura, bajo un ángulo de 60°. Si se realiza la misma observación desde un punto más distante de la base del edificio bajo un ángulo de 30°, ¿cuál es la altura del edificio? ¿Qué distancia separa los puntos de observación si estos están alineados perpendicularmente con un punto de la base del edificio?

14. Desde una avioneta que vuela a una altura de 400 m se observa con un ángulo de depresión de otra avioneta que vuela a 200 m de altura. ¿A qué distancia se encuentran ambas avionetas?

15. Una de las márgenes de un río, de anchura desconocida, está constituida por un farallón. El ángulo de elevación de la cima del farallón, determinado por una alineación perpendicular a este desde un punto de la orilla opuesta es de 71,2°. Desde otro punto situado en la misma alineación pero a 695 m del anterior se observa la cima bajo un ángulo de 39, 6°. ¿Cuál es el ancho del río?

16. A cierta distancia de la base de un edificio de 10 m de altura se observa la parte superior de una antena de 2,0 m de alto bajo un ángulo de 60^0. Si se realiza la misma observación desde un punto más distante de la base del edificio bajo un ángulo de 30^0, ¿qué distancia separa los puntos de observación?

17. Desde un faro situado a 44,0 m sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión con que se observa un barco es de 83°. ¿A qué distancia del faro está situado el barco?

Cálculo de áreas utilizando la trigonometría

18. En la figura 4.76 los cuadriláteros *ABML*, *MEFG*, *MCDE* y *MHKL* son paralelogramos iguales. *M* es el punto medio de $\overline{LE}$; $\overline{LK} = 3{,}2$ cm ; $\overline{LE} = 3{,}6$ cm y $\angle HKL = 60^o$

Calcula el área de la figura.

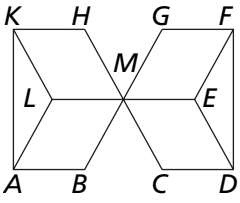


Fig. 4.76

19. En la figura 4.77 el cuadrilátero *ABCD* es un paralelogramo.

$\overline{CH} \perp \overline{CD}$; $\overline{GF} \perp \overline{BF}$ y $\overline{BH}$ es la bisectriz del $\angle CBF$.

A, *B* y *F* son puntos alineados

$\overline{CH} = \overline{CD} = 8{,}00$ cm; $\overline{BG} = \frac{3}{4}\overline{BH}$ y $\overline{BC} = \sqrt{3}\overline{CH}$.

Calcula el área del pentágono *ABHCD*.

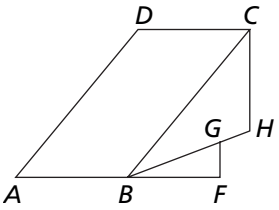


Fig. 4.77

20. El patio interior de un edificio tiene forma pentagonal y se puede descomponer en un paralelogramo y un triángulo obtusángulo como se muestra en la figura 4.78. Calcula el área del patio según los datos dados en la figura.

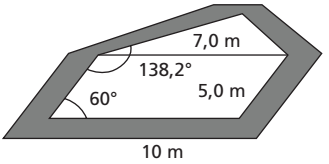


Fig. 4.78

21. Demuestra que en toda circunferencia la longitud de una cuerda es igual al producto de la longitud del diámetro por el seno de la mitad del ángulo central que la determina.

22. En la circunferencia de centro *O* y radio $\overline{OC} = 8{,}4$ cm de la figura 4.79, se tiene:

$\overline{AC}$ es un diámetro, $\overline{AB} = \frac{3}{4}\overline{AC}$, $\angle AOF = 55°$, *ABDF* es un paralelogramo y *F* es un punto de la circunferencia.

a) Calcula la longitud de $\overline{AF}$.

b) Calcula el área del paralelogramo *ABDF*.

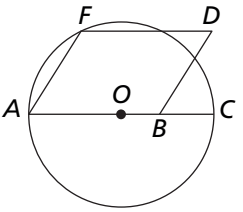


Fig. 4.79

23. Se llama segmento circular a la porción del círculo de radio *r* limitado por una cuerda y el arco que esta cuerda sostiene, figura 4.80. Demuestra que su área se obtiene por la fórmula:

$$A = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha°}{180°} - \operatorname{sen}\alpha°\right)$$

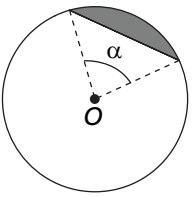


Fig. 4.80

24. En la circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{AB} = 60{,}0$ cm, el arco *BD* mide 110° (figura 4.81).

a) Calcula el área del paralelogramo *ABCD*.

b) Calcula el área sombreada.

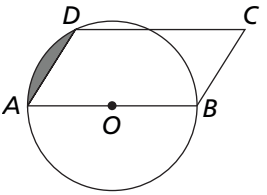


Fig. 4.81

25. En la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{BC} = 8{,}00$ cm (figura 4.82), se tiene:

$\angle AOE = 60^\circ$; $\overline{OF} \perp \overline{OE}$; $\overline{AE}$ es tangente a la circunferencia en E y $\overline{FD} = 7{,}72$ cm.

A, B, C, y D son puntos alineados.

a) Calcula el área del triángulo AED.

b) Calcula el área sombreada.

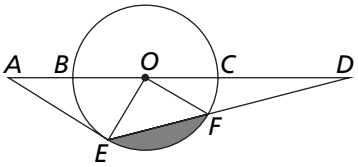


Fig. 4.82

Ley de los senos y Ley de los cosenos

26. Dado el ΔABC si:

a) $\overline{BC} = 35$u; $\overline{AC} = 22u$ y $\angle CAB = 45^\circ$. Halla la amplitud de $\angle ABC$.

b) $\angle CAB = 40^\circ$; $\overline{AC} = 37$u y $\gamma = 32^\circ$. Halla la longitud de $\overline{BC}$.

c) $\overline{AC} = 25$ u; $\overline{AB} = 50$u y $\angle ABC = 30^\circ$. Halla la longitud de $\overline{BC}$.

27. ¿Cuál es el diámetro de la circunferencia circunscrita a un triángulo isósceles cuya base mide 12,5 cm y su ángulo principal es de 20°?

28. Halla el ángulo más pequeño del triángulo cuyos lados miden 1,7 cm; 2,0 cm y 2,9 cm respectivamente.

29. Comprueba que no puede existir un triángulo ABC que satisfaga los siguientes datos $\angle CAB = 30^\circ$, $\overline{BC} = \overline{BC} = 3{,}0$ cm y $\overline{AC} = 8{,}0$ cm.

30. Demuestra con los datos dados en la figura 4.83, que de los dos triángulos que satisfacen esas condiciones uno es isósceles y el otro es rectángulo.

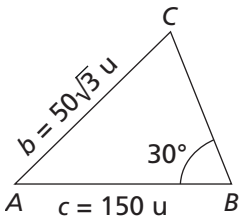


Fig. 4.83

31. Un barco B pide socorro, recibiéndose las señales en dos estaciones de radio A y C que distan entre sí 50 km. Desde cada estación se miden los ángulos BAC y BCA cuyas amplitudes son de 46° y 53° respectivamente. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

32. En un ΔABC se conoce que la amplitud del $\angle A$ es el duplo del $\angle C$, la longitud del lado $\overline{BC}$ excede en 2,0 cm a la longitud del lado $\overline{AB}$, en tanto que $\overline{AC} = 5{,}0$ cm y $\angle C = 41{,}6^\circ$. Halla la longitud de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ del triángulo.

33. El diámetro de una circunferencia es la base de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 8,0 cm. Si el ángulo principal mide 50°, calcula la longitud de la circunferencia.

34. En una circunferencia de centro O y radio r, la cuerda $\overline{AB}$ mide 60 cm y $\angle AOB = 70^\circ$. Halla el área del círculo.

35. Para hallar la distancia que hay desde un punto B de la orilla de un lago a una roca A en medio del agua (figura 4.84), se selecciona otro punto C desde la orilla. Desde cada punto con el teodolito se dirige una visual a la roca y otra al otro punto; de este modo se miden los ángulos ABC y ACB respectivamente. Hallar la distancia del punto A al B si $\angle ABC = 60{,}5^\circ$; $\angle ACB = 56{,}1^\circ$ y $\overline{BC} = 98{,}3\,\text{m}$.

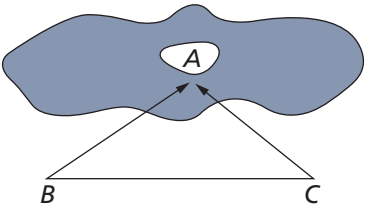


Fig. 4.84

36. Se desea construir un túnel recto a través de una montaña y se han medido las distancias desde los puntos de entrada y salida del túnel a un tercer punto fuera de la montaña. Si las distancias medidas son de 3,15 km y 7,10 km respectivamente y el ángulo que forman entre sí es de 125,4°, ¿qué longitud tendrá el túnel?

37. Un arqueólogo se encuentra a 1,5 km al sur de unas ruinas, interponiéndose en su paso una laguna. Para ir a las ruinas sin atravesar la laguna tiene que desplazarse 4,8 km al nordeste y así llegará a la carretera que lo conducirá a estas. ¿Cuántos kilómetros tiene que recorrer para llegar a las ruinas desde el punto donde se encuentra?

38. Demuestra que en todo paralelogramo la suma de los cuadrados de sus diagonales es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

Polígonos regulares

39. De los cuatro elementos de un polígono regular (n, l, R y a), en los siguientes incisos se dan algunos de estos. Calcula en cada caso los restantes elementos y el área del polígono.

a) $n = 7$; $l = 13{,}2\,\text{cm}$ b) $n = 6$; $a = 17{,}4\,\text{cm}$

c) $n = 10$; $R = 23{,}5\,\text{cm}$

40. El lado de un pentágono regular es de 24 cm. Halla el radio de la circunferencia circunscrita, la apotema y el área del pentágono.

41. El lado de un triángulo equilátero es de 20,0 cm. Halla el radio de la circunferencia circunscrita, la apotema y el área del hexágono de lado 20,0 cm.

42. Halla el área de un decágono regular si su lado mide 12 cm.

43. El área de un octógono regular es $A = 23{,}4\ \text{cm}^2$. Halla l, a y R.

44. El perímetro de un polígono regular de 11 lados es de 23,5 dm, calcula el radio de la circunferencia circunscrita a este y la apotema.

45. Un hexágono regular y un triángulo equilátero están inscrito en una misma circunferencia. Prueba que la apotema del triángulo es igual a la mitad del lado del hexágono.

Aplicaciones de la trigonometría al cálculo de cuerpos

46. Halla el volumen de una pirámide de base hexagonal regular de 30 dm de altura, cuyas aristas laterales forman un ángulo de 60° con el plano de la base.

47. Halla el volumen y el área lateral de un cono circular recto cuyas generatrices miden 15 cm y tienen una inclinación de 45° respecto al plano de la base.

48. Calcula el volumen y el área total de un cubo cuya diagonal interior mide 6,0 cm y tiene una inclinación de 35,2°.

49. El ángulo de abertura de un cono circular recto es de 64° y la longitud de la circunferencia de la base es de 126 cm. Calcula el área total y el volumen del cono.

50. La base de una pirámide regular es un cuadrado de 1,0 m de lado y sus aristas laterales forman un ángulo de 45° con el plano de la base. Halla el volumen de la pirámide y su área total.

51. El cuerpo de la figura 4.85 está formado por una pirámide recta de base rectangular y un prisma recto. Calcula el volumen del cuerpo y su área total si se conoce que:

$a = \overline{EF} = 4{,}0\,\text{cm}; b = \overline{BC} = 3{,}0\,\text{cm}; c = \overline{IF} = 2{,}5\ \text{cm};$
$\alpha = \angle FJI = 26{,}6°$ y $h' = \overline{CG} = 5{,}2\,\text{cm}$

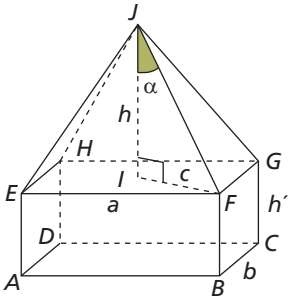


Fig. 4.85

52. En la figura se muestra un prisma recto *ABCDEFGHIJKL*, cuyas bases son exágonos regulares de 6,0 cm de lado. En su interior se ha inscrito una pirámide recta *ABDEN* de base rectangular, cuyo vértice *N* es el punto en que se cortan las diagonales de la base superior del prisma.

- $\overline{NM}$ altura de la pirámide, $T = \overline{BD} \cap \overline{FC}$
- $\overline{BD} \perp \overline{CF}$
- $\overline{NT} = 6{,}00$ cm
- Calcula el volumen del prisma.

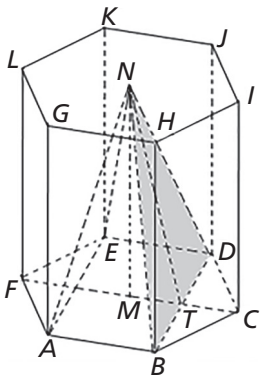


Fig. 4.86

Ejercicios del capítulo 4

1. Selecciona de las siguientes proposiciones cuáles son verdaderas o falsas. De las que sean falsas, justifica por qué lo son.

1.1 Sea α un ángulo interior agudo de un triángulo rectángulo *ABC* donde; a y c son las respectivas longitudes de sus catetos y b, la de la hipotenusa.

a) $\sec\alpha = \frac{b}{a}$ b) $c = a\cdot\cot\alpha$ c) $\csc\alpha = \frac{c}{b}$ d) $-1 < \operatorname{sen}\alpha < 1$ e) $\csc\alpha > 1$

1.2 El seno de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo es igual al coseno de su complemento.

1.3 Si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = 90^\circ - \alpha$ el complemento de α en un triángulo *BCA* rectángulo en *C*, entonces se cumple $\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha = \frac{1}{2}$.

1.4 Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo agudo de 30° entonces la longitud de la hipotenusa en el doble de la longitud del cateto opuesto al ángulo de 30°.

1.5 En la circunferencia trigonométrica se cumple:

a) $\cot 0^\circ = 1$ b) $\csc 90^\circ$ no está definida c) $\tan 270^\circ = 0$

d) $\sec 180^\circ = -1$ e) $\cos 360^\circ = 0$

1.6 Para todo valor de α en la circunferencia trigonométrica $(0^\circ \le \alpha \le 90^\circ)$ se cumple:

a) $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$ b) $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

c) $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ $(\alpha \neq 0^\circ)$ d) $\csc\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

1.7 En el IV cuadrante solo es positivo el coseno y negativo las restantes razones trigonométricas.

1.8 Si $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ]$ entonces las razones trigonométricas de todos los ángulos coterminales con α son los mismos que los del ángulo α.

1.9 Para todo ángulo α, se cumple que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ y que $\csc(-\alpha) = \csc\alpha$

1.10 Si α es un ángulo agudo se cumple que:

a) $\sec(360^\circ - \alpha) = -\sec\alpha$ b) $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$

c) $\tan(180^\circ - \alpha) = \tan\alpha$

2. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $3\sqrt{2}$ u y $4\sqrt{2}$ u

3. En un ΔABC rectángulo en B se conoce que $\text{sen}\angle CAB = 0{,}5$ y $\overline{AC} = 12$ cm. Calcula las razones trigonométricas de $\angle BCA = \gamma$.

4. Sean α y β las amplitudes de los ángulos interiores agudos de un ΔACB, rectángulo en C. Calcula;

a) $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\sec\alpha$, $\text{sen}\,\beta$ y $\csc\beta$ si $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{4}{5}$

b) $\text{sen}\,\beta$, $\cot\beta$, $\csc\beta$, $\tan\alpha$ y $\cos\alpha$ si $\cos\beta = \dfrac{8}{17}$

5. Resuelve en cada caso el triángulo ABC si $\angle ABC = \beta = 90^\circ$ y:

a) $\angle CAB = \alpha = 30^\circ$ y $b = \overline{AC} = 12\text{cm}$

b) $\angle BCA = \gamma = 42^\circ$ y $c = \overline{AB} = 8{,}0\text{cm}$

6. Halla el valor de la expresión: $A = \dfrac{\text{sen}^2 a + \text{sen}\,b}{\text{sen}\,c - \text{sen}\,d} : \sqrt{\dfrac{\text{sen}^2 d + 2\,\text{sen}\,e}{\text{sen}^2 b + 1}}$ para $a = 45^\circ$; $b = 90^\circ$; $c = 60^\circ$; $d = 270^\circ$ y $e = 30^\circ$

7. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $A = \dfrac{8\,\text{sen}^2\,120^\circ + 3\cos 180^\circ}{\tan 60^\circ}$ b) $B = \dfrac{2{,}5 \cdot \text{sen}\,90^\circ}{\cos 240^\circ} + \dfrac{2}{\cos 360^\circ} - \sqrt{\tan 45^\circ}$

c) $C = \dfrac{4\,\text{sen}\left(90^\circ - 60^\circ\right) + \sqrt{2}\,\cos 315^\circ}{\tan^2\left(180^\circ - 30^\circ\right) \cdot \text{sen}\,60^\circ}$

8. Sean: $A = \cos 60^\circ$; $B = \tan 45^\circ$ y $C = \text{sen}\,330^\circ$. Comprueba que $D = 1$ si $\dfrac{D}{B} = \dfrac{1}{A - C}$.

9. Prueba que:

a) $\dfrac{\text{sen}\,150^\circ + \cos 180^\circ}{\tan^2 45^\circ - \cos 225^\circ} = \dfrac{\sqrt{2} - 2}{2}$ b) $\dfrac{\text{sen}\,30^\circ}{\cos 45^\circ} - \cos 30^\circ \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$

c) $\dfrac{\sec 300^\circ - \cos 210^\circ}{\tan 45^\circ - \text{sen}\,120^\circ} = 11 + 6\sqrt{3}$

10. Calcula:

a) $\tan\alpha$ si $\cos\alpha = \dfrac{4}{7}$ y $270^\circ \le \alpha \le 360^\circ$

b) $\cos\beta$ si $\text{sen}\,\beta = -\dfrac{3}{5}$ y $\beta \in \text{III C}$

11. Demuestra que las igualdades siguientes son identidades para los valores admisibles de la variable.

a) $\dfrac{\text{sen}(-x)}{\cos(-x)} = -\tan x$

b) $(\cot\beta+1)^2+(\cot\beta-1)^2=2\csc^2\beta$

c) $\dfrac{1-(\operatorname{sen}x-\cos x)^2}{\operatorname{sen}x}=2\cos x$

d) $\cos\theta+\operatorname{sen}\theta=\dfrac{\cot\theta+1}{\csc\theta}$

e) $\dfrac{1+\sec\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+\tan\alpha}=\csc\alpha$

12. Determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $9\operatorname{sen}x-5\sqrt{3}=5\operatorname{sen}x-3\sqrt{3}$

b) $6\cos^2x=9\operatorname{sen}x$

c) $2\operatorname{sen}^3x-\sqrt{2}\operatorname{sen}^2x=2\operatorname{sen}^2x-\sqrt{2}\operatorname{sen}x$

d) $\operatorname{sen}^2x\cdot\sec^2x-2\operatorname{sen}x\cdot\sec x+1=0$

e) $\dfrac{5}{\cos x-1}+\dfrac{2\cos^2x+25}{3-3\cos^2x}=\dfrac{4}{\cos x+1}$

f) $\dfrac{2\cos^2x-1+\operatorname{sen}^2x}{1-\operatorname{sen}x}=\dfrac{5}{3}$

13. Escribe en tu cuaderno los enunciados siguientes y completa los espacios en blanco de manera que obtengas una proposición verdadera en cada caso.

13.1 Para resolver un triángulo rectángulo es necesario que conozcas _____

13.2 En Topografía y Navegación el ángulo de depresión es el ángulo formado por una línea horizontal y otra cualquiera no horizontal por _____de la horizontal.

13.3 El área de un triángulo es igual al _____ de las longitudes de dos lados cualesquiera por el _____ del ángulo comprendido entre ellos.

13.4 En todo triángulo, el cociente de la longitud de un lado y el seno del ángulo opuesto a ese lado es constante e igual al _____ del radio de la circunferencia _____

13.5 Los triángulos están determinados de manera si se conocen _____; _____; _____

13.6 Los polígonos regulares son inscribibles en una _____ y pueden ser descompuestos en *n* triángulos isósceles _____

13.7 La apotema de un polígono regular es el radio de la circunferencia _____ al polígono.

14. Resuelve el triángulo *ABC* en cada caso (figura 4.87) y halla su área si se sabe que:

a) $a = 44{,}6$ cm; $b = 34{,}1$ cm; $\gamma = 90°$

b) $c = 11{,}5$ cm; $a = 20{,}4$ cm; $\alpha = 90°$

c) $\alpha = 30{,}3°$; $a = 13$ cm ; $\beta = 90°$

d) $\alpha = 79{,}9°$; $\beta = 44{,}6°$; $b = 56{,}8$ cm

e) $a = 8{,}04$ cm; $\beta = 45{,}1°$; $\gamma = 35{,}4°$

f) $b = 83{,}4$ cm; $c = 95{,}2$ cm; $\alpha = 51{,}1°$

g) $a = 7{,}3$ cm; $b = 8{,}2$ cm; $c = 9{,}1$ cm

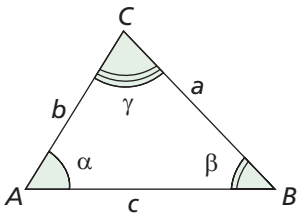


Fig. 4.87

15. En una circunferencia de centro *O* y radio *r*, una cuerda $\overline{AB}$ mide 60 cm y el $\angle AOB = 70°$. Halla el radio de la circunferencia.

16. El ángulo de elevación del extremo superior de un monumento es de 18, 2° desde un cierto punto. Si se caminan 100 m hacia el monumento, el ángulo de elevación es entonces de 45°. ¿Cuál es la altura del monumento?

17. En un triángulo *ABC*, $a = 48{,}96$ cm, $\beta = 48{,}3°$ y $\gamma = 57{,}4°$. Halla el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo y el área de este.

18. Los postes de una portería del futbol están separados 7,32 m. Un muchacho patea la pelota desde un punto del terreno que se encuentra a 15,3 m de un poste y a 17,5 m del otro. ¿Bajo qué ángulo tiene que dar el golpe para anotar un gol?

19. El lado de un pentágono regular es de 21,8 cm. Halla la longitud de sus diagonales.

20. Calcula el área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 6,8 m de radio.

21. ¿Cuál es el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo isósceles cuya base mide 12,5 cm y su ángulo principal es de 120°?

22. Un barco está a 15 km directamente al sur de un puerto. Si el barco navega al nordeste 4,8 km, ¿a qué distancia se encuentra del puerto?

23. Dos nadadores se encuentran a 250 m uno de otro. Ambos están nadando hacia el mismo punto, que se halla a 423 m del primero y a 360 m del otro. ¿Qué ángulo forman las direcciones de ambos?

24. La base de una pieza de madera tiene forma de rombo y su perímetro es de 40 cm. Si la longitud de la diagonal menor es de 12 cm, calcula la amplitud de los ángulos interiores del rombo.

25. Calcula el volumen del prisma *ABCDEFGH* recto de base cuadrada *ABCD* con los datos que se muestran en la figura 4.88 dados en centímetros.

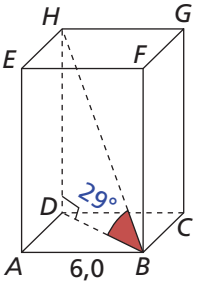


Fig. 4.88

26. La figura 4.89 muestra un prisma recto *ABCDEFGH* cuyas bases son trapecios.

ABCD es un trapecio rectángulo en *B* y *C*

$M \in \overline{AD}$

$\overline{BM} \perp \overline{AD}$

Si el área del trapecio *ABCD* es de 32 cm², $\measuredangle BEA = 45°$ y $\overline{BC} = \overline{CD} = 4{,}0$ cm. Calcula el volumen del prisma *ABCDEFGH.*

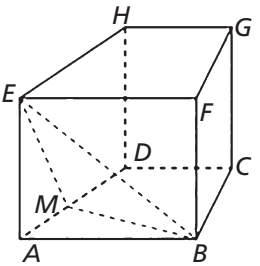


Fig. 4.89

27. La figura 4.90 representa un cono circular recto de altura $\overline{OS}$.

- El ΔABC inscrito en la circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{AC}$ en la base del cono
- $M \in \overline{AB}$
- $\overline{OM} \parallel \overline{BC}$

Si se conoce que el área de la base del cono es 36π dm² y $\tan \measuredangle OAS = 1$. Calcula el área lateral del cono.

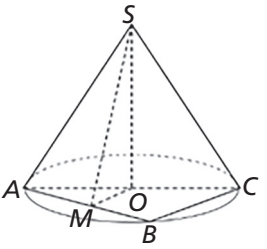


Fig. 4.90

28. La figura 4.91 muestra un cilindro circular recto y la pirámide *COBD* que tiene como base el triángulo *COB*. Se sabe que:

- $\overline{CD}$ es una generatriz del cilindro.
- *O* es el centro de la circunferencia que limita la base inferior del cilindro y *B* es un punto de ella.
- $\overline{AC}$ es un diámetro de la base inferior del cilindro.
- $\overline{BO} \perp \overline{AC}$
- $\overline{AC} = \overline{CD}$

Si el área de la base *COB* de la pirámide es 4,5 dm², calcula su área total.

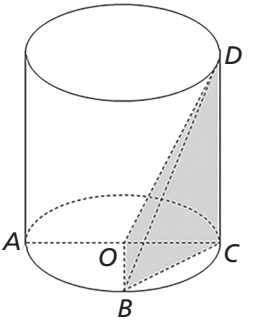


Fig. 4.91

29. La figura 4.92 representa una pieza maciza de metal formada por el cubo *ABCDEFGH* al que se le ha fundido sobre la cara *EFGH* la pirámide *EFGHS*.

- *N* y *M* son puntos medios de las aristas $\overline{AD}$ y $\overline{EH}$ respectivamente.
- *S*, *M*, *N* son puntos alineados.
- $\measuredangle HSE = 60^0$
- $\overline{AB} = 6{,}00$ m
- $A_{(\Delta GSF)} = 25{,}4$ m^2

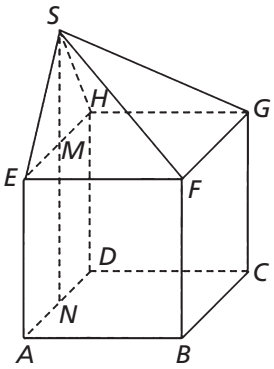


Fig. 4.92

Si se quiere pintar completamente la pieza con un material anticorrosivo, calcula el área de la superficie que es necesario pintar.

Autoevaluación

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\tan\alpha + 3\cos\alpha = 0$

b) $\operatorname{sen}^2\beta - \cos^2\beta = \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{sen}^2 x + 2\cos x + 2 = 0$

d) $4\sec^2 y = 3 + \tan^2 y$

e) $2\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \tan x = 3\cos x$

2. Demuestra las siguientes identidades para los valores admisibles de la variable.

a) $\cot^2 x - \cos^2 x = (\cot x \cdot \cos x)^2$

b) $\tan\alpha = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha\,(1 + \tan^2\alpha)$

c) $\operatorname{sen} x \cdot \tan x = \sec x - \cos x$

d) $\sec\beta - \operatorname{sen}\beta \cdot \tan\beta = \cos\beta$

e) $\frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}$

3. Los lados de un paralelogramo miden 6,0 cm y 12 cm y los ángulos agudos 60°. Halla la longitud de sus diagonales.

4. Para hallar la distancia que hay desde un punto *B* en la orilla de un lago a un bote *A* en el medio del lago se mide en la orilla la distancia entre dos puntos *B* y *C*, y desde cada uno de estos puntos, con un teodolito, se visualiza el bote.

De este modo se miden los ángulos *ABC* y *ACB*. Halla la distancia entre el punto de la orilla y el bote suponiendo que el $\angle ABC = 60°$, $\angle ACB = 56°$ y la distancia $\overline{BC} = 89$ m.

5. La altura de una montaña cuya base y cumbre eran inaccesibles se determinó del siguiente modo: se midió el ángulo de elevación de la cumbre desde un punto situado a cierta distancia de la base en una llanura horizontal y se vio que era de 30°; se repitió la medición desde un punto alejada un kilómetro más allá de la montaña y se vio que el ángulo de elevación en este caso era de 25°. ¿Cuál es la altura de la montaña?

6. Calcula la cantidad de litros de gasolina contenidas en un tanque cilíndrico horizontal (figura 4.93) de 3,20 m de largo y 1,20 m de diámetro cuando la altura *h* de la gasolina contenida en el tanque sea de 40 cm.

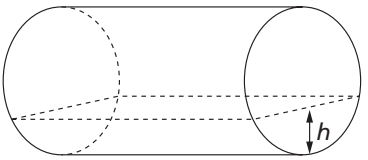


Fig. 4.93

7. La figura 4.94 representa un prisma recto *ABCDEFGH,* de bases cuadradas.

- *M* punto de intersección de las diagonales de la base *ABCD*
- $\measuredangle DGM = 30^0$

Calcula el volumen del prisma conociendo que $\overline{MB} = 2\sqrt{2}$ cm.

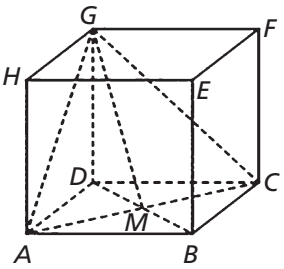


Fig. 4.94

8. A partir de una pieza maciza en forma de semiesfera de centro *O* y diámetro $\overline{AB}$, de volumen igual a 57 dm^3. se quiere obtener la pirámide de base triangular *ACBD* como se muestra en la figura 4.95 y de la cual se conoce que:

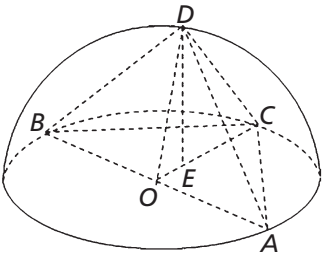


Fig. 4.95

- *D* es un punto de la superficie esférica.
- $E \in \overline{OC}$
- El triángulo *ACB* es isósceles de base $\overline{AB}$ y está inscrito en la circunferencia de centro *O*.
- $\overline{DE}$ es la altura de la pirámide.
- $\overline{OE}$ = 1,0 dm.

Halla el volumen del material que se desecha luego de obtener la pirámide de la pieza maciza inicial.

ANEXOS

Respuesta a los ejercicios

Capítulo 1

Epígrafe 1.1

Conjuntos y subconjuntos

1. a) Verdadera: significa que en cualquiera de los casos los elementos están bien individualizados (regla I) y el conjunto está perfectamente determinado (regla II).

b) Falsa: es infinito cuando el proceso de contar todos sus elementos no termina o es imposible.

c) Verdadera: se puede determinar por el conteo de todos sus elementos.

d) Falsa: porque no existe ningún número entero positivo, que sea menor que – 1, luego es el conjunto ∅.

2. a) finito b) finito c) infinito d) finito e) vacío

2.1 Respuesta abierta.

3. a) $2 \notin S$, porque no existe ningún número $x \in \mathbb{N}$ tal que $x^2 = 2$.

b) $25 \in S$, porque $5^2 = 25$.

c) $-64 \notin S$ porque; no existe ningún número $x \in \mathbb{N}$ tal que $x^2 = -64$.

d) $0{,}0081 \notin S$, porque $0{,}0081 \notin \mathbb{N}$; no existe ningún número $x \in \mathbb{N}$ tal que $x^2 = 0{,}0081$.

e) $121 \in S$, porque $11^2 = 121$.

f) $624 \notin S$, porque no existe ningún número $x \in \mathbb{N}$ tal que $x^2 = 624$.

3.1 Respuesta abierta.

4. a) $M \not\subset P$, porque el 1 y 4, no son números primos.

b) $A \subset M$, porque todos los elementos de A, pertenecen a M.

c) $B \not\subset A$ porque el único elemento de B, no pertenece a A, es decir, $2 \notin A$.

d) $D \subset T$, porque los elementos del conjunto D, están incluidos en el conjunto T

e) $(A \cup B) \subset M$ f) $(A \cap D) \subset M$ g) $(D \setminus B) \not\subset M$

4.1 Respuesta abierta.

5. a) Basta demostrar que existe al menos un elemento de A que no pertenece a B.

Se tiene que $3 \in A$ y $3 \notin B$ (3 no es un número par). Luego $A \not\subset B$.

b) Sea x cualquier elemento que pertenezca al conjunto $A \setminus B$. Por definición de diferencia, $x \in A$ y $x \notin B$.

Se ha demostrado que $x \in (A \setminus B)$, implica que $x \in A$, es decir: que $(A \setminus B) \subset A$.

Notación de conjuntos

6. a) tabular b) $M = \{n \in \mathbb{N}; n \geq 1 : 2 \leq 2n \leq 16\}$

7. a) $\{n \in \mathbb{Z} : -5 \leq n \leq 43\}$

b) $\{n \in \mathbb{Z} : -205 < n < 178\}$

c) $\{n \in \mathbb{N}; 2n+1 : n > 60\}$

Nota: también se puede considerar como número impar a $2n - 1$.

8. $T^c = \{f; g; h; \ldots; y; z\}$

9. a) El complemento de V es el conjunto de los números naturales impares.

b) $V^c = \{1;3;5;7;\ldots.\}$, en notación tabular

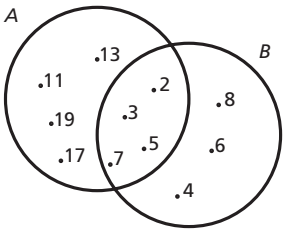
$V^c = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ impar} : 2n+1 \text{ o } 2n-1\}$) en notación constructiva

10. Respuesta abierta.

Operaciones con conjuntos. Propiedades

11. a) $A \cap B = \{2,3,5,7\}$. Su cardinal es 4, porque tiene cuatro elementos.

b)



c) Respuesta abierta.

12.1 a) Unión: $A \cup B \cup C$ b) $C \setminus (A \cup B)$

12.2 a) $A \cap B \cap C$

12.3 Respuesta abierta

13. a) 5 b) 12 c) 9 d) 3 e) 33

14. a) ninguno b) c) 3

Epígrafe 1.2

Relaciones conjuntistas en el dominio de los números reales. Propiedades

1. a) F; $2 \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, luego $2 \in \mathbb{Z}$. b) V c) V

d) F; $\frac{4}{5}$, es un número fraccionario; $\frac{4}{5} \in \mathbb{Q}_+$ e) F, $2{,}236067 \in \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

f) V g) F; todos los elementos de $\mathbb{Q}_+$ no están incluidos en $\mathbb{Z}$

h) V i) V

2. a) $\notin$ b) $\in$ c) $\notin$ d) $\subset$ e) $\notin$ f) $\not\subset$ g) $\subset$ h) $\notin$ i) $\in$ j) $\subset$ k) $\not\subset$ l) $\in$

3. a) $7875\frac{1}{4}$ es racional, porque se puede expresar como $\frac{31501}{4} = 7875{,}25$.

b) $\sqrt{4} = 2$, luego es racional.

c) $2 + \sqrt{2} = 2 + 1{,}4142\ldots = 3{,}4142\ldots$ luego es irracional por tener un desarrollo decimal infinito no periodico.

d) $-3\frac{1}{3} = -\frac{10}{3}$ luego es racional porque se puede expresar en la forma $\frac{a}{b}$ $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.

e) $6{,}\overline{25}$ es racional por presentar un desarrollo decimal infinito período.

f) $-\sqrt{9} + 2 = -1$, luego es un número racional.

3.1 Figura 1.b, diagrama de Venn que representa el dominio numérico más restrigido al cual pertenecen los números dados.

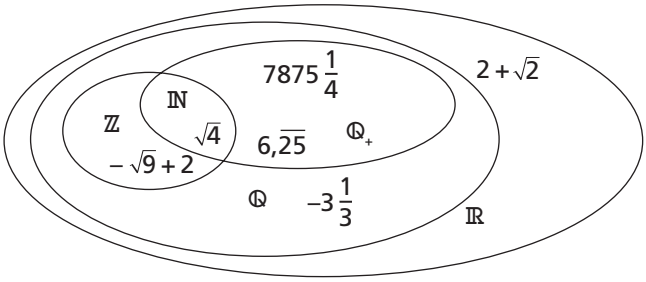


Fig. 1.b

4. Respueta abierta.

5.1 L_1: $-8; -1{,}75; -1{,}6; \frac{1}{10}; |0{,}5|; 1$ y L_2: $\left|-\frac{3}{2}\right|; 0{,}2; -\frac{\pi}{\pi}; -2\frac{1}{4}; -2{,}8; -3$

5.2 Respuesta abierta

6. a) 1; 4; 6; 7, 8 (Respuesta abierta) b) 2, 5 (Respuesta abierta)

Intervalos numéricos. Operaciones conjuntistas con intervalos

7.

Notación constructiva	
a)	$\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$
b)	$\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$
c)	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ o } x > 1\}$
d)	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq -1; x = 1\}$
e)	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$
f)	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq -1; x \neq 1\}$

8. a) $\notin$ b) $\in$ c) $\in$ d) $\in$ e) $\notin$ f) $\in$

8.1

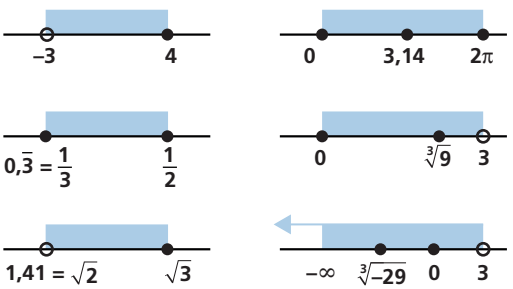


Fig. 1.c

9. a) F; porque $-3 \notin B$ b) V c) F; porque $-3 \notin B$
d) F; porque existen infinitos números reales entre -3 y $-2{,}9$.
e) F; $-3 < 0$ f) V g) V h) V i) V.

10.1 a) V b) F; porque existen infinitos números reales entre 4,9 y 5
c) F; $4 \notin P$ d) V

10.2 a) $P \cap B = \{-5\}$ b) $P \cup B = \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x \leq 5\}$ c) $P \setminus B = \{5\}$
d) $B \setminus P = \{x \in \mathbb{R} : -5 < x < 5\}$

11.

$A \cap B$
$B \setminus A$
$A \setminus B$

12. a) V b) V c) F, si está incluido d) V

13.1 c) **13.2** d) **13.3** d) **13.4** b) **13.5** c) **13.6** d)

Epígrafe 1.3

Operaciones fundamentales con números reales

1. a) $\frac{2}{3}$ b) –25 c) 12

1.1 Respuesta abierta.

2. Respuesta abierta.

3. a) 18 lb b) 11 meses.

4. a) 94 cm aproximadamente.

b) Tiene una estatura no acorde con su edad porque es superior a 106,2.

5. Ancho 25,7 m y largo 30,5 m.

6. a) 12,5 m b) propiedad distributiva.

7. 202, 5 vueltas aproximadamente.

8.1 d) **8.2** a) **8.3** c) **8.4** a) **8,5** d)

9. 50,1 %

10. 16,4 kg.

11. 42,5 % **11.1** a) Respuesta abierta b) Respuesta abierta

12. 133

Potenciación y radicación. Ampliación del concepto de potencia

13. a) 0,216 b) 7,111 c) –2,828 d) 5,196 e) 42,875

14. a) 9 b) 8 c) 4 d) 5 e) cualquier valor real

f) cualquier par de númeror reales cuya diferencia sea –2.

g) 5 h) –1 i) 3

15. a) 0 b) 1 c) 74 d) 1 225

16.1 b) **16.2** a) **16.3** a) **16.4** d)

17. a) Eritrocitos: 4, 5 · 10^{12}/L, Leucositos: 1,1 · 10^{10} /L

b) Respuesta abierta.

18. a) 2 b) –3 c) –9 d) $\frac{1}{2}$ e) 25 f) N.S.

19. a) 8 b) 5 c) $-0,5$ d) 2 e) $\frac{2}{3}$ f) 6 g) $-\frac{1}{2}$
h) $\frac{7}{2}$ i) $\frac{1}{4}$ j) $\frac{1}{2}$ k) $\frac{9}{4}$ l) $4\frac{12}{125}$

Operaciones con radicales. Propiedades

20. a) $3\sqrt{3}$ b) $6\sqrt[3]{4}$ c) $8ab\sqrt{ab}$ d) $-3a\sqrt[3]{3a^2}$
e) $\frac{2a}{3x}\sqrt{2a}$ f) $4xy\sqrt[3]{xy^2}$

21. a) $\sqrt{49a}$ b) $\sqrt[3]{27b^4}$ c) $\sqrt[5]{128x^5y}$ d) $\sqrt[5]{96x^2y^2}$
e) $\sqrt[3]{\frac{6}{27}x^3y}$ f) $\sqrt{(a+b)^2(a-b)}$

22. a) $20\sqrt{3}$ b) $0,3\sqrt[3]{5}$ c) $-2,61\sqrt{7}$ d) $-11\sqrt[3]{4}$
e) $\frac{25}{6}\sqrt{5}-\frac{8}{25}\sqrt[3]{5}$ f) $5,5\sqrt{a}$ g) $8\sqrt{x+1}$ h) $10\sqrt{x}+9\sqrt{y}$

23. a) $\sqrt[4]{5} > \sqrt{2} > \sqrt[6]{7}$ b) $\sqrt{10} > \sqrt[3]{5} > \sqrt[6]{11}$ c) $\sqrt[4]{2} > \sqrt{\frac{1}{2}} > \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$

24. a) $\sqrt{5} > \sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt[3]{9} > \sqrt[6]{64}$ c) $\sqrt[12]{125} < \sqrt[8]{25}$ d) $\sqrt{3} > \sqrt[5]{5}$
e) $\sqrt{10} > \sqrt[3]{25}$ f) $\sqrt{0,5} < \sqrt[4]{75}$ g) $\sqrt{10} > \sqrt[3]{11}$ h) $\sqrt{3} > \sqrt[6]{7}$

25. a) $4\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{15a}$ c) $6\sqrt[3]{6}$ d) $2\sqrt[12]{2}$ e) $a^3\sqrt{5x}$
f) $-x\sqrt[5]{15}$ g) 2 h) $\sqrt[8]{3}$ i) $8\sqrt{3}-3$ j) $14-6\sqrt{5}$
k) $\sqrt{6x}$ l) $10ab^2c\sqrt{bc}$

26. a) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ b) $b\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ d) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ e) $d\sqrt[3]{9}$
f) $4+2\sqrt{3}$ g) $\sqrt{10}-\sqrt{5}$ h) $\sqrt{6}+2$ i) $7\sqrt{5}+7\sqrt{3}$ j) $5-2\sqrt{6}$

27. a) $-7+6\sqrt{3}$ b) $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ c) $4\sqrt[6]{2}$ d) $2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$
e) $3-3\sqrt{10}$ f) $2-3\sqrt{2}$ g) $4+3\sqrt{5}$

Logaritmación de números reales

28.

Notación exponencial	Notación logarítmica
a) $6^3 = 216$	a) $\log_6 216 = 3$
b) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$	b) $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$
c) $10^{-2} = 0,01$	c) $\log 0,01 = -2$

d) $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[4]{27}$	d) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{27} = \frac{3}{2}$
e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3} = \frac{1}{125}$	e) $\log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{125}\right) = 3$
f) $10^{2,8} = 631$	f) $\log 631 = 2,8$
g) $10^{0,2553} = 1,8$	g) $\log 1,8 = 0,2553$

29. a) 7 b) 56 c) 0 d) –5 e) 32 f) 2 g) $\frac{1}{2}$ h) –2 i) 6 j) –3

30. a) V b) V c) V d) F

31. a) $\frac{1}{3}$ b) – 8

32. a) 7,054 b) 3,177 c) 0, 020 d) –1, 040

33. Aproximadamente 19 h.

34. 511 años.

Epígrafe 1.4

Variable estadística. Escalas de medición de la variable

1. Respuesta abierta.

2. Respuesta abierta.

3. a) Muestra b) Población c) Población d) Muestra

4. a)

Variable	Clasificación de la variable	Categorías o valores que puede tomar la variable
Cantidad de estudiantes de un preuniversitario en cada curso escolar	Numérica o Cuantitativa (Discreta)	150; 320; 500; 660; 700; …
Cantidad de personas que se contagiaron con el virus Sars-Cov-2 en Europa	Numérica o cuantitativa (discreta)	1 500; 2 700; 13 200; ...
La preferencia que tienen los estudiantes de tu preuniversitario por un tipo de música	Categórica o cualitativa	Salsa, Reguetón, Clásica, otros
Cantidad de vértices de los polígonos regulares	Numérica o cuantitativa (discreta)	3; 4; 5; 6; …
Volumen de agua almacenada en varias presas	Numérica o cuantitativa (continua)	540 000 m^3; 870 000 m^3; …

Variable	Clasificación de la variable	Categorías o valores que puede tomar la variable
Sexo de un grupo de personas	Categórica o cualitativa	Masculino, femenino
Magnitud en la escala de Richter de los terremotos ocurridos en el mundo durante el año 2018	Numérica o cuantitativa (continua)	3,5; 5,3; 7,2; 7,6; …
Consistencia de 50 sustancias químicas	Categórica o cualitativa	Blanda, dura
Enfermedades más frecuentes en una comunidad	Categórica o cualitativa	Diabetes, artritis, hipertensión

b) Respuesta abierta
c) Respuesta abierta
d) Respuesta abierta

5.

Variable	Escala
a) Tipo de enfermedad.	Nominal
b) Grado en que se manifiesta la enfermedad.	Ordinal
c) Temperatura corporal.	De razón
d) Masa en kilogramos.	De razón

6.1. a *Población*: La producción diaria. *Tamaño de la población*: 10 500 unidades.
Muestra: Las unidades seleccionadas. *Tamaño de la muestra*: 100 unidades

6.1. b

Variable	Clasificación	Categoría o valores que puede tomar
Masa del helado	Numérica o cuantitativa continua	Cualquier número real positivo
Consistencia	Categórica o cualitativa	Alta, media, baja
Cantidad unidades con problemas en las etiquetas	Numérica o cuantitativa discreta	Cualquier número natural entre 0 y 100

6.2

Variable	Tipo de variable	Posibles valores	Escala
a) Nivel cultural de los trabajadores.	Categórica o cualitativa	Primario, Medio Básico Medio Superior, Universitario	Ordinal
b) Cantidad de ausencias de cada trabajador durante el año.	Numérica o cuantitativa discreta	0; 1; 2; 3; 4; 5;…	De intervalo
c) Tiempo, en horas, que invierte cada trabajador para llegar a la fábrica.	Numérica o cuantitativa continua	0,5; 1; 1,25; 2; 2,30;..	De razón
d) Turnos de trabajo.	Categórica o cualitativa	Turno A Turno B 1.^{er} Turno, 2.^{o} Turno	Nominal
e) Calidad de los helados fabricados en una jornada laboral.	Categórica o cualitativa	Alta, media, baja	Ordinal
f) Temperatura del lugar donde se almacenan las materias primas.	Numérica o cuantitativa continua	Cualquier número real	De intervalo

7.1

Variables	Clasificación	Escala de medición
Esperanza de vida al nacer	Numérica o cuantitativa continua	De razón o proporción
Número de médicos	Numérica o cuantitativa discreta	De razón o proporción
Unidades de salud existentes	Numérica o cuantitativa discreta	De razón o proporción
Cantidad de camas asistenciales	Numérica o cuantitativa discreta	De razón o proporción
Cantidad de maestros primarios	Numérica o cuantitativa discreta	De razón o proporción

7.2

Variable	Antes del año 1959	Después del triunfo de la Revolución hasta el año 2016
Esperanza de vida al nacer		76
Número de médicos		10 334
Unidades de salud existentes	46	
Cantidad de camas asistenciales	1 470	
Cantidad de maestros primarios		77 479

7.3 Respuesta abierta (se pueden apoyar de gráficos).

8. a) Escala de intervalo dado que el cero en las calificaciones de los estudiantes no significa ausencia total de la propiedad de la variable que se mide.

b) 17

c) 24,4

d) Respuesta abierta.

Distribución de frecuencias y gráfico de frecuencias acumuladas

9. a) Población: matrícula de la escuela
Muestra: estudiantes seleccionados de diferentes grados
Tamaño de la muestra: 20 estudiantes

b) Numérica o Cuantitativa continua, escala de razón

c)

Edad	F_i	f_i	$F_{ai}\downarrow$	$f_{ai}\downarrow$
11	2	0,1	2	0,1
12	3	0,15	5	0,25
13	3	0,15	8	0,40
14	6	0,3	14	0,70
15	5	0,25	19	0,95
16	1	0,05	20	1,00
	20	1		

d) Gráfico construido por los estudiantes

10. a) Numérica o cuantitativa continua, escala de razón.
b) 1,9.
c) Tabla construida por los estudiantes.
d) Gráfico construido por los estudiantes.
e) Respuesta abierta.

11. Ilustración en el GeoGebra.

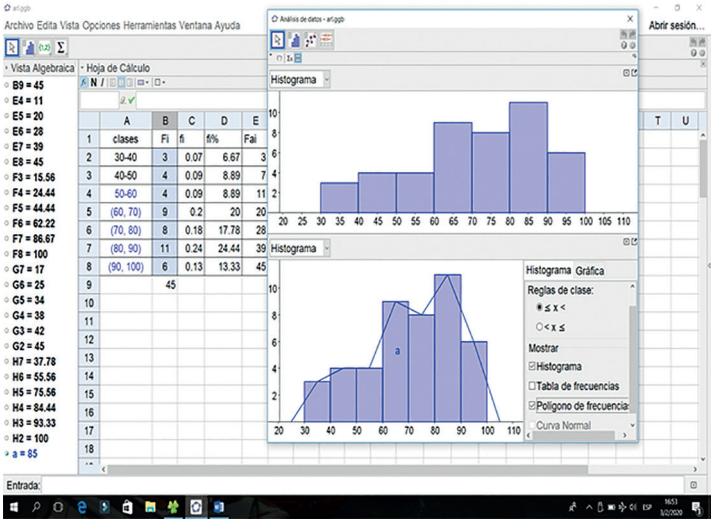


Fig. 1.d

12. Ilustración del gráfico haciendo uso del GeoGebra.

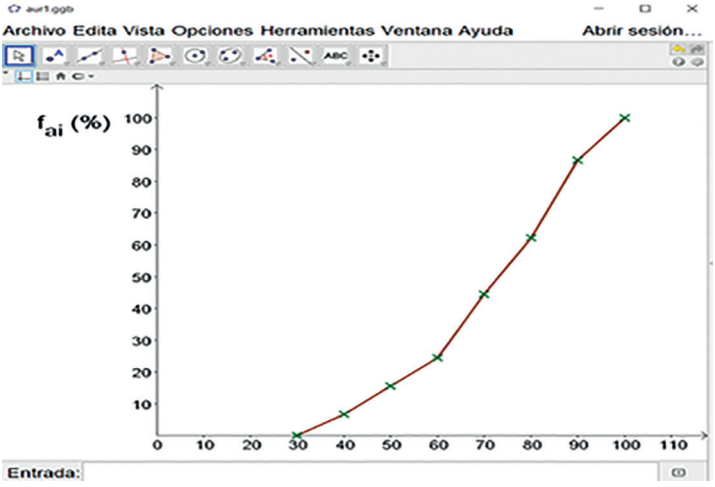


Fig. 1.e

Medidas de tendencia central

13. a) F pues cuando la escala es nominal no es posible calcular la media y en el caso de las ordinales solo es posible si la variable es numérica.
b) V
c) V
d) V
e) V
f) F pues es el dato de mayor frecuencia
g) V
h) V
i) F pues es el valor central del conjunto de datos ordenados
j) F pues no es posible su determinación en este tipo de escala
k) V
l) F pues es la de mayor frecuencia
m) F pues es la clase en que está incluido el valor central del conjunto de datos ordenados.

14. Respuesta abierta.

15. a) La media
b) La mediana
c) La moda
d) La media
La fundamentación es abierta.

16. Respuesta abierta.

17. a) La temperatura promedio anual es aproximadamente de 26,7°C.
b) El valor central de la temperatura anual es de 25,5°C.
c) La temperatura más frecuente es 28°C.
d) a → media aritmética b → mediana c → moda
e) Respuesta abierta.

18. a) [100; 110)
b) La media es aproximadamente de 104,3 pulsaciones .
c) Gráfico construido por los estudiantes.
d) Me = 103,3 Mo = 103,1

19.1 Respuesta abierta.

19.2 a) Tabla de frecuencia construida por los estudiantes.

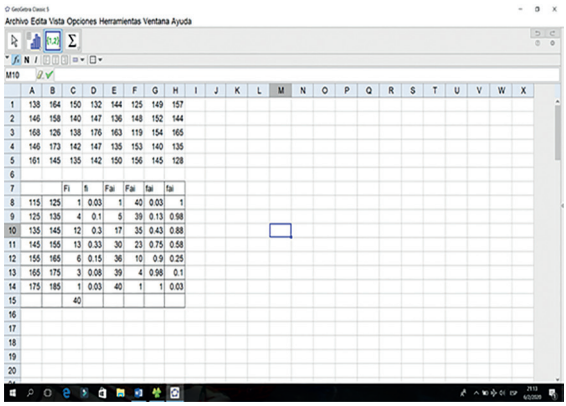


Fig. 1.f

b) Secuencia de gráficos seguida en la construcción del histograma y el polígono de frecuencias

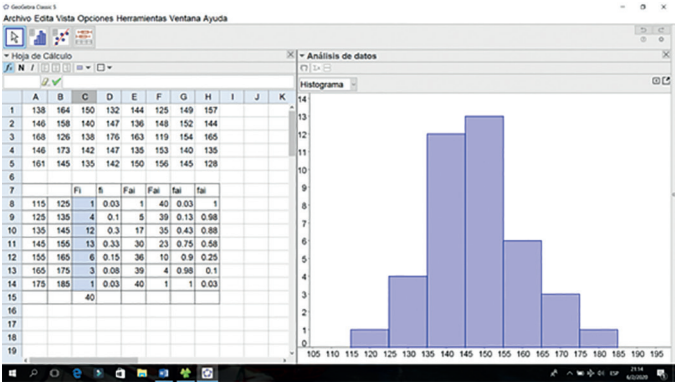


Fig. 1.g

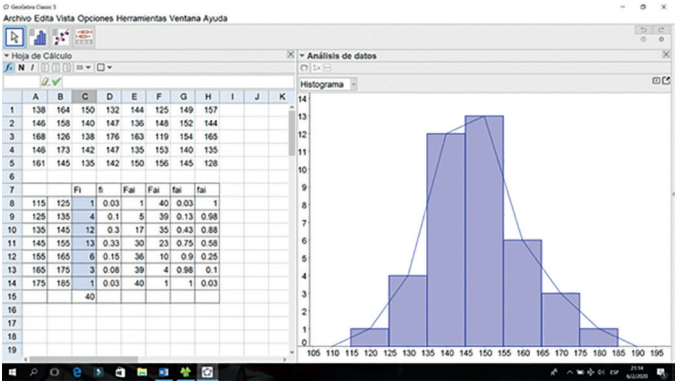


Fig. 1.h

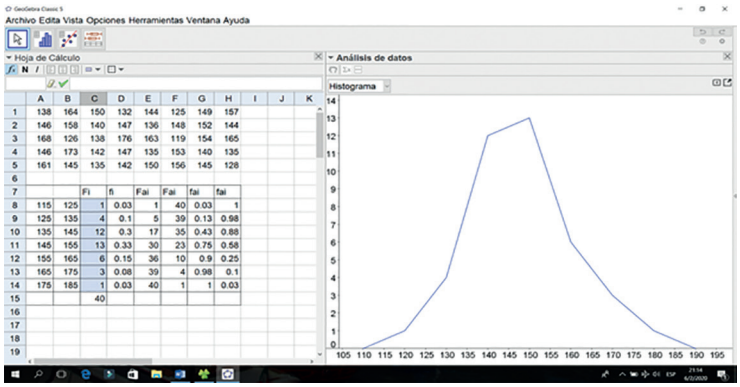


Fig. 1.i

c) $\overline{x} = 1146{,}3$ Me = 144,8
Mo = 143,3 (interpretación por los estudiantes)

Medidas de dispersión

20. $R = 3$; $Dm = 0{,}97$; $S^2 = 1{,}21$; $S = 1{,}1$
$CV \oplus 34$ % Interpretación por los estudiantes

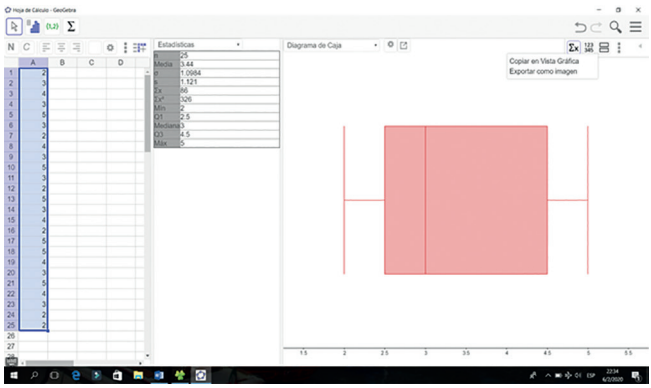


Fig. 1.j

21. $S = 1{,}39$ (respuesta abierta para la interpretación)

22. Se debe calcular las medidas de tendencia central y de dispersión de cada equipo.

Equipo Rojo	Equipo Azul
$\overline{x} = 6{,}83$	$\overline{x} = 6{,}83$
Me = 7	Me = 7
Mo = 10	Mo = 5 y Mo = 8

$R = 8$	$R = 4$
$Dm = 2{,}83$	$Dm = 1{,}5$
$S^2 = 8{,}47$	$S^2 = 2{,}47$
$S = 2{,}9$	$S = 1{,}57$
$CV = 42{,}46\ \%$	$CV = 22,\ 11\ \%$

En correspondencia con los indicadores calculados se puede considerar que el equipo Azul es el de mejores resultados y por eso es el ganador pues sus resultados son más homogéneos.

23. Respuesta abierta.

Medidas de posición y diagrama de caja y bigotes

24. $Q_1 = 2{,}5$ $Q_2 = 3$ $Q_3 = 4{,}5$ $R_I = 2$ Valor mínimo = 2 Valor máximo = 5

25.

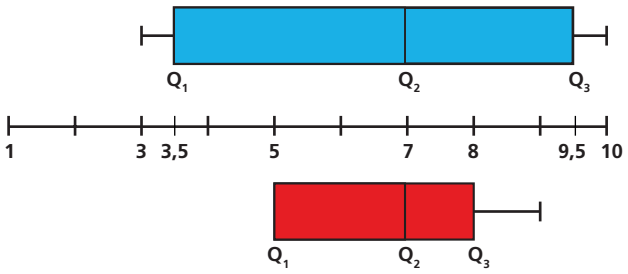


Fig. 1.k

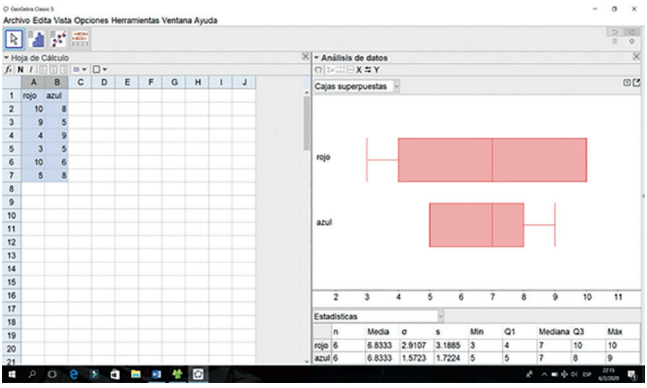


Fig. 1.l

26. Conjunto D (para la fundamentación debes basarte en los valores máximo y mínimo, así como, en los cuartiles).

27.

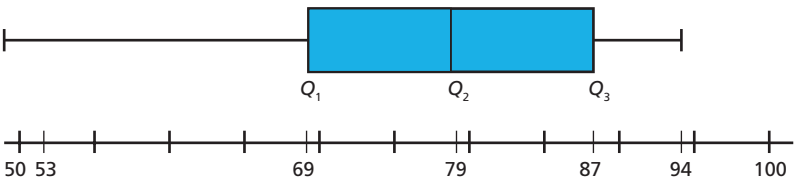


Fig. 1.m

Con GeoGebra



Fig. 1.n

28. a) La mediana del precio de los platos del Restaurante A es $ 30.00 y la del Restaurante B es $ 50.00.

b) El Restaurante B.

c) En el Restaurante A el precio más alto que se debe pagar por un plato es $ 50.00 y en el Restaurante B es $ 70.00.

d) Respuesta abierta.

29. Respuesta abierta.

Respuestas de los ejercicios del capítulo

1. a) Correcta.

b) Incorrecta: por ser s un elemento de *M*. El símbolo $\subset$, debe usarse para establecer la relación entre dos conjuntos.

c) Incorrecta: ya que $\{t\}$ es un subconjunto de *M*. El símbolo $\in$, debe usarse para expresar la relación de pertenencia de un elemento a un conjunto.

d) Correcta.

2. Demostración

Sea x que pertenece a $(A \setminus B) \cap B$, por lo que y se tiene que $x \in (A \setminus B)$ y $x \in B$ por definición de intersección, pero por definición de diferencia, se tiene que $x \in A$ y $x \notin B$. Como no hay ningún elemento tal que $x \in B$ y $x \notin B$, entonces se cumple que:

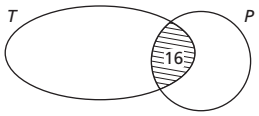
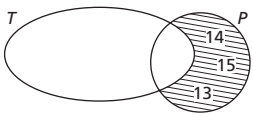
$(A \setminus B) \cap B = \varnothing$.

3.1 $P = \{13; 14; 15; 16\}$ $Q = \{17; 19; 23; \ldots\}$

3.2 $\{x \in \mathbb{Z} : 12{,}5 < x < 17\}$ b) $\{n \in \mathbb{N} : 2n - 1 > 13\}$

3.3 Conjunto de los números naturales entre 2 y 16, con ambos incluidos.

3.4

$T \cap P = \{16\}$	$P \setminus T = \{13; 14; 15\}$
	
Fig. 1.o	**Fig. 1.p**

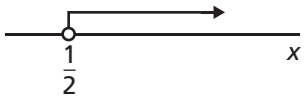
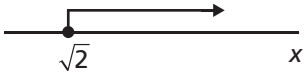
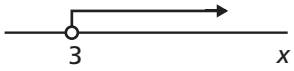
4. Respuesta abierta.

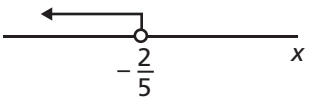
5. $M = \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x \leq 5\}$ $N = \{x \in \mathbb{R} : -1{,}3 < x < 1{,}3\}$

a) Respuesta abierta.

b) Respuesta abierta.

6. a) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_+$, I b) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

7.	**7.1**	**7.2**
a)	$\left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{2}\right\}$	 **Fig. 1.q**
b)	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq \sqrt{2}\}$	 **Fig. 1.r**
c)	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq -\sqrt{2}\}$	 **Fig. 1.s**
d)	$\{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$	 **Fig. 1.t**

7.	7.1	7.2
e)	$\left\{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{2}{5}\right\}$	 **Fig. 1.u**

8.1 a) Respuesta abierta.

b) Cualquier conjunto formado por un par de números naturales.

c) Cualquier conjunto formado por un par de números fraccionarios expresados en la forma $\frac{a}{b}$. con a y b números naturales y $b \uparrow 0$.

8.2 b) Cualquier subconjunto de dos elementos, que pertenezcan al conjunto $\{1; 2; 3; 4; 5\}$

c) $C = \mathbb{Q}_+ \setminus \{1,2,3,4,5\}$

9. a) $8{,}82 \cdot 10^{25}$ g b) $35{,}37 \cdot 10^{22}$ lb.

10. Respuesta abierta

11. a) -12 b) $\frac{2}{49}$ c) $3\sqrt{2}$ d) 3 e) $3\sqrt[3]{4}$

12. a) $\frac{8(a-b)^2}{9(a+b)^2}\sqrt{2(a-b)}$ b) $\frac{2}{3}b\sqrt[3]{x^2y}$ c) $3a^2y^2\sqrt{x^2y^2}$ d) $5x\sqrt{x-2}$

13. a) $\sqrt{3} < \sqrt[3]{7} < \sqrt[4]{25}$ b) $\sqrt{2} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[6]{13} < \sqrt[3]{4}$

14. a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ c) $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ d) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

15. a) 6 b) 12 c) 3 d) 3

16.

Variable	Tipo de variable	Valores posibles que puede tomar	Escala
a) Sexo	Casificatoria o cualitativa	Masculino, femenino	Nominal
b) Nivel cultural	Casificatoria o cualitativa	Técnico medio	Nominal
c) Calificación técnica	Casificatoria o cualitativa	Técnico A, Técnico B	Ordinal
d) Tiempo en horas que invierte un trabajador para confeccionar un pantalón	Numérica o cuantitativa continua	2 h 1 1/2 h	De intervalo

e) Cantidad de pantalones que confecciona un trabajador en una jornada de trabajo.	Numérica o cuantitativa discreta	0;1;5;7;10;15;…	De razón
f) Calidad de la costura determinada por el número de piezas que no son rechazadas.	Clasificatoria o cualitativa	Buena, Regular, Mala	Ordinal

17. a) $ 12 207 b) mediana: $ 12 600; moda $ 14 100. c) $ 2714.28
d) rango: 5 700; desviación media: 1 066,25; varianza: 1 424 374,3 desviación típica: 1 193,5; coeficiente de variación: 9,8%.
e) Respuesta abierta.

18. Respuesta abierta.

19. a) Máximo: 341; mínimo 7; $Q_1 = 28{,}5$; $Q_2 = 97$; $Q_3 = 198{,}5$; rango intercuartílico 170
b) Respuesta abierta (gráfico generado en GeoGebra)
c) Respuesta abierta.

20. Respuesta abierta.

21. Respuesta abierta.

Capítulo 2

Epígrafe 2.1

Expresiones algebraicas

1. b)

2.1 c) **2.2** c) **2.3** b)

3. 1.c 2.d 3.f 4.a

4. a) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq -\frac{3}{2}\right\}$ b) $\{y \in \mathbb{R} : y \neq -4 \text{ o } y \neq 4\}$

c) $\{b \in \mathbb{R} : b \neq 18\}$ d) $x_{1.2} = 1 + \sqrt{7}$

e) $\{m \in \mathbb{R} : m \neq 5\}$ f) $\{x \in \mathbb{R}\}$

g) $\{z \in \mathbb{R} : z \neq -1 \text{ o } z \neq 6\}$ h) $\{y \in \mathbb{R} : y \neq 0 \text{ o } y \neq -3 \text{ o } y \neq 3\}$

i) $x^2 + (a^4 + b^4)x + a^4b^4 = 0$ j) $\{p \in \mathbb{R} : p \neq 0 \text{ o } p \neq 2\}$

k) $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ o } x \neq 2\}$ l) $\{a \in \mathbb{R} : a \neq 0\}$

5.1 b y d **5.2** a y c **5.3** a y d **5.4** b y d

6. b)

7. a) $b=0$ b) $x=\frac{5}{3}$ c) $x=9$

d) $t=0$ e) $x=0\,;\ x=-2$ f) $b=0\,;\ x=\frac{7}{5}$

g) $q<0$ h) $n=0\,;\ b=0\,;\ n=-\frac{7}{5}$ i) $a=b$

8. a) Dom: $x\in\mathbb{R}$; VN: 40

b) Dom: $\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0\}$; VN: 9

c) Dom: $\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0 \text{ o } x\neq -1\}$; VN: $\frac{2}{3}$

d) Dom: $\{y\in\mathbb{R}: y\neq 6\}$; VN: $-0{,}9$

9. a) $n+(n+1)+(n+2)$ con $n\geq 0$ o $(n-1)+n+(n+1)$ con $n\geq 1$

b) $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}$ c) $x+x^2+24$ d) $\frac{x^2+y^2}{x^2}$ con $x\neq 0$.

10. a) El producto de tres números disminuido en cuatro.

b) El triplo del cuadrado de un número disminuido en otro número.

c) El cociente de la suma de dos números, por su diferencia.

d) La cuarta parte de un número disminuido en uno.

e) La raíz cuadrada del producto de dos números.

f) El producto de un número por la diferencia de otros dos.

g) La diferencia de los cuadrados de dos números.

h) El cuadrado de la diferencia de dos números.

i) El cuádruplo de la diferencia de dos números.

j) La tercera parte del cuadrado de la suma dos números.

k) El recíproco del producto de dos números.

l) La diferencia entre el cuadrado de un número y el cubo de la suma de otros dos.

11.

No.	Yo (variable x)	Tú (variable y)
a)	$x+y=15$	
b)	$x=3y$	
c)	$x+10=y$	
d)	$y-x=20$	
e)	$x-10=y+10$	

f)	$y+7=2x$	
g)	$x=4y-2$	
h)	$3y=\frac{x}{2}$	

12*. Si x es el precio el año pasado entonces en la oferta de este año el precio será $0{,}9964x$.

13. Respuesta abierta.

14. La primera parte de la respuesta debe estar basada en el análisis de la investigación, buscar la fórmula y sustituir.

15. Respuesta abierta.

16. Respuesta abierta.

17. d)

Operaciones con polinomios

18. a) y d)

19. a) $-14b+1$ b) $-\frac{a}{5}-\frac{3b}{5}$ c) $3{,}3x-3{,}3y-3{,}4z-0{,}6a$

20. $a^3-2am^2-8am+6m^3$; Valor numérico: 4,45

21. $5m^4+11m^3n^2+11m^2n+11mn^3-17n^4$

22. $4x^3+5x^2-5x-2$

23. $-x^3+x^2+3x-11$

24. $-8a^2+5a-3b^3-a^3$

25. $5x^3-6x+6$

26*. $26a^{m-3}-33a^{m-2}+14a^{m-1}+15a^m$

27. a) F, el miembro derecho debe ser $16a^2b^2$ porque se aplica la propiedad potencia de potencia para cada factor

b) V, porque c es un denominador común para ambos sumandos.

c) F, no se cumple la propiedad distributiva en la suma de raíces.

d) F, porque el término común es c para el denominador, por ejemplo, si $a=b=c=1$ se obtiene una desigualdad, en este caso $\frac{1}{2}\neq 2$.

e) F, porque debe aplicarse la propiedad distributiva en el numerador, la a multiplica a los dos sumandos.

f) V, porque la m solo afecta a la suma que se encuentra dentro del paréntesis.

28.

A	B	A + B	A – B
$3b-4c-5$	$-2b-4c$	$b-8c-5$	$5b-5$
$x-9y-3$	$9x-3y+10$	$10x-12y+7$	$-8x-6y-13$
$9c-5d-1$	$5c-12d+8$	$14c-17d+7$	$4c+7d-9$

29. c) y d) porque puede al área del rectángulo mayor, restársele el área de los cuatro rectángulos o analizar que cada lado del rectángulo central está dado por la expresión $a-b$ y como todos son iguales corresponde a un cuadrado.

30. a) $a^3-2a^2-14a+3$ b) $6a^2+3a-9$

c) $2-a^2-a^4$ d) $2p^4-p^3+p^2-4p-2p^{-1}+2$

e) $6m^3-\frac{7}{2}m^2-3m$ f) $5\sqrt{3}a^3-\left(10\sqrt{3}-5\right)a^2+\left(5\sqrt{3}-10\right)a+5$

31. a) $m=0$ o $m=-\frac{3}{2}$ b) $p=-1$ o $p=2$ c) $a=2$

d) no existe e) $s=4$ f) $a=-\frac{3}{5}$ o $a=-1$

32. a) m^3-3m^2+3m-1 b) $b^3-6b^2+12b-8$

c) $b^3+9b^2+27b+27$ d) $125+75y+15y^2+y^3$

e) $y^3+3\sqrt{2}y^2+6y+2\sqrt{2}$ f) $p^3-\frac{3}{2}p^2+\frac{3}{4}p-\frac{1}{8}$

g) $b^6+3b^4+3b^2+1$ h) $x^{\frac{3}{2}}+3xy^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}y+y^{\frac{3}{2}}$

i) $\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x^2y^2}+\frac{3}{xy^4}-\frac{1}{y^6}$

33. Determinar el volumen de un cubo de arista $(x+4)$ u

34. a) $12z^3-60z^2+148z-127$ b) a^3-2a^2+3a-2 c) $-x^3+9x^2+x+7$

Descomposición factorial de polinomios

35. a) $Q(x)=x+8$ b) $Q(a)=a^2-5a+18$

c) $Q(a)=a^2+a+3$ d) $Q(x)=x^2-x-1$

36. a), b) y c)

37. a) $Q(x)=x^2-8x+28$; $R=-83$

b) $Q(x)=3x^2+2x-3$; $R=-1$

c) $Q(x)=4x^2+20x+101$; $R=497$

d) $Q(x)=x^3+2x^2+9x+17$; $R=32$

38*. Por $Q(x) = x^2 - 4$

39*. $k = 21$

40. a) $6\left(a-\sqrt{3}\right)\left(a+\sqrt{3}\right)$ b) $6a^2(2a-3)$

c) $(8x-3y)(8x+3y)$ d) $(5a+3y)(x-y)$

e) $7x(x+7)(x-7)$ f) $\left(\frac{3}{4}a+0{,}02\right)\left(\frac{3}{4}a-0{,}02\right)$

g) $y(y-1)\left(y^2+y+1\right)$ h) $\left(x+1+\sqrt{7}\right)\left(x+1-\sqrt{7}\right)$

i) $\left(a^2-b\right)\left(a^2+b\right)\left(a^4+b^2\right)$

41. a) $a(a+1)(a-1)$ b) $c(c+2)(c-2)$

c) $m^2(1+3m)(1-3m)$ d) $\left(\frac{1}{10}+x^3\right)\left(\frac{1}{10}-x^3\right)$

e) $(x-15)(x-4)$

f) $(x-5)(x+5)(x-4)\left(x^2+5\right)\left(x^2+\sqrt{10}\right)\left(x^2-\sqrt{10}\right)$

g) $\left(a^4+9\right)^2$ h) $(2x-3)^2$

i) $\left(3x^2-2\right)\left(2x^2+3\right)$ j) $\left(5x^3-6\right)\left(x^3+2\right)$

k) $(4x+3)(3x-4)$ l) $(5x+6)(5x+7)$

m) $\left(4x^2-15\right)\left(4x^2+7\right)$ n) $\left(4x^2+17\right)\left(4x^2+8\right)$

42. a) $2a\left(5a^2-10a+8\right)$ b) $\left(5x^3-6\right)\left(x^3+2\right)$

c) $\left(3x^2-1\right)(x-3a)$ d) $\left(a^3+10\right)(a-2)\left(a^2+2a+4\right)$

e) $a\left(\frac{4}{9}a+0{,}1\right)\left(\frac{4}{9}a-0{,}1\right)$ f) $\left(4^m-\frac{y^n}{7}\right)\left(4^m+\frac{y^n}{7}\right)$

g) $5m^3(2m-1)(2m+1)\left(4m^2+1\right)$

43. a) $(a-b+1)(a+b)(a-b)$ b) $(m-n)(8xy+1)$ c) $(a+1)\left(a^2+1\right)$

d) $\left(a^n+b^n\right)\left(a^n-b^n\right)$ e) $(n+3+c)(n+3-c)$

44. a) $(x+4)^2-16$ b) $(x-3)^2-9$ c) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

d) $\left(x-\frac{1}{12}\right)^2-\frac{1}{144}$ e) $4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-9$ f) $\left(x-\sqrt{6}\right)^2-6$

g) $(x+5)^2-25$ h) $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}$ i) $9\left(x^2+\frac{1}{3}\right)^2-1$

j) $16\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-9$ k) $100\left(x-\frac{3}{10}\right)^2-9$ l) $\left(x+\frac{1}{20}\right)^2-\frac{1}{400}$

45. a) $(x+1)^2-6$ b) $(x-2)^2-9$ c) $(x+3)^2-2$
d) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$ e) $(x-11)^2-116$ f) $(x-15)^2-341$
g) $2(x+2)^2-2$ h) $3(x+2)^2-15$

46. a) $(x-1)(x^2+x+1)$ b) $(a^2+2)(a^4-2a+4)$
c) $\left(\frac{a}{3}-b\right)\left(\frac{a^2}{9}-\frac{ab}{3}+b^2\right)$ d) $(m^4-5)(m^8+5m^4+25)$
e) $(7p+n)(49p^2-7pn+n^2)$ f) $(b^5-1)(b^{10}+b^5+1)$
g) $(3x^6+1)(9x^{10}-3x^6+1)$ h*) $(x^{2n}-y^n)(x^{4n}+x^{2n}y^n+y^{2n})$
i) $(0{,}2-a^2b^3)(0{,}04-0{,}2a^2b^3+a^4b^6)$ j) $(x^2-2y^4)(x^4+2x^2y+4y^8)$
k*) $(2a-b-3)\left[(2a-b)^2+3(2a-b)+9\right]$
l*) $(a^{2n+1}-b^{3n})(a^{4n+2}+a^{2n+1}\cdot b^{3n}+b^{6n})$

47. a) $(a+b)(x+y)$ b) $(2a-b)(x-y)$ c) $(x-2)(x+3y+1)$
d) $(a+1)(a-1)$ e) $(1-x)(1+2a)$ f) $(n+1)(a-b-1)$

48. a) $(x-1)(x+2)(x+3)$ b) $(x-1)(x+1)(x+2)$
c) $(x-1)(2x-3)(x+3)(x+1)^2$ d) $(x+1)^2(x-4)(x+1)$
e) $(a-1)(a^2-3a+5)$ f) $(b-2)(b^2-b+2)$
g) $(c-1)(c+3)(c+2)$ h) $(x-2)^3$
i) $(a-2)^2(a+1)$ j) $(x+2)(x^2-2x-8)$
k) $(y-1)(y^3-10y^2-10y+8)$ l) $(m-2)(m-3)(m^2+m+2)$
m) $(x-5)(x+2)(x^2-2x-1)$

49. a) $(3b+c)(2a+1)$ b) $(2a+5b)(2q-p)$
c) $(13-a^2b^2)(70ab-3)$ d) $(3y+z)(5+2x)$
e) $(2g+h)(5d+2c)$ f) $(x-3a)(3x^2-1)$
g) $(x-z)(\sqrt{2}y-z)$ h) $(m^2-3n)(4am-1)$
i) $(a+b+x)(a+b-x)$ j) $(x+3)(x-7)$

50*. Respuesta abierta.

Epígrafe 2.2

Ecuaciones lineales y modulares

1.1 b) **1.2** a)
2. a)
3. c)

4. La transposición del 7 en todos los casos es incorrecta, lo correcto es multiplicar toda la ecuación por 2 o transponer el 7 y buscar mínimo común múltiplo.

5. a) $x = -4$ b) $x = 7$ c) $x = -\frac{1}{4}$ d) $x = 3$ e) $x = 3$

6. a) $x = \{13\}$ b) $x = \left\{-\frac{49}{15}\right\}$ c) $x = \{\}$

7. a) $\frac{25}{9}$ b) -9

8. a) $S = \{-8;8\}$ b) $S = \left\{-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right\}$ c) $S = \{-4;4\}$ d) $S = \{-8;2\}$

e) S = Ø f) $S = \left\{\frac{8}{3};-4\right\}$ g) $S = \{-14;32\}$ h) $S = \left\{-\frac{13}{6};\frac{1}{2}\right\}$

i) S = Ø

Ecuaciones cuadráticas

9. a) $x_1 = \frac{1}{3};\ x_2 = 2$

b) $x_1 = -8;\ x_2 = -3$

c) $x_1 = -\frac{7}{9};\ x_2 = 2$

d) $x_1 = 3\ ;\ x_2 = -1$

e) $x_{1,2} = 1 + \sqrt{7}$

f) $x_{1,2} = -\frac{19}{2} \pm \sqrt{\frac{329}{2}}$

10. Infinitos.

11. $x = -3$

12. a) $S = \left\{-3+\sqrt{5};-3-\sqrt{5}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2};\frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}\right\}$

c) $S = \left\{\sqrt{2}\right\}$

13. $x = 14$ dm

14.* Como no conoces las longitudes del cuadrado las nombrarás x. Quiere esto decir que el área del cuadrado la puedes expresar como x^2.

Y el de cada rectángulo blanco como $2x$, si conoces que al área total es de 21 u^2.

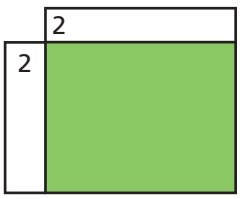


Fig. 2.a

Entonces, la ecuación que permite hallar el área del cuadrado es $x^2 + 4x = 21$ y la longitud del lado del cuadrado es de 3 u.

15.* a) En el pomo faltan 9 pastillas.
b) Cada día debía tomar 3 pastillas.

16. Respuesta abierta con el uso del *software* Para comprender la matemática.

17. Fueron restauradas 970 obras más en el primer año con respecto al segundo.

18. a) Habían prestado sus servicios hasta la fecha 1 455 integrantes del contingente.
b) Habían recibido alta médica por el personal cubano aproximadamente 1 834 pacientes.
c) Respuesta abierta.

19. La primera semana. Equivale a 600 kg la recolección.

20. Se distribuyeron por las farmacias 340 tipos de estos medicamentos.

21. a) 928 b) 37,5 %

22. a) 320 b) 400

23. a) 75 b) 2,6 %

24. $S = \{0\}$

25. a) No son raíces. b) No son raíces. c) Si, son raíces.

26. a) $x^2 - 11x + 30 = 0$ b) $x^2 + 20x + 64 = 0$ c) $x^2 + 19x - 120 = 0$
d) $x^2 + 2x - 15 = 0$ e) $x^2 - 19x + 60 = 0$ f) $x^2 + ax - 2a = 0$
g) $x^2 - 7bx + 10b^2 = 0$

27. a) $x^2 + 3x - 10 = 0$ b) $x^2 - x - 6 = 0$
c) $x^2 - 4$ d) $x^2 + 5x + 6 = 0$
e) $x^2 - \frac{7}{8}x + \frac{3}{32}$ f) $x^2 + \left(a^3 + a^2\right)x - a^6 = 0$
g) $x^2 + (13\sqrt{3} + 1)\ x + \left(14\sqrt{3} - 42\right)$ h) $x^2 + \left(a^4 + b^4\right)x + a^4b^4 = 0$
i) $x^2 + \sqrt{5}x + 10 = 0$

28. $ 55,00

Inecuaciones

29. a) $x \geq -8$ b) $x < -2$ c) $x \leq -4$

30. a) $\{x \in \mathbb{R}; -3 \leq x \leq 4; x \neq 1\}$ o $[-3;4] \setminus \{1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -0,5 \text{ o } x \geq 5\}$ o $(-\infty;-0,5] \cup [5;\infty)$
c) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -4 \text{ o } x \geq 12,7; x = 0\}$ o $(-\infty;-4] \cup [12,7;\infty) \cup \{0\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} : x > 5; x = -2\}$ o $(5;\infty) \cup \{-2\}$

31.1 c) **31.2** c)

32. a) $\{x \in \mathbb{R} : x > -5\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{9}{8}\right\}$ c) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{8}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{25}{2}\right\}$ e) $\{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} : x > -6\}$

g) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{2}{5}\right\}$ h) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{1}{4}\right\}$ i) $S = \varnothing$

j) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -3\}$ k) $\{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$ l) $\left\{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{61}{26}\right\}$

33. Respuesta utilizando el GeoGebra.

34. a) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 3{,}5\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} : -2 < x < \frac{1}{2}\right\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : -4 < x < 5 : x - 1\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ o } x > 4\}$

e) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

35.1 c) **35.2** c) **35.3** b)

36. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} : -3 < x < \frac{13}{3}\right\}$ b) $S = \varnothing$ c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{3}{5}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq -2 \text{ o } x \geq \frac{6}{5}\right\}$ e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{5}{3} \text{ o } x > 3\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{8}{11} \text{ o } x > 2\right\}$

37. a) $S = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 9\}$ b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{2}{3} \text{ o } x > 3\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} : < \frac{2}{3} \text{ o } x > 3\right\}$ d) $S = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x < 2\}$

e) $S = \varnothing$ f) $S = x \in \mathbb{R}$

38. a) $S = x \in \mathbb{R}$ b) $S = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 4\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{1}{2} \text{ o } x > 1\right\}$ d) $S = \varnothing$ e) $S = x \in \mathbb{R}$

f) $S = x \in \mathbb{R}$ g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{3} \text{ o } x > 1\right\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} : x < -14 \text{ o } x > 1\}$ i) $S = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 5\}$

La representación gráfica de las soluciones es en GeoGebra

39. a) $x^2 - 3x - 10 > 0$ b) $x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{5}{2} \geq 0$ c) $x^2 - \frac{x}{4} - \frac{3}{4} \leq 0$

40. a) $\text{Dom}\left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{3}{2}\right\}$ b) $\text{Dom}\left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{1}{6}\right\}$ c) $\text{Dom}\left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{2}\right\}$

41. $\frac{1}{5} < a < \frac{1}{4}$

42. 22 o 23 personas

Epígrafe 2.3

Fracción algebraica. Simplificación de fracciones algebraicas

1. a) F, porque debe ser $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ o } x \neq 1\}$. Dado que para $x = 1$ no está definida la fracción algebraica.

b) V, porque en el numerador $x^2 - 3x - 4$ toma valor cero para $x_1 = -1$ o $x_2 = 4$.

c) V, porque es uno de los valores que indefinen la fracción.

d) F, porque al factorizar el numerador y el denominador, no tienen factores comunes.

2. I) $a_1 = 2$ II) $a_1 = 0$ o $a_2 = 4$

3. a) F, porque el trinomio $x^2 + 10x + 25$ solo toma valor cero para $x_0 = -5$ y no para cualquier valor real de la variable.

b) F, porque el denominador de la fracción se anula para $x_0 = 3$, que es el valor que la indefine.

c) V, porque se realizó un número par de cambios de signo, luego, se obtiene una fracción equivalente a la dada.

4.1 a) $\frac{x+1}{x}$ **4.2** d) $\frac{x}{x+1}$ **4.3** b) –1

5. a) $\frac{2b-1}{2b+1}$ b) $\frac{a-b}{a}$ c) $-\frac{x+2}{5}$ d) $\frac{x-2}{4x^2+6x+9y^2}$

6. A-H; B-F; C-I; D-E

Operaciones con fracciones algebraicas

7. b)

8. a) 1 b) $\frac{x^2(x+2)}{(x^2-3)(3x-1)}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $x-3$

e) $\frac{a+6}{a(a+2)(a-6)}$ f) $\frac{t+4}{(t+3)(5t+1)}$ g) $-\frac{(x+2)(x-1)}{x+1}$ h) $\frac{2-x}{x+1}$

9. $\frac{3y}{y^2+3}$

10. Respuesta abierta.

11. Respuesta abierta.

12. –1

13.1 d); **13.2** c); **13.3** d)

14. a) I ; b) II c) $\frac{x}{x+1}$

d) Al calcular el valor numérico se obtiene –4 y el conjunto numérico más restringido al que pertenece es a los números enteros.

15. a) $N(x)$ está definido para $\{x \in \mathbb{R} : x \neq -5\}$ y $M(x)$ para $\{x \in \mathbb{R} : x \neq -5$ o $x \neq 3$ o $x \neq -2\}$.

b) P = 2

16. Respuesta abierta.

17. $P(a) = \frac{8a(2a-3)}{a-2}$

18. Respuesta abierta.

19. a) $\frac{3a+2b}{a(a-5b)}$ b) Aproximadamente 0,29

20. a) A y B b) $\frac{3x}{2x+1}$

21. a) $M = \frac{y+1}{y+2}$

b) Respuesta abierta.

22. a) Incorrecta; debe ser $10a^2$ b) Correcta

c) Incorrecta, debe ser $(x-4)^2$ d) Incorrecta, debe ser $a^2 - b^2$;

e) Correcta, debe ser $5(m+n)^2$ f) Correcta

23. a) $\frac{3a-5x}{3x^2}$ b) $\frac{c+3}{6c^2}$ c) $\frac{5a^2-3ab-8a-2b}{(a+b)^2}$

d) $\frac{3a^2+8a}{(a-2)(a+b+2)}$ e) $\frac{5}{x(x-6)}$ f) $\frac{3x^2+27x+15}{(x^2-3)(x-2)}$

g) $\frac{6-2x}{3x(x-4)}$ h) $\frac{6x^2+x+4}{x(x^2+1)}$ i) $-\frac{5x+6}{(x-3)(x-2)}$

24. a) $\frac{3}{a}$ b) $\frac{3a^2+3ab-b}{a^2-b^2}$ c) $\frac{2(7b-2a)}{15ab}$

d) $\frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$ e) $\frac{1}{x^2-1}$ f) $\frac{45x^3-18xy^2+40zy^2}{30x^2yz}$

g) 0 h) $\frac{1}{y-5}$ i) $\frac{9-2b}{(b-2)(b+10)}$

j) $\frac{x^2+11x+6}{(x-1)(x+1)}$

25. a) $\frac{4-x}{(x-1)^2}$ b) $\frac{2x+3}{2(3x+1)}$ c) $\frac{3c^2-4c-15}{(c+3)(c^2-1)}$ d) $\frac{y^2+2y+10}{3y+3}$

Ecuaciones e inecuaciones fraccionarias

26. Respuesta abierta ofrecida por la explicación del estudiante

27. Procedimiento seguido por el estudiante al resolver la ecuación

Pasos

1	$x^2-2x=x(x-2)$
2	Dom$\{x\in\mathbb{R}: x\neq 2 \text{ o } x\neq 0\}$
3	mcm $x(x-2)$
4	$x(x-1)-x^2+2=0$
5	$x^2-x-x^2+2=0$
6	$-x+2=0$
7	$-x=-2$
8	$x=2$
9	$S=\varnothing$

La descripción se hará por el estudiante

28. a) $S=\{8\}$ b) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ c) $S=\left\{-\frac{5}{4}\right\}$ d) $S=\varnothing$

e) $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$ f) $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$ g) $S=\left\{\frac{4}{3}\right\}$ h) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

i) $S=\{-7;3\}$ j) $S=\left\{\frac{4}{3}\right\}$ k) $S=\left\{-\frac{34}{7}\right\}$ l) $S=\left\{\frac{22}{13}\right\}$

m) $S=\{-1\}$ n) $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ ñ) $S=\{-2\}$

29. a) $r=\frac{E-iR}{i}$ b) $v=\frac{u}{1-u}$ c) $r_2=\frac{-R\cdot r_1}{R-r_1}$ d) $p'=\frac{fp}{p-f}$

30. a) $x_1=\frac{1}{2}; x_2=8; x_1\in\mathbb{Q}_+; x_2\in\mathbb{N}$ b) $x=4; x\in\mathbb{N}$

c) $x=-1; x\in\mathbb{Z}$ d) $x=0; x\in\mathbb{N}$

e) $x=\frac{7}{3};\ x\in\mathbb{Q}_+$ f) $x=\frac{1}{3}; x\in\mathbb{Q}_+$

31. a) $x_1\approx 9{,}43;\ x_2\approx 0{,}43$

b) Ningún valor de x satisface la igualdad.

c) La igualdad se satisface para todo valor de x tal que $x\neq -2$ o $x\neq 2$.

d) $x_1=7;\ x_2=-3$

e) Ningún valor de x satisface la ecuación.

f) Ningún valor de x satisface la ecuación.

g) $x = 7$

h) $x_1 = -\frac{5}{3}; x_2 = 2$

32. $[-1;0]$

33. Los pasos que se deben seguir para encontrar los valores para los cuales no están definidas las expresiones son los siguientes:

a)

1. Se compara con cero el cociente que se encuentra dentro del radicando, por medio del signo menor que.
2. Se determinan los ceros del numerador y del denominador.
3. Se traza la recta para realizar el análisis de los signos.
4. Se comienza con signo negativo porque en una de las funciones lineales asociadas la pendiente es negativa y se alternan los signos.
5. Se determina en el gráfico el conjunto de valores que cumple la condición de ser negativos y que indefinen.
6. Se escribe analíticamente el conjunto de valores de x que cumplen la condición exigida en la pregunta que en este caso es:
   $\{x \in \mathbb{R} : x = 0;\ x < -1 \text{ o } x > 1\}$

b)

1. Se compara con cero la expresión algebraica que se encentra dentro del radicando, por medio del signo menor que.
2. Se determinan los ceros del numerador y del denominador.
3. Se traza la recta para realizar el análisis de los signos.
4. Se comienza con signo positivo de derecha a izquierda porque la pendiente de las rectas correspondientes al numerador y denominador son positivas.
5. Se determina en el gráfico el conjunto de valores que cumple la condición de ser negativos y que indefinen.
6. Se escribe analíticamente en conjunto de valores de x que cumplen la condición exigida en la pregunta $\left\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{3}{4}\right\}$

34. a) $\{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ o } x > 2\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 4\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \text{o} x > 3\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 1; x \neq -4\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} : x = -9; x > 7\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \text{o} x > 9\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ h) $\{x \in \mathbb{R} : x < 2 \text{o} 4 < x < 5\}$

35. a) $(-\infty;-2) \cup (1;\infty)$ b) $(-6;7]$

c) $\left(0;\frac{1}{2}\right]$ d) $\left(\frac{13}{3};8\right)$ e) $(-\infty;-1)\cup\left[-\frac{2}{3};\infty\right)$

36. a) I b) III c) II d) II e) IV

37. a) $[-1;3)\cup[8;\infty)$ b) $\left(2;\frac{7}{2}\right)$ c) $(-\infty;3)\cup(0;4)$

d) $(-\infty;-3)\cup\left[-\frac{1}{2};2\right)$ e) $\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)\cup(4;\infty)$

38. Respuesta abierta

38.1 $S=\left\{x\in\mathbb{R}:-1\leq x<\frac{3}{2}\right\}$

39. a-C b-E c-A d-B e-D f-F

40. $\left\{x\in\mathbb{R}:x<\frac{1}{2}\text{ o }x\geq 3;x\neq -3\right\}$

41. $\{x\in\mathbb{R}:x\geq 4\}$

42. a) $\left\{x\in\mathbb{R}:-3<x\leq\frac{5}{2}\right\}$ b) $\{x\in\mathbb{R}:x<-3\text{ o }-2<x<2\}$

c) $\{x\in\mathbb{R}:x<7\}$ d) $\left\{x\in\mathbb{R}:x>\frac{1}{5}\right\}$

43.1 c

43.2 b

43.3 c

44.* Respuesta abierta.

45. a-E b-D c-F d-A e-H f-G g-G h-B

46. Se debe señalar como error:

- Incluye los valores extremos o sea a 7 y la desigualdad es estricta
- El cero del denominador es 4, no –4

Epígrafe 2.4

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

1.1 c) **1.2** a)

2. a) $S=\{(3;-2)\}$ b) $S=\left\{\left(-\frac{1}{7};-\frac{25}{7}\right)\right\}$ c) $S=\{(6;12)\}$

d) $S=\{(2;-2)\}$ e) $S=\{(-4;1)\}$ f) $S=\{(10;5)\}$

3. d

Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables

4. a) $x=-2; y=\frac{21}{9}; z=\frac{60}{9}$ b) $x=1; y=2; z=3$

c) $x=\frac{11}{3}; y=\frac{8}{13}; z=\frac{46}{13}$ d) $x=3; y=1; z=7$

e) $D=-2; E=-1; F=1$ f) $D=-\frac{225}{7}; E=\frac{131}{17}; F=\frac{58}{17}$

5. a) $x=\frac{1}{5}; y=\frac{8}{5}; z=\frac{26}{5}$ b) $D=\frac{13}{2}$; $E=0$; $F=-11$

c) $D=3; E=5; F=2$ d) $x=3; y=0; z=2$

e) $D=-5; E=3; F=2$

f) No existen valores de las variables que satisfagan el sistema.

g) $x=3; y=0; z=-2$ h) $x=1; y=2; z=3$

i) $x=-1; y=-1; z=-1$

6. a) $\left(4;\frac{21}{2};6\right)$ b) No existe c) $(2;-1;3)$

7.* Respuesta utilizando GeoGebra.

7.1 a) $(-3;1;-2)$ b) $(-3;1;-2)$

8.* $a=1; b=2; c=-1$

Sistemas de ecuaciones cuadráticas

9. c

10. a) $S=\{(9;-6);(1;2)\}$ b) $S=\varnothing$

c) $S=\left\{(4;-1);\left(-3;\frac{4}{3}\right)\right\}$ d) $S=\left\{\left(4\sqrt{2};4\sqrt{2}\right)\left(-4\sqrt{2};-4\sqrt{2}\right)\right\}$

e) $S=\{(0;4);(-3;1)\}$ f) $S=\{(4;-2);(0;2)\}$

g) $S=\{(0;4);(1;2)\}$ h) $S=\{(7;3)\}$

i) $S=\{(2;1);(1;-2)\}$ j) $S=\{(3;1);(3;-1);(-3;1);(-3;-1)\}$

k) $\{(6;2);(2;6)\}$

11. a) $(0;0)$ y $(1;1)$ b) $(2;4)$ y $(-1;1)$

c) No existen los pares d) $(3;4)$; $(-3;-4)$;$(-3;4)$; $(3;-4)$

e) $(6;2)$; $(6;-2)$;$(-6;-2)$; $(-6;2)$ f) (25;4) y (4;25)

12. a) C b) D c) A d) B

13. Respuesta abierta.

14. Los valores de a y b son $a = 0$ y $b = 5$.

15.* a) El parámetro a puede aceptar como valores los divisores de 14 o sea 1; 2; 7 y 14.

b) Respuesta abierta con el uso del GeoGebra.

Resolución de problemas que se modelan mediante sistemas de ecuaciones

16. Anachel llevó $ 400 y $ 200 Anaimel.

17. En la primera etapa Noah e Ian acumularon 20 puntos y 26 puntos respectivamente.

18. a) Fueron asignadas 40 casas a cada estudiante.

b) A las 12:00 m Lázaro había visitado 24 casas.

19. a) Se utilizaron 1 000 pomos de 1,5 L y 2 000 de 2 L.

b) Fueron envasados en pomos de 2 L el 72 % aproximadamente del total de litros.

20. a) Los lados miden 13 cm, 12 cm y 5,0 cm.

b) Como la suma de los cuadrados de los lados menores es igual al cuadrado del lado mayor, el triángulo es rectángulo.

21. Col 28 kcal, berro 21 kcal y espinaca 32 kcal.

22. a) La brigada A recogió 240 q, la brigada B 300 q y la brigada C 260 q.

b) La de mejor rendimiento fue la brigada A.

23. Están dedicadas 14 ha al cultivo de viandas, 16 ha a las hortalizas y 30 ha a los árboles frutales.

24. En la Maestría de Ciencias Exactas estudia 43 profesores, en la de Ciencias Naturales 10 y en otras maestrías 11.

25. El centro recreativo estudiantil posee 10 mesas de cuatro sillas, 8 mesas de seis sillas y 6 mesas de diez asientos.

26. El bombillo ahorrador consume 20 Wh, el fluorescente 40 Wh y el incandescente 60 Wh.

27. a) Se quedarían sin bailar 10 hombres.

b) Las mujeres representan el 20 % y los menores 50 %, luego la participación de los menores supera en un 30 % al de las mujeres.

28. a) Una bolsa plástica demora en degradarse 150 años, un envase de aluminio 350 años y una tarjeta magnética 1 000 años.

b) Respuesta abierta.

29. El precio del artículo A es de $ 30.00, el del artículo B $ 40.00 y el del artículo C $ 60.00.

30. Respuesta abierta.
31. De cada uno de los lingotes debe coger 25 g, 50 g y 25 g.
32. b)
33. Las longitudes de las diagonales son 12 cm y 5,0 cm.
34.* $x = 6,4 \quad y = 3,6$
35. Las dimensiones del terreno son 50 m y 120 m respectivamente y el área es de $6\,000\ m^2$.
36. Menores 8; mujeres 2 y hombres 2.
37. Las longitudes de los lados del triángulo son 5,0 dm, 7,0 dm y 3,0 dm.
38. La razón entre las áreas del cuadrado y el rectángulo es $\frac{16}{21}$.
39. $a = 2\sqrt{5}\,u \ \ y \ \ b = \sqrt{5}\,u$
19. Respuesta abierta.

Respuestas de los ejercicios del capítulo

1. Cantidad de pulpa de guanábana o chirimoya $x + 58$
Cantidad de leche: x
Cantidad de azúcar blanca: $\frac{x}{2} - 49$
2. $5x^2 + 35x + 53$
3. b)
4. $\frac{a - 2b}{10}$; Valor numérico: $-4,2$
5. 1 ⇔ c; 2 ⇔ a; 3 ⇔ f; 4 ⇔ b; 5 ⇔ a
6. a) $y = 0; y = -9$ b) $x < -8$ c) $a = 1; a = -1$ d) $x = 0; x = 2$ e) $a = 0$
7. Respuesta abierta.
8. A ⇔ 3; B ⇔ 5; C ⇔ 2; D ⇔ 1; E ⇔ 4
9. a) V b) F c) F d) F e) V
10. $a = -4 \quad b = -3 \quad c = 4$
11. $b = -4 \ \ y \ \ c = 2\,;\ d > 0$
12.* Respuesta abierta.
13. $\{l \in \mathbb{R} : l > 0\}$
14. a) $A = (5 - l)\sqrt{10l - 25}$ b) $Df : \left(\frac{5}{2}; 5\right)$
15. $h = \frac{A_t - 2\pi r^2}{\pi r}$

16.

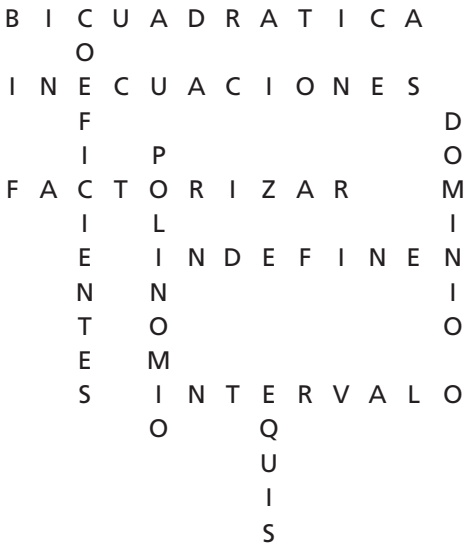


Fig. 2.b

17. d)

18. d)

19. a) F, porque no son términos semejantes, el resultado es: $8x + xy$

b) F, porque para simplificar se debe aplicar la propiedad distributiva de la división, el resultado es: $2 + \frac{y}{2x}$

c) F, porque son factores y no se aplica la propiedad distributiva, el resultado es 5 mm

d) F, porque se suman los coeficientes de los términos semejantes, la solución debe ser: $-3x^2 - 7x + 1$

20.* Respuesta abierta.

21. a) Se efectuó la adición de los términos que no son semejantes.

b) La expresión no tiene más simplificación, porque la variable que se eliminó no es factor.

c) La expresión no tiene más simplificación, porque las variables eliminadas no son factores.

d) Las ecuaciones no son equivalentes.

e) Para resolver la ecuación no se igualó a cero.

22. Respuesta abierta.

23. A-b; B-c; C-d; D-a

24. c)

25. b)

26. b)

27. $A(x) = -\frac{4}{3}x^4 - 10x^3 + 26x^2 - \frac{16}{3}x - 10$

28. $k = -\frac{13}{3}$

29.* $P = -\frac{3}{2}$

30.* Respuesta abierta.

31. $k = -\frac{3}{2}$

32. c)

33. a) $(x-3)^2 - 9$ b) $\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ c) $(y+z)^2 - 2yz$

d) $\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 - p$ e) $(q+9)^2 - 18q^2$ f) $(x+1)^2 + 4$

34. a) $(a+b)(x+y)$ b) $(1-x)(1+2a)$

c) $(x-2)(x+1+3y)$ d) $(a+1)(a-1)$

e) $(x+1)(5+x^2)(25-5x^2+x^4)$ f) $(a+2)(a-2)(3-x)(9+3x+x^2)$

g) $(a-1)(a-8)(a^2+8a+64)$ h) $(b-1)^2(b^2+b+1)$

35. a) $V = \sqrt{\frac{2P}{C_d \cdot R_o}}$ b) $b_2 = \frac{2A}{b_1 \cdot h}$ c) $V_2 = (V_1 \cdot t \cdot K) + V_1$

d) $V_2 = \frac{T_2 \cdot P_1 \cdot V_1}{T_1 \cdot P_2}$ e) $C = \frac{IJA + IJB}{(100 - IJ)}$

36. a) $S = \{2;4\}$ b) $S = \left\{-\frac{1}{9};2\right\}$ c) $S = \left\{0;\frac{2}{3}\right\}$ d) $S = \{-1{,}175;1{,}165\}$

37. Respuesta abierta, demostración.

38. d)

39. $m_1 = -1$; $m_2 = \frac{7}{5}$

40. $k = 6$; el valor de la otra raíz es $x_2 = \frac{2}{3}$

41. $k = 10$; el valor de la otra raíz es $x_2 = 4$

42. Respuesta abierta.

43. $x^2 - 18x - 144$

44. $b = 1$ y $c = 6$

45.

Ecuación	Una solución si	Dos soluciones si	No tiene solución real
a) $x^2 + kx + 10k = 0$	$k = 0$; $k = 40$	$k < 0$ o $k > 0$	$0 < k < 40$
b) $x^2 + kx + 9 = 0$	$k = \pm 6$	$k < -6$ o $k > 6$	$-6 < k < 6$
c) $x^2 + 6x + k = 0$	$k = 9$	$k < 9$	$k > 9$
d) $\frac{3k}{x} - \frac{2x}{k} = 0$	No existe valor de k.	$k \in \mathbb{R} : k \neq 0$	No existe valor de k.

46. A-e B-c C-g D-a
E-d F-h G-b H-f

47. Respuesta abierta.

48.* $a = -4$ $b = 3$ o $b = -2$ $c = 2$ o $c = -3$

49.* $a = 2$ o -1 $b = -1$ o 2 $c = 2$ $d = 5$

50.* $a = -1$

51. $104°F < y°F \leq 122°F$

52. $\left(\frac{3}{4};1\right) \cup (2;3]$

53. Respuesta abierta.

54.* $m_1 = 3$; $m_2 = -1$

55. a) $S = \{(4;1)\}$ b) $S = \{(2;-2)\}$ c) $S = \{(3;-5)\}$

d) $S = \left\{\left(-\frac{1}{3};\frac{14}{9}\right)\right\}$ e) $S = \left\{\left(\frac{7}{3};\frac{23}{9}\right)\right\}$

f) $S = \left\{\left(-\frac{15}{4};\frac{3}{2}\right)\right\}$ g) $S = \left\{\left(-\frac{1}{a-1};\frac{1}{a-1}\right)\right\}$

56. a) $S = \{(16;52;73)\}$ b) $S = \{(3;4;5)\}$ c) $S = \{(1;2;3)\}$

d) $S = \{(-2;3;5)\}$ e) $S = \left\{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)\right\}$ f) $S = \{(10;-5;6)\}$

La verificación de la respuesta se realiza utilizando el GeoGebra

57.* Respuesta abierta.

58. a) No existe ninguna terna $(x; y; z)$ que satisfaga simultáneamente las tres ecuaciones.

b) $\left(\frac{47}{27};-\frac{5}{27};-\frac{34}{27}\right)$ c) $\left(-\frac{41}{30};-\frac{1}{30};\frac{13}{6}\right)$

59. a) $(-3;9)$ y $(2;4)$ b) $(16;69)$ y $(-2;-3)$

c) $\left(\frac{1}{5};-\frac{32}{5}\right)$ y $(4;5)$ d) $\left(-\frac{1}{3};-\frac{11}{3}\right)$ y $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

60. Tiene una solución para $k=\pm 5$, dos soluciones para $k<-5$ o $k>5$
Ninguna solución para $-5<k<5$

61.* El sistema no tiene solución para $m\in\mathbb{R}: -\frac{\sqrt{5}}{3}<m<\frac{\sqrt{5}}{3}$

62.* $a=2b$

63.* Se le pueden asignar a a los divisores de 8 que cumplen la condición de $1''\ a''\ 8$

64.* $a=1\ \ y\ \ b=-5$

65. a) Había en el Principado de Andorra 39 colaboradores, en Italia 90 y en Catar 229.

b) Brindaron su colaboración en la región de Piamonte 38 colaboradores.

c) Respuesta abierta.

66. Hasta el piso de Milena hay 180 escalones.

67. Fueron propuestos como mejores estudiantes 20 hembras y 12 varones.

68. a) Hay 20 gallinas y 120 cerdos.

b) Se necesitan 5 días para cumplir el convenio.

69. a) El camión de 18 t dio diez viajes y el de 25 t; 5 viajes

b) Hubiese tenido que dar 13 viajes.

70. a) Hay sembradas 10 ha de ajo, 12 ha de col y 8 ha de lechuga.

b) Se deben lograr 47 t/ha al finalizar la cosecha.

71. a) Séptimo recogió 96 kg; Octavo 54 kg y Noveno 75 kg de materia prima.

b) En más de 27 kg

72. Hay en el cajero 50 billetes de 10 CUP, 25 billetes de 20 CUP y 20 billetes de 50 CUP.

73. Los diámetros son de 0,5 cm; 0,85 cm y 1,125 cm

74. Las cantidades son 38 oz; 70 oz y 90 oz.

75. El número es 234.

76. El camión que carga 3 t da 2 viajes, el que carga 4 t da 3 viajes y el que carga 7 t da 1 viaje.

77. Para transportar los contenedores del tipo A se necesita dar 4 viajes; para los del tipo B 5 viajes y para los del tipo C 4 viajes.

78. Para 30 raciones se necesitan: 3 000 g de pan, 340 g de aceite y 40 g de ajo.

79.* Los números pueden ser

Si *c* es	*a*	*b*	número
0	5	1	510
1	6	2	621
2	7	3	732
3	8	4	843
4	9	5	954

80. El área del cuadrado representa el 80 % del área del rectángulo.

Capítulo 3

Epígrafe 3.1

Sistematización del concepto de función. Formas de representación de una función

1. a), c) y d). Porque a cada elemento del conjunto *A* le corresponde un único elemento en el conjunto *B*.

2. b), d), f), g), h) y j)

3. Los conjuntos de pares ordenado *A* y *C* son funciones. No son funciones los conjuntos de pares ordenados *B* y *D* porque se repite la primera componente en más de un par ordenado.

4. a) $f_1 = \{(x;y) : y = 2x + 1; x \in \mathbb{R}\}$

b) $f_2 = \left\{(x;y) : y = \frac{1}{x}; x \in \mathbb{R}; x \neq 0\right\}$

c) $f_3 = \{(x;y) : y = x^2; x \in \mathbb{R}\}$

d) $f_4 = \{(x;y) : y = \sqrt{x}; x \in \mathbb{N}\}$

5.1 Tabla 3.4: representa una función porque a cada año le corresponde una cantidad de graduados única.
Tabla 3.5: no representa una función porque al estudiante Carlos le corresponde dos asignaturas (no se cumple la unicidad).

Tabla 3.6: representa una función porque a cada estudiante le corresponde un día de la semana único.

5.2 La tabla 3.4 y la tabla 3.5

6. a), c), d) y f)

Función lineal y función cuadrática

7. a), b), f)

8.

Ecuación	Valor de los parámetros		Algunos pares ordenados de la función
	m	n	
$y = 2x + 1$	2	1	$(0;1),\left(\frac{1}{2};0\right),(-0,3;0,4),(1;3),\left(\sqrt{2};2\sqrt{2}+1\right)$
$y = 2x$	2	0	$(0;0),\left(-\frac{1}{2};-1\right),(-0,3;-0,6),(1;2),\left(\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$
$y = x$	1	0	$(0;0),\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right),(-0,3;-0,3),(1;1),\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$
$y = 1$	0	1	$(0;1),\left(-\frac{1}{2};1\right),(-0,3;1),(x \in \mathbb{R};1),\left(\sqrt{2};1\right)$

9. a) $y = 2x - 4$; b) $y = -3x - 5$; c) $y = -x + 6$; d) $y = -4x + 13$; e) $y = 2x - 2$; f) $y = 2x + 4$

10. a) Están alineados b) Están alineados c) No están alineados

Recuerda que...

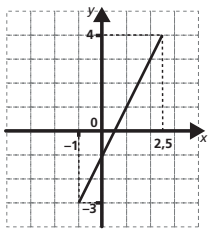
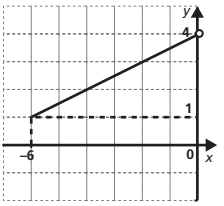
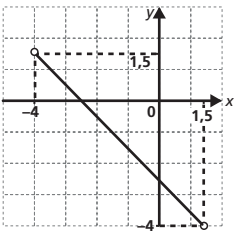
Dos puntos siempre están alineados, y para determinar si tres lo están podemos utilizar varias vías, dos de ellas son las siguientes:

1. Hallar la ecuación de función lineal que contiene dos de ellos y verificar si el tercero pertenece a dicha función.
2. Aplicar la siguiente propiedad: "Si m_{AB} y m_{BC} son los valores de las pendientes de las rectas AB y BC respectivamente y $m_{AB} = m_{BC}$, entonces los puntos A, B y C están alineados".

11. a) no es función; b) es una función, pero no es lineal; c) es una función lineal (La explicación es abierta)

12. La función representada por el gráfico a) (La fundamentación es abierta)

13.

a) 	b) 	c) 
Fig. 3.a (I)	**Fig. 3.a** (II)	**Fig. 3.a** (III)
Conjunto imagen: $\{y \in \mathbb{R} : -3 \leq y \leq 4\}$	Conjunto imagen: $\{y \in \mathbb{R} : 1 \leq y < 4\}$	Conjunto imagen: $\{y \in \mathbb{R} : -4 < y < 1{,}5\}$
$-1 \leq x < \frac{1}{2}$ negativa $\frac{1}{2} < x \leq 2{,}5$ positiva	Positiva en su dominio de definición	$-4 < x < -2{,}5$ positiva $-2{,}5 < x < 1{,}5$ negativa

14. El valor de $a \approx 1{,}58$

15. a) 40 °C b) La mezcla A c) $f : T = -t + 40; g : T = 2t + 10$; d) 40 min
e) A las 8:10 a.m. ambas mezclas habían alcanzado los 30 °C.

16. a) Si $t \geq 0$ es el tiempo medido desde que partió el segundo automóvil, entonces las ecuaciones son:
Primer automóvil: $s_1(t) = 70t + 35$
Segundo automóvil: $s_2(t) = 90t$;
b) El segundo automóvil alcanza al primero en 1 h y 45 min.

17. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si} -4 \leq x < 4 \\ x + 1 \text{ si} & 4 < x \leq 6 \end{cases}$

18. a) $V_0 = 4{,}02 \text{ dm}^3$; $k \approx 0{,}013$
b) La ecuación es $V(T) = 4{,}02 + 0{,}052T$ entonces el volumen para $T = 30°\text{C}$ es $V \approx 5{,}6 \text{ dm}^3$
c) $T \approx 27°$

19. a), c), d), e)

20. a) abajo; V(1;8) b) $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$ c) $y_0 = 6$ d) $x = 1$
e) $A(0;6)$ y $B(3;0)$

21. c) $y = -2(x-1)^2 + 8$

22. a) V,
b) V,

c) F (su gráfico no es simétrico respecto al origen de coordenadas o porque para los elementos opuestos de su dominio no se obtienen imágenes opuestas),

d) V,

e) F (porque en ese intervalo es negativa ya que la parábola abre hacia arriba),

f) F (porque la imagen de *f* en ese dominio de definición es el intervalo real $y \in [-8;10)$.

23. ¿Cómo hacerlo?

Crear un deslizador en la pantalla gráfica del GeoGebra para cada parámetro, dar entrada a la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ y obtener el gráfico (figura 3.b). Al ejecutar los deslizadores podrás observar la ecuación que se obtiene en cada caso y las variaciones del gráfico.

Debes elaborar un resumen tomando como base los incisos del ejercicio, el cual debes compartir con tu profesor de matemática y los compañeros del aula.

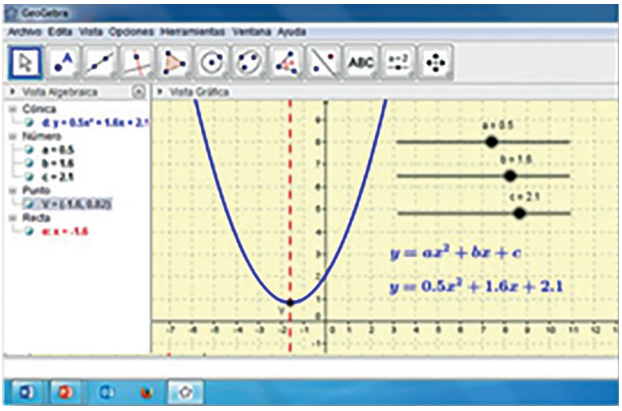


Fig. 3.b

24. ¿Cómo hacerlo?

Crear un deslizador en la pantalla gráfica del GeoGebra para cada parámetro, dar entrada a la ecuación $y = a(x+d)^2 + e$ y obtener el gráfico (figura 3.c). Al ejecutar los deslizadores podrás observar la ecuación que se obtiene en cada caso y las variaciones del gráfico.

Es importante que elabores un resumen sobre las conclusiones que obtengas, el cual debes compartir con tu profesor de matemática y los compañeros del aula.

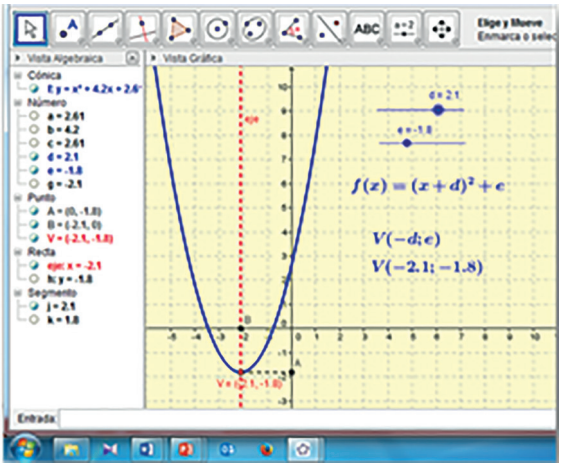
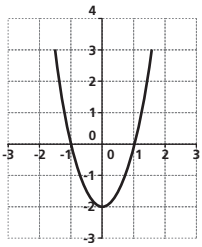
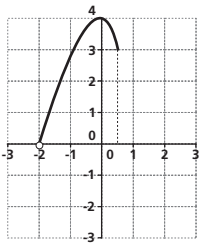
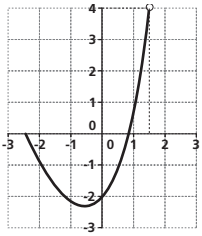
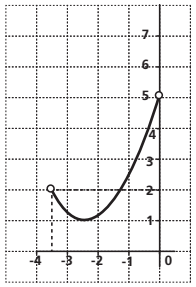


Fig. 3.c

25.

	$f_1(x) = 2x^2 - 2$ $(x \in \mathbb{R})$	$f_2(x) = -x^2 + 4$ $(-2 \le x \le 1)$	$f_3(x) = x^2 + x - 2$ $(-2 \le x < 2)$	$f_4(x) = (x+2)^2 + 1$ $(-3 < x < 0)$
Conjunto Imagen	$\{y \in \mathbb{R} : y \ge -2\}$	$\{y \in \mathbb{R} : 0 \le y \le 4\}$	$\{y \in \mathbb{R} : -2,25 \le y < 4\}$	$\{y \in \mathbb{R} : 1 \le y < 5\}$
Ceros	$x_1 = -1$ y $x_2 = 1$	$x_1 = -2$	$x_1 = -2$ y $x_2 = 1$	No tiene
Intercepto con el eje "y"	$y_0 = -2$	$y_0 = 4$	$y_0 = -2$	No lo interseca
Gráfico	 **Fig. 3.d(I)**	 **Fig. 3.d(II)**	 **Fig. 3.d(III)**	 **Fig. 3.d(IV)**
Signos	$x < -1$ positiva $x > 1$ positiva $-1 < x < 1$ negativa	$-2 < x \le 1$ positiva	$-2 < x < 1$ negativa $1 < x < 2$ positiva	$-3 < x < 0$ positiva

Valor máximo y mínimo de la función	Valor máximo no tiene Valor mínimo $f(0) = -2$	Valor máximo $f(0) = 4$ Valor mínimo $f(-2) = 0$	Valor máximo No tiene Valor mínimo $f(-0,5) = -2,25$	Valor máximo No tiene Valor mínimo $f(-2) = -1$

26.

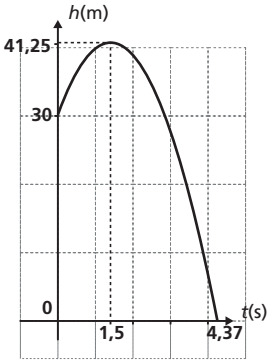
a) 41,25 m	b) Aproximadamente 4,37 s	c) $0 \text{ s} < t \leq 1,5 \text{ s}$	d) 

Fig. 3.e

Epígrafe 3.2

1. a), b) y d)

2. a) $\text{Dom } g = \mathbb{R}$; $\text{Im} g = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$ b) Comprobar que da 1

c) Interseca al eje de las abscisas en el punto (1;0) y al de las ordenadas en el punto (0;1).

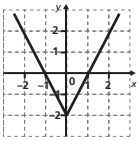
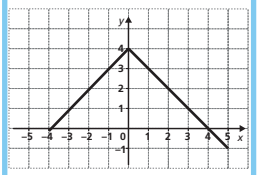
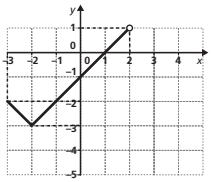
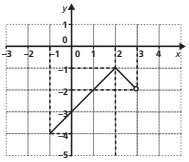
d) $x > 1$

e) Para $x \neq 1$ las imágenes de la función son positivas.

3. b) (La fundamentación es abierta)

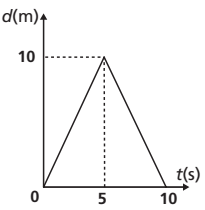
4.

	$f_1(x) = 2\lvert x\rvert - 2$ $(x \in \mathbb{R})$	$f_2(x) = -\lvert x\rvert + 4$ $x \in [-4;5]$	$f_3(x) = \lvert x+2\rvert - 3$ $-3 \leq x < 2$	$f_4(x) = -\lvert x-2\rvert - 1$ $x \in [-1;3)$
Conjunto Imagen	$\{y \in \mathbb{R} : y \geq -2\}$	$\{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 4\}$	$\{y \in \mathbb{R} : -3 \leq y < 1\}$	$\{y \in \mathbb{R} : -4 \leq y \leq -1\}$
Ceros	$x_1 = -1$ y $x_2 = 1$	$x_1 = -4$ y $x_2 = 4$	$x_1 = 1$	No tiene
Intercepto con el eje "y"	$y_0 = -2$	$y_0 = 4$	$y_0 = -1$	$y_0 = -3$

Gráfico	 **Fig. 3.f** (I)	 **Fig. 3.f** (II)	 **Fig. 3.f** (III)	 **Fig. 3.f** (IV)
Intervalo en que la función es monótona decreciente	$x < 0$	$0 < x \leq 5$	$-3 \leq x < -2$	$2 < x < 3$
Intervalo en que la función tiene signo negativo	$-1 < x < 1$	$4 < x \leq 5$	$-3 \leq x < 1$	$-1 \leq x < 3$
Valor máximo y mínimo de la función	Valor máximo No tiene Valor mínimo $f(0) = -2$	Valor máximo $f(0) = 4$ Valor mínimo $f(5) = -1$	Valor máximo No tiene Valor mínimo $f(2) = -3$	Valor máximo $f(2) = -1$ Valor mínimo $f(1) = -4$

5. a) $\leftrightarrow 2$; b) $\leftrightarrow 4$; c) $\leftrightarrow 3$; d) $\leftrightarrow 6$; e) $\leftrightarrow 5$; f) $\leftrightarrow 1$

6.

a) 10 s	b) 14 m	c) 6,0 m	d)  **Fig. 3.g**	e) 1 min y 20 s

Epígrafe 3.3

Función cúbica

1. a), b), d), e), h)

2. a) $a = 216$ b) $a = -\frac{2}{3}$ c) $a = 0{,}1$ d) $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$ e) $a = -\sqrt{2}$

3. a) V ;

b) F (porque la imagen de la función cúbica $\left(y = x^3\right)$ es el conjunto de todos los números reales) o porque cualquiera sea el número real $y \neq 0$ existe el número real $x = \sqrt[3]{y}$;

c) V;

d) F (porque una reflexión del gráfico de la función cúbica sobre el eje de las ordenadas no lo transforma en sí mismo);

e) V ;

f) F (porque para $x_0 = 0$ no es negativa).

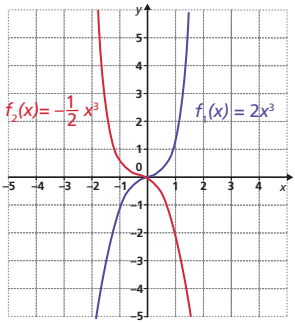
4. a) $(-1;-1)$, b) $(-5;-125)$, c) $(1;1)$, d) $(0;0)$, e) $(2;8)$, f) $\left(\sqrt[3]{3};3\right)$, g) $\left(-\frac{\sqrt[3]{9}}{3};-\frac{1}{3}\right)$

5.1

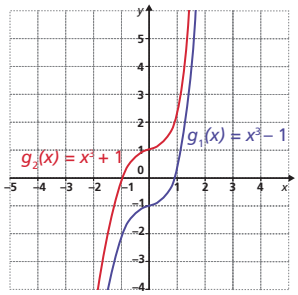
Función	f_1	f_2	g_1	g_2	h_1	h_2	p_1	p_2
Cero	$x_1 = 0$	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = -1$	$x_1 = 2$	$x_1 = -3$	$x_1 = 1$	$x_1 = -2$

5.2

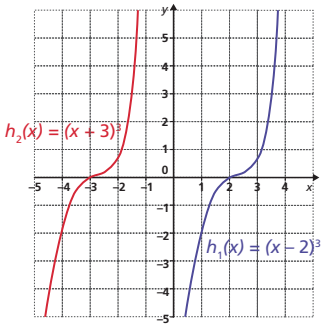
a) **Fig. 3 h** (I)



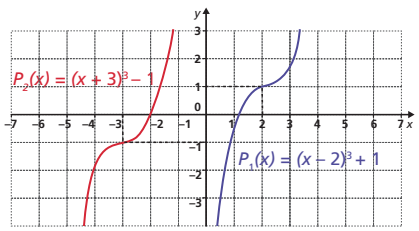
b) **Fig. 3 h** (II)



c) **Fig. 3 h** (III)



d) **Fig. 3.h** (IV)



5.3

Parámetro *a*	Parámetro *c*	Parámetro *b*
■ $a < 0$: reflexión del gráfico de f sobre el eje x para obtener el de $y = ax^3$. ■ $0 < a < 1$: contracción del gráfico de f respecto al eje x para obtener el de $y = ax^3$. ■ $a > 1$: dilatación del gráfico de f respecto al eje x para obtener el de $y = ax^3$.	El gráfico de $y = x^3 + c$ se obtiene mediante una traslación de $\|c\|$ unidades del gráfico de f en la dirección del eje de las ordenadas y en el mismo sentido que tiene el signo de c.	El gráfico de $y = (x + b)^3$ se obtiene mediante una traslación de $\|b\|$ unidades del gráfico de f en la dirección del eje de las abscisas y en el sentido contrario al signo de b.

6. ¿Cómo hacerlo?

Crear un deslizador en la pantalla gráfica del GeoGebra para cada parámetro, dar entrada a la ecuación $y = a(x + b)^3 + c$ y obtener su gráfico (figura 3.i). Al ejecutar los deslizadores cambian los valores de los parámetros y podrás observar las ecuaciones que se obtienen en la vista algebraica y las variaciones en el gráfico.

Es importante que elabores un resumen sobre las conclusiones que obtengas, el cual debes compartir con tu profesor de matemática y los compañeros del aula.

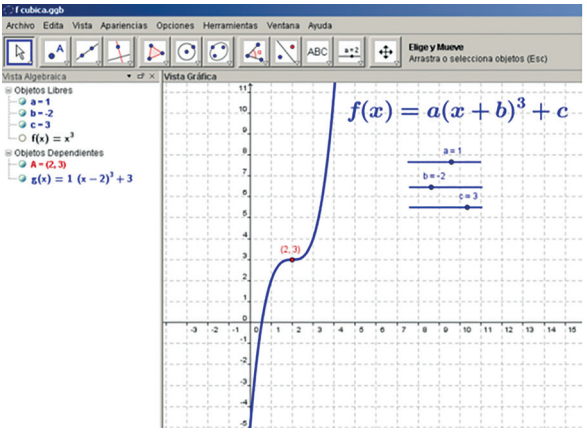
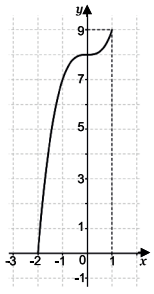
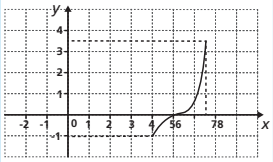
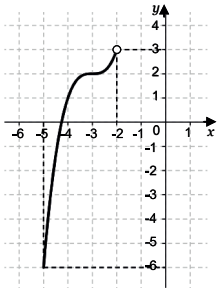
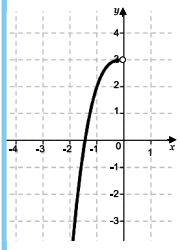


Fig. 3.i

7.

	a) $f(x) = x^3 + 8$	b) $g(x) = (x-5)^3$	c) $h(x) = (x+3)^3 + 2$	d) $i(x) = x^3 + 3$
Dominio de definición	$\{x \in \mathbb{R} : -2 \le x \le 1\}$	$\{x \in \mathbb{R} : 4 \le x \le 6,5\}$	$\{x \in \mathbb{R} : -5 \le x < -2\}$	$\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$
Conjunto Imagen	$\{y \in \mathbb{R} : 0 \le y \le 9\}$	$\{y \in \mathbb{R} : -1 \le y \le 3,375\}$	$\{y \in \mathbb{R} : -6 \le y < 3\}$	$\{y \in \mathbb{R} : y < 3\}$
cero	$x_0 = -2$	$x_0 = 5$	$x_0 \approx -4,26$	$x_0 \approx -1,44$
signo	$-2 < x \le 1$ Positiva	$4 \le x < 5$ Negativa $5 < x \le 6,5$ Positiva	$-5 \le x < -4,26$ Negativa $-4,26 < x < -2$ Positiva	$x < -1,44$ Negativa $-1,44 < x < 0$ Positiva
Gráfico	 **Fig. 3.** j (I)	 **Fig. 3** j (II)	 **Fig. 3.j** (III)	 **Fig. 3.j** (IV)

8. a) $y = (x-1,5)^3$; b) $y = (x-2)^3$; c) $y = (x+3)^3 - 2$; d) $y = x^3 + 2$

9. a) f, g y q; b) p; c) f y g; d) f y g; e) h y r; f) r

Función de proporcionalidad inversa

10. a), b), d), e), h), i)

11. a) $a = \frac{1}{5}$ b) $a = -\frac{5}{4}$ c) $a = 1,1$ d) $a = \sqrt{2}$ e) $a = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ f) $a = -500$

12. a) V; b) V; c) V;

d) F (porque su gráfico se aproxima al eje abscisas para valores muy grandes de x, pero no llega a cortar al eje);

e) V; f) F (porque es positiva)

13. a) ; b) ; d) ; e) ; h)

Simétricos (–1;–1) $\left(-3;-\frac{1}{3}\right)$ $\left(-\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right)$ (2;0,5) $\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{4};-2\sqrt[3]{4}\right)$

14. a) ceros: f_1 y f_2 no tienen ceros; $g_1 : x_0 = 1$; $g_2 : x_0 = -1$;

h_1 y h_2 no tienen ceros; $p_1 : x_0 = 1$; $p_2 : x_0 = -\frac{5}{3}$

b) Representación gráfica

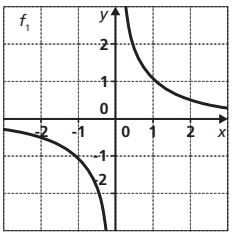


Fig. 3.k.(I)

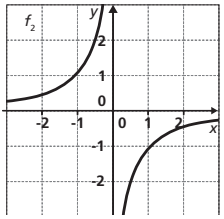


Fig. 3.k.(II)

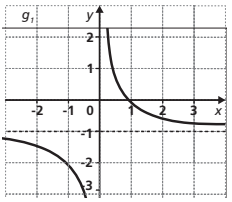


Fig. 3.k.(III)

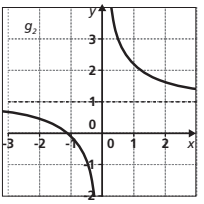


Fig. 3.k.(IV)

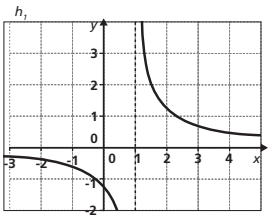


Fig. 3.k.(V)

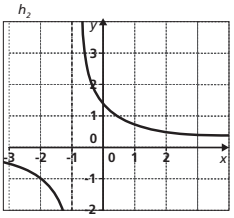


Fig. 3.k.(VI)

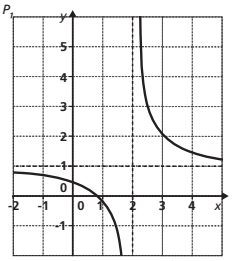


Fig. 3.k.(VII)

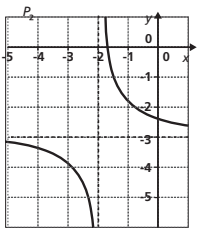


Fig. 3.k.(VIII)

c)

Parámetro *a*	Parámetro *c*	Parámetro *b*
▪ $a < 0$: reflexión del gráfico de f sobre el eje x para obtener el de $y = \frac{a}{x}$. ▪ $0 < a < 1$: contracción del gráfico de f respecto al eje x para obtener el de $y = \frac{a}{x}$. ▪ $a > 1$: dilatación del gráfico de f respecto al eje x para obtener el de $y = \frac{a}{x}$.	El gráfico de $y = \frac{1}{x} + c$ se obtiene mediante una traslación de $\lvert c \rvert$ unidades del gráfico de f en la dirección del eje de las ordenadas y en el mismo sentido que tiene el signo de c.	El gráfico de $y = \frac{1}{x + b}$ se obtiene mediante una traslación de $\lvert b \rvert$ unidades del gráfico de f en la dirección del eje de las abscisas y en el sentido contrario al signo de b.

d) y e)

Función	¿Es impar?	Ecuación de las asíntotas	Punto de intersección de las asíntotas
f_1	Sí	A. horizontal: $y = 0$ A. vertical: $x = 0$	(0;0)
f_2	Sí	A. horizontal: $y = 0$ A. vertical: $x = 0$	(0;0)

g_1	No	A. horizontal: $y = -1$ A. vertical: $x = 0$	(0;–1)
g_2	No	A. horizontal: $y = 1$ A. vertical: $x = 0$	(0;1)
h_1	No	A. horizontal: $y = 0$ A. vertical: $x = 1$	(1;0)
h_2	No	A. horizontal: $y = 0$ A. vertical: $x = -1$	(–1;0)
p_1	No	A. horizontal: $y = 1$ A. vertical: $x = 2$	(2;1)
p_2	No	A. horizontal: $y = -3$ A. vertical: $x = -2$	(–2;–3)

Para fundamentar la paridad de una función debes utilizar la definición o el significado geométrico.

Recuerda que...

Una función f es impar si satisface la siguiente condición:
Si x es un elemento del dominio de definición de f, entonces $-x$ también lo es y $f(x) = -f(x)$
Geométricamente significa que el gráfico de f es centralmente simétrico respecto al origen de coordenadas.

15. ¿Cómo hacerlo?

Crear un deslizador en la pantalla gráfica del GeoGebra para cada parámetro, dar entrada a la ecuación $y = \frac{a}{x+b} + c$ y obtener el gráfico (figura 3.l). Al ejecutar los deslizadores podrás observar la ecuación que se obtiene en cada caso y las variaciones del gráfico.

Es importante que elabores un resumen sobre las conclusiones que obtengas, el cual debes compartir con tu profesor de matemática y los compañeros del aula.

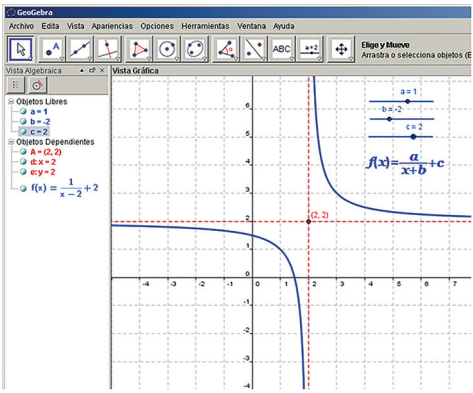
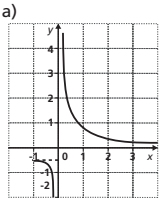
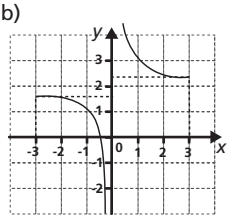
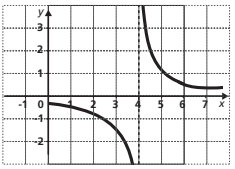
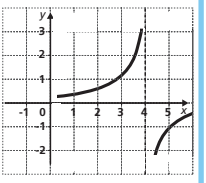
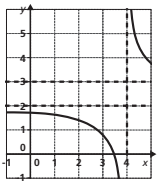


Fig. 3.l

16

Ecuación de la función	Dominio de definición	Conjunto Imagen	Monotonía	Ceros
a) $f(x)=\frac{0,5}{x}$	$\{x\in\mathbb{R}: x\geq -1; x\neq 0\}$	$\{y\in\mathbb{R}: y\leq -0,5 \text{ o } y>0\}$	Decreciente para $-1\leq x<0$ Decreciente para $x>0$	No tiene
b) $g(x)=\frac{1}{x}+2$	$\{x\in\mathbb{R}: -3\leq x\leq 3; x\neq 0\}$	$\left\{y\in\mathbb{R}: y\leq \frac{5}{3} \text{ o } y\geq \frac{7}{3}\right\}$	Decreciente para $-3\leq x<0$ Decreciente para $0<x\leq 3$	$x=-0,5$
c) $h(x)=\frac{1}{x-4}$	$\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0; x\neq 4\}$	$\{y\in\mathbb{R}: y\leq -0,25 \text{ o } y>0\}$	Decreciente para $0\leq x<4$ Decreciente para $x>4$	No tiene
d) $i(x)=-\frac{1}{x-4}$	$\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0; x\neq 4\}$	$\{y\in\mathbb{R}: y<0 \text{ o } y\geq 0,25\}$	Creciente para $0\leq x<4$ Creciente para $x>4$	No tiene
e) $J(x)=\frac{1}{x-4}+2$	$\{x\in\mathbb{R}: 0\leq x\leq 5; x\neq 4\}$	$\{y\in\mathbb{R}: y\leq 1,75 \text{ o } y\geq 3\}$	Decreciente para $0\leq x<4$ Decreciente para $4<x\leq 5$	$x=3,5$
a)  **Fig. 3.m** (I)	b)  **Fig. 3.m** (II)	c)  **Fig. 3.m** (III)	d)  **Fig. 3.m** (IV)	e)  **Fig. 3.m** (V)	

17. a) $y=\frac{1}{x+2}-1$ b) $y=\frac{1}{x-1}+2$ c) $y=\frac{1}{x-2}+1$ d) $y=\frac{1}{x+1}-2$

Generalización de las funciones potenciales de exponente entero

18.

	$y=x^4$	$y=x^{-2}$	$y=x^{-3}$	$y=x^5$	$y=x^3+1$	$y=(x-2)^{-1}+3$
$(0;0)$	X			X		
$(0;1)$					X	

$(1;1)$	X	X	X	X		
$(-1;-1)$			X	X		
$(-1;1)$	X	X				
$(1;2)$					X	X
$(2;3)$						
$\left(\frac{1}{2};8\right)$			X			

19. 1→b; 2→d; 3→g; 4→e; 5→f; 6→c; 7→h; 8→a

20. 1→d; 2→a; 3→h; 4→b; 5→f; 6→g; 7→e; 8→c

Respuesta de los ejercicios del capítulo

1. a) no es función, b) $f=\{(x;y): y=x^2-2x; x\in\mathbb{R}\}$,

c) $f=\{(x;y): y=x^3+x^2; x\in\mathbb{R}\}$,

d) no es función, e) $f=\left\{(x;y): y=\frac{1}{x^2}; x\in\mathbb{R}, x\neq 0\right\}$,

f) $f=\{(x;y): y=\sqrt{x}; x\in\mathbb{R}, x\geq 0\}$

2. a), c) y d) 3. a), b), d) y f)

4. a) $y=-5x-1$ b) $y=x+1$; b) $y=-2x+3$

5.

a)

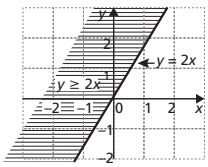


Fig. 3.n (I)

b)

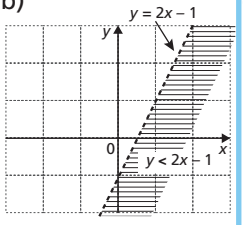


Fig. 3.n (II)

c)

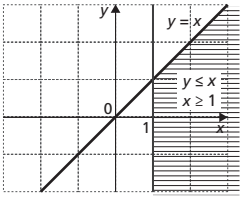


Fig. 3.n (III)

d)

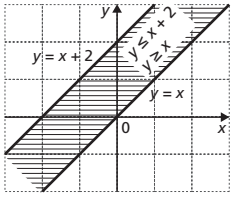


Fig. 3.n (IV)

6. a) Impar (su gráfico es centralmente simétrico respecto al origen de coordenadas).

b) Par (su gráfico es axialmente simétrico respecto al eje de las ordenadas).

c) Par (su gráfico es axialmente simétrico respecto al eje de las ordenadas).

d) Impar (su gráfico es centralmente simétrico respecto al origen de coordenadas).

e) Impar (su gráfico es centralmente simétrico respecto al origen de coordenadas).

f) No es par ni impar (su gráfico no es simétrico respecto al eje de las ordenadas, ni al origen de coordenadas).

7. Las siguientes funciones están dadas por sus ecuaciones:

a)

	Dominio e imagen	Ceros	Paridad	Monotonía	Signo
a) $y = 2 - x$	$\text{Dom } f = \mathbb{R}$ $\text{Im} f = \mathbb{R}$	$x_1 = 2$	No es par ni impar	Decreciente en todo su dominio de definición	Positiva $x < 2$ Negativa $x > 2$
b) $y = (x+1)^2 - 4$	$\text{Dom } f = \mathbb{R}$ $\text{Im} f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq -4\}$	$x_1 = -3$ $x_2 = 1$	No es par ni impar	Creciente $x > -1$ Decreciente $x < -1$	Positiva $x < -3$ Positiva $x > 1$ Negativa $-3 < x < 1$
c) $y = \lvert x-2 \rvert - 3$	$\text{Dom } f = \mathbb{R}$ $\text{Im} f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq -3\}$	$x_1 = -1$ $x_2 = 5$	No es par ni impar	Creciente $x > 2$ Decreciente $x < 2$	Positiva $x < -1$ Positiva $x > 5$ Negativa $-1 < x < 5$
d) $y = (x-1)^3$	$\text{Dom } f = \mathbb{R}$ $\text{Im} f = \mathbb{R}$	$x_1 = 1$	No es par ni impar	Creciente en todo su dominio de definición	Positiva $x < 1$ Negativa $x > 1$
e) $y = \dfrac{1}{x+2} - 1$	$\text{Dom } f = \{y \in \mathbb{R} : x \neq -2\}$ $\text{Im} f = \{y \in \mathbb{R} : y \neq -1\}$	$x_1 = -1$	No es par ni impar	Decreciente para $x < -2$ Decreciente para $x > -2$	Positiva $-2 < x < -1$ Negativa $x > -1$ Negativa $x < -2$

b) Representación gráfica

a)

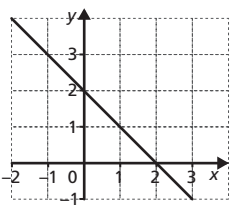


Fig. 3.ñ (I)

b)

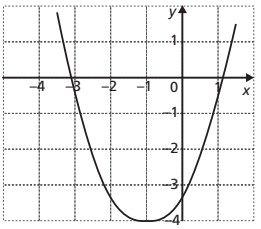


Fig. 3.ñ (II)

c)

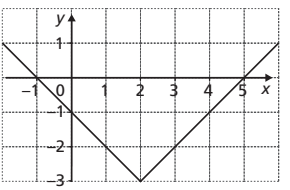


Fig. 3.ñ (III)

d)

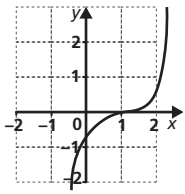


Fig. 3.ñ (IV)

e)

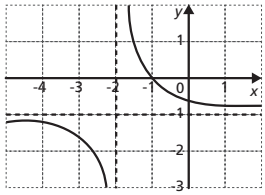
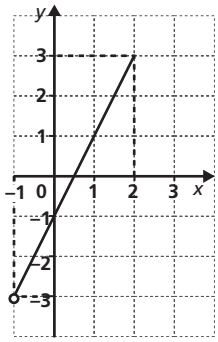


Fig. 3.ñ (V)

8. a).

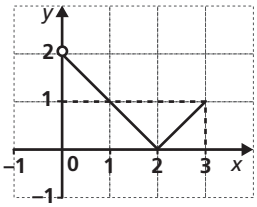
a)



$\text{Im} f_1 = \{y \in \mathbb{R} : -3 < y \leq 3\}$

Fig. 3.o (I)

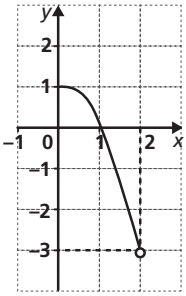
b)



$\text{Im} f_2 = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y < 2\}$

Fig. 3.o (II)

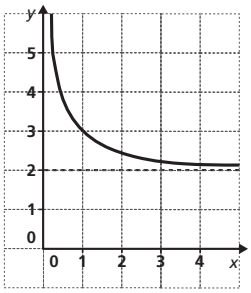
c)



$\text{Im} f_3 = \{y \in \mathbb{R} : -3 < y \leq 1\}$

Fig. 3.o (III)

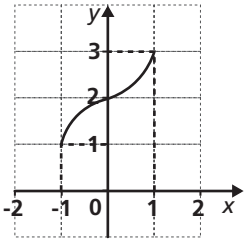
d)



$\text{Im} f_4 = \{y \in \mathbb{R} : y > 2\}$

Fig. 3.o (IV)

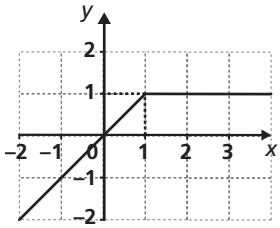
e)



$\text{Im} f_5 = \{y \in \mathbb{R} : 1 \leq y \leq 3\}$

Fig. 3.o (V)

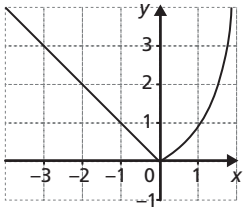
f)



$\text{Im} f_6 = \{y \in \mathbb{R} : y \leq 1\}$

Fig. 3.o (VI)

g)



$\text{Im} f_7 = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$

Fig. 3.o (VII)

b), c) , d)

Función	Conjunto imagen	Intervalo en que es positiva	Valor máximo y mínimo
f_1	$\text{Im}f_1 = \{y \in \mathbb{R} : -3 < y \leq 3\}$	$0{,}5 < x \leq 2$	Vmáx $f_1(2) = 3$ V mín No tiene
f_2	$\text{Im}f_2 = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y < 2\}$	$0 < x \leq 3; x \neq 2$	V máx No tiene V mín $f_2(2) = 0$
f_3	$\text{Im}f_3 = \{y \in \mathbb{R} : -3 < y \leq 1\}$	$0 \leq x < 1$	Vmáx $f_3(0) = 1$ V mín No tiene
f_4	$\text{Im}f_4 = \{y \in \mathbb{R} : y > 2\}$	$x > 0$	V máx No tiene V mín No tiene
f_5	$\text{Im}f_5 = \{y \in \mathbb{R} : 1 \leq y \leq 3\}$	$-1 < x \leq 1$	Vmáx $f_5(1) = 3$ V mín $f_5(-1) = 1$
f_6	$\text{Im}f_6 = \{y \in \mathbb{R} : y \leq 1\}$	$x > 0$	Vmáx $f_6(1) = 1$ V mín No tiene
f_7	$\text{Im}f_7 = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$	$x \in \mathbb{R}; x \neq 0$	V máx No tiene V mín $f_7(0) = 0$

9. a) F porque existen elementos del conjunto de partida a los cuales les corresponden más de un elelemto del conjunto de llegada. Por ejemplo, el número 4 tiene infinitos múltiplos.

b) V

c) F porque existe un elemento del conjunto de partida el cual es 2 que no tiene correspondiente en el conjunto de llegada ya que para 2 no está definida la fracción $\frac{1}{x-2}$.

d) F porque la función es decreciente ya que la gráfica tiene pendiente positiva.

e) V

f) F porque no se cumple que $f(-x) = f(x)$.

g) V

h) F porque es positiva para $x > -2$. No puede incluirse el –2 ya que para este valor la función toma el valor de cero.

i) V

j) F porque si $a < 0$ la función alcanza valor máximo en la abscisa del vértice de la parábola pues abre hacia abajo.

k) V

10. d)

11. a) $y = \dfrac{1}{x-3} + 2$

b) $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\}$

c) $\{y \in \mathbb{R} : y \neq 2\}$

d) $x > 3$ o $x < 2{,}5$

e) $x = 3$

12. a) \$ 55 900,00 b) 1 000 dispositivos c) C = \$ 110,00

13.

a) 86 °F

b) 32 °F

c) Aproximadamente a –17 °C

d)

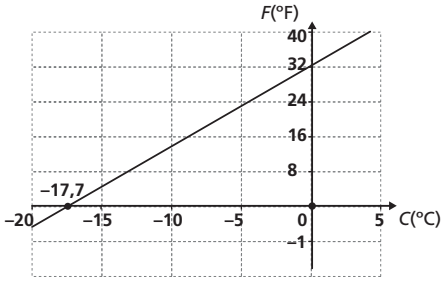


Fig. 3.p

14.1 d) $g(x) = 14 + 10x$

14.2 5 semanas.

14.3 Respuesta abierta.

15.

a) $0{,}35x + 0{,}2y = 70\ ;\ 0 < x < 200$

b) $y = f(x) = -1{,}75x + 350$
(x y y representan las cantidades de alimentos P y Q, respectivamente)

c) Debe consumir 175 g del alimento Q.

d)

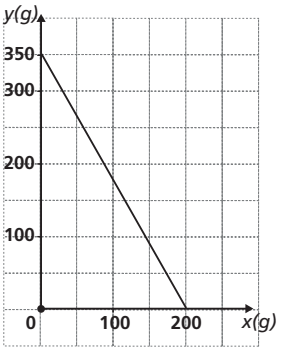


Fig. 3.q

16.

a) $x = 3,4 \;\; ; \;\; y = 3,4$

b) Producto máximo: $P = 11,56$

c)

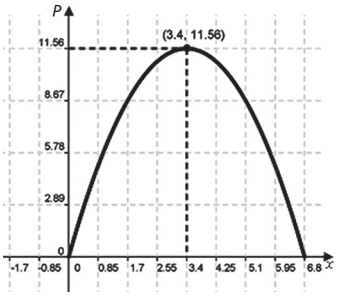


Fig. 3.r

17.1 a) Cuadrática y lineal; b) 1 h; c) Velocidad máxima: 60 km/h; d) Aproximadamente 30 min; e) Mantuvieron una velocidad constante de 6 km/h.

17.2 $V(t) = -60\ t^2 + 120\ t$

18.

a) El terreno rectangular de perímetro P = 800 m de mayor área es un cuadrado de lado $a = 200$ m.

b) 4,0 hm^2

19. El terreno tendrá 8,0 m de ancho por 16 m de largo y su área será A = 128 m^2.

Capítulo 4

Epígrafe 4.1

Las razones trigonométricas de ángulos agudos en un triángulo rectángulo

1.	a.			b.		
		$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$	$\operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5}$		$\operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{13}$	$\operatorname{sen}\beta = \frac{5}{13}$
		$\cos\alpha = \frac{4}{5}$	$\cos\beta = \frac{3}{5}$		$\cos\alpha = \frac{5}{13}$	$\cos\beta = \frac{12}{13}$
		$\tan\alpha = \frac{3}{4}$	$\tan\beta = \frac{4}{3}$		$\tan\alpha = \frac{12}{5}$	$\tan\beta = \frac{5}{12}$
		$\cot\alpha = \frac{4}{3}$	$\cot\beta = \frac{4}{3}$		$\cot\alpha = \frac{5}{12}$	$\cot\beta = \frac{12}{5}$

		$\sec\alpha = \frac{5}{4}$	$\sec\beta = \frac{5}{3}$		$\sec\alpha = \frac{13}{5}$	$\sec\beta = \frac{13}{12}$
		$\csc\alpha = \frac{5}{3}$	$\csc\beta = \frac{5}{4}$		$\csc\alpha = \frac{13}{12}$	$\csc\beta = \frac{13}{5}$
	c.	$\text{sen}\,\alpha = 0{,}686$	$\text{sen}\beta = 0{,}729$	d.	$\text{sen}\,\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\text{sen}\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$
		$\cos\alpha = 0{,}729$	$\cos\beta = 0{,}686$		$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$	$\cos\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
		$\tan\alpha = 0{,}94$	$\tan\beta = 1{,}064$		$\tan\alpha = 2$	$\tan\beta = \frac{1}{2}$
		$\cot\alpha = 1{,}064$	$\cot\beta = 0{,}94$		$\cot\alpha = \frac{1}{2}$	$\cot\beta = 2$
		$\sec\alpha = 1{,}37$	$\sec\beta = 1{,}457$		$\sec\alpha = \sqrt{5}$	$\sec\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$
		$\csc\alpha = 1{,}457$	$\csc\beta = 1{,}37$		$\csc\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$	$\csc\beta = \sqrt{5}$
	e.	$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$	$\text{sen}\beta = \frac{1}{3}$	f.	$\text{sen}\,\alpha = \frac{15}{17}$	$\text{sen}\beta = \frac{8}{17}$
		$\cos\alpha = \frac{1}{3}$	$\cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$		$\cos\alpha = \frac{8}{17}$	$\cos\beta = \frac{15}{17}$
		$\tan\alpha = \sqrt{2}$	$\tan\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$		$\tan\alpha = \frac{15}{8}$	$\tan\beta = \frac{8}{15}$
		$\cot\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cot\beta = \sqrt{2}$		$\cot\alpha = \frac{8}{15}$	$\cot\beta = \frac{15}{8}$
		$\sec\alpha = \sqrt{3}$	$\sec\beta = \frac{3\sqrt{2}}{2}$		$\sec\alpha = \frac{17}{8}$	$\sec\beta = \frac{17}{15}$
		$\csc\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\csc\beta = \sqrt{3}$		$\csc\alpha = \frac{17}{15}$	$\csc\beta = \frac{17}{8}$

2.	$\text{sen}\beta = \frac{7}{25}$	$\cos\beta = \frac{24}{25}$	$\tan\beta = \frac{7}{24}$	$\cot\beta = \frac{24}{7}$	$\sec\beta = \frac{25}{24}$	$\csc\beta = \frac{25}{7}$
	$\text{sen}\gamma = \frac{24}{25}$	$\cos\gamma = \frac{7}{25}$	$\tan\gamma = \frac{24}{7}$	$\cot\gamma = \frac{7}{24}$	$\sec\gamma = \frac{25}{7}$	$\csc\gamma = \frac{25}{24}$

3. $\operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan\beta = 1$; $\cot\beta = 1$; $\sec\beta = \sqrt{2}$; $\csc\beta = \sqrt{2}$

4. a) $\cos \propto = \frac{4}{5}$, $\tan \propto = \frac{3}{4}$, $\csc \propto = \frac{5}{3}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$

b) $\operatorname{sen}\beta = \frac{5}{13}$, $\cot\beta = \frac{12}{5}$, $\sec\beta = \frac{13}{12}$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{13}$

c) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\cot\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$

d) $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\beta = 1, \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Se pueden construir infinitos triángulos que satisfagan la condición: a), es el triángulo *BCA* de hipotenusa c = 2 u y catetos $a = 1$ u y $b = \sqrt{3}$ u.

b), c), d) y e) respuesta abierta

6. Construcción de un ángulo que satisfaga el valor de la razón. Los valores de las razones de α son:

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$; $\cos\alpha = \frac{12}{13}$; $\tan\alpha = \frac{5}{12}$; $\cot\alpha = \frac{12}{5}$; $\sec\alpha = \frac{13}{12}$

$\csc\alpha = \frac{13}{5}$

7. Se pueden construir todos los triángulos semejantes con el de hipotenusa c = 4,0 cm y catetos $a = 3{,}0$ cm y $b = \sqrt{7}$ cm, satisfacen la condición de los ángulos α y β.

$\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{4}$; $\cos\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$; $\tan\beta = \frac{3\sqrt{7}}{7}$; $\cot\beta = \frac{\sqrt{7}}{3}$; $\sec\beta = \frac{4\sqrt{7}}{7}$; $\csc\beta = \frac{4}{3}$.

8. Se pueden construir todos los triángulos semejantes con el de hipotenusa $c = \sqrt{10}$ cm y catetos $a = 1{,}0$ cm y $b = 3{,}0$ cm, satisfacen la condición de los ángulos α y β; $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$; $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\tan\alpha = \frac{1}{3}$; $\cot\alpha = 3$; $\sec\alpha = \frac{\sqrt{10}}{3}$; $\csc\alpha = \sqrt{10}$.

9. $\operatorname{sen}\gamma = \frac{4}{5}$, $\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}$

10. 20 cm

11. c = 50 cm $\cos\beta = \frac{3}{5}$ $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ $\sec\beta = \frac{5}{3}$

12. $\cos\alpha = 0{,}394 \quad \operatorname{sen}\alpha = 0{,}919$

13. $c = 15$ cm $\quad b \approx 9{,}9$ cm $\quad \cos\beta = \frac{5}{6} \quad \tan\gamma = 1{,}5$

14. Construcción de triángulo y los valores de las razones trigonométricas son: $\operatorname{sen}30° = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\cot 30° = \sqrt{3}$; $\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\csc 30° = 2$

15. Demostraciones

Razones trigonométricas de ángulos notables y de ángulos de 0° y 90°

16. a. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b. $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ c. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ d. $\frac{\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{4}$ e. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ f. 1 g. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ h. -2 i. $\frac{\sqrt{6}-3}{6}$

17. $1-3\sqrt{2}$

18. $6+3\sqrt{3}$

19. a) $\frac{3}{4}\left(-\sqrt{2}+2\right)$ b) $\frac{3}{2}$

20. Respuesta abierta.

21. $F_x = 25{,}0$ N $\quad F_y = 43{,}3$ N

22. $F = 30{,}6$ N $\quad F_x = 26{,}5$ N

23. a. $2+\sqrt{2}$ b. $\frac{7}{3}-\frac{3\sqrt{2}}{8}$ c. $\frac{2}{3}$ d. $-\sqrt{2}+1$

24. a. $x = \frac{9+\sqrt{3}}{3}$ b. $x = \frac{\sqrt{6}}{12}$

25. a. 41,3° b. 25,1° c. 64,7° d. 45° e. 79,8° f. 51°

26. a. sen 35° = cos 55° ; sen 60° = cos 30°
b. tan 75° = cot 15° ; sec 29,7° = csc 60,3°
c. sen 51° = cos 39° ; cos10,7° = sen 79,3° ; sec 85° = csc 5°

27. a. $\alpha = 60°$ b. $\alpha = 52{,}5°$ c. $\alpha = 75°$ d. $\alpha = 67{,}7°$ e. $x = 7{,}7°$ f. $x = 73°$ g. $\beta = 45°$ h. $y = 52{,}9°$ i. $\gamma = 40^0$

28. a. 2 sen x b. 2 c. 3 sen x d. 0

Ecuaciones e identidades trigonométricas

29. a) $\alpha = 30°$ b) $\alpha = 30°$ c) $\alpha = 30°$ d) $\alpha = 60°$
e) $\alpha = 45°$ f) $\alpha = 30°$ g) $\alpha = 73{,}2°$ h) $\alpha = 51{,}5°$
i) $\alpha = 41{,}4°$ j) $\alpha = 60°$ k) $\alpha = 45°$ l) $\alpha = 45°$

m) $\alpha = 30°$ n) $\alpha = 30°$ ñ) $\alpha = 79°$ o) $\alpha = 46{,}2°$
p) $\alpha = 60°$ q) $\alpha = 45°$

30. a) $x_1 = 0°$ $x_2 = 90°$ b) $x_1 = 0°$ $x_2 = 30°$ c) $x_1 = 0°$ $x_2 = 45°$
d) $x_1 = 45°$ $x_2 = 90°$ e) $x_1 = 0°$ $x_2 = 60°$ f) $x = 30°$
g) $x = 60°$ h) $x = 60°$ i) $x = 90°$
j) $x = 60°$ k) $x = 60°$

31. a) $\beta = 60{,}8°$ b) $\beta = 39{,}4°$ c) $\beta = 83{,}8°$

32. $50{,}2°$

33. $\varphi = 66{,}4°$

34. $\theta \approx 70°$

35. a. $\frac{2}{\text{sen}^2\,\alpha}$; $\frac{25}{8}$ b. $\tan^2\beta$; $\pm\frac{144}{25}$

36. a. $\frac{1}{\text{sen}^2 x}$ b. 1 c. 1

37. y **38.** Respuestas abiertas.

39. a) $S = \varnothing$ b) $S = \{0°;30°\}$ c) $S = \{45°\}$
d) $S = \{60°\}$ e) $S = \{0°;30°\}$ f) $S = \{0°;45°\}$
g) $S = \{0°;16{,}6°\}$ h) $S = \varnothing$ i) $S = \varnothing$
j) $S = \{60°\}$ k) $S = \{51{,}3°\}$ l) $S = \{30°\}$

Epígrafe 4.2

Razones trigonométricas de ángulos mayores de 90° y menores o iguales que 360°. Fórmulas de reducción

1. a. III o IV. b. I o II c. II o III d. I o III e. II o IV f. I o IV
g. I o IV h. I o IV i. III o IV

2. a. I b. III c. II d. IV e. IV f. IV

3. a. Sí es posible, II b. No es posible c. No es posible d. Si es posible, II

4. Son verdaderas las combinaciones a y b porque cumplen las condiciones.

5. a. $\text{sen}\,120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120° = -\frac{1}{2}$; $\tan 120° = -\sqrt{3}$;
$\cot 120° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sec 120° = -2$; $\csc 120° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b. $\text{sen}\,210° = -\frac{1}{2}$; $\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

cot 210° = $\sqrt{3}$; sec 210° = $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; csc 210° = -2;

c. sen 315° = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; cos 315° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$; tan 315° = -1;

cot 315° = -1; sec 315° = $\sqrt{2}$; csc 315° = $-\sqrt{2}$

6. a. $\cos\theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$; $\tan\theta = -\frac{3\sqrt{7}}{4}$ b. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\tan\theta = 2\sqrt{2}$

c. $\cos\theta = -\frac{12}{13}$; $\tan\theta = -\frac{5}{12}$ d. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$; $\cos\theta = \frac{4}{5}$

e. $\cos\theta = -\frac{2}{3}$; $\tan\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ f. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$; $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

g. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\theta = \frac{1}{2}$

7. sen α = 0,37; cos α = –0,93; cot $\alpha = -\frac{5}{2}$; tan $\alpha = -\sqrt{3}$

8. a. 1 b. – 4

9. Demostraciones

10. a. $\frac{7}{4}$ b. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ c. $-\frac{19}{4}$

11. a. 180° – 55° b. 180° + 37° c. 360° – 46° d. 180° – 18°
e. 180° + 85° f. 360° – 75° g. 360° – 30°

12. a. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b. $-\frac{1}{2}$ c. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

f. $\sqrt{3}$ g. $\frac{1}{2}$ h. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ i. $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ j. $-\sqrt{2}$

13. a. –2 b. 0 c. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ d. 1 e. –1

14. Demostraciones

15. a. $\frac{3}{2}$ b. $2\sqrt{6}$ 2

16. a. $x = 1$ b. $x_1 = 7{,}57$ $x_2 = -1{,}57$

17. a. $x_1 = 45°$ o $x_2 = 135°$ o $x_3 = 225°$ o $x_4 = 315°$
b. $x_1 = 135°$ o $x_2 = 315°$
c. $x_1 = 30°$ o $x_2 = 150°$ d. $x_1 = 0°$ o $x_2 = 180°$ o $x_3 = 360°$
e. $x_1 = 30°$ o $x_2 = 150°$ o $x_3 = 210°$ o $x_4 = 330°$
f. $x_1 = 120°$ o $x_2 = 240°$ o $x_3 = 180°$ g. $x_1 = 90°$ o $x_2 = 270°$
h. $x_1 = 19{,}5°$ o $x_2 = 160{,}5°$ i. N.S.

j. $x_1 = 131{,}8°$ o $x_2 = 311{,}8°$ k. $x_1 = 109{,}5°$ o $x_2 = 250{,}5°$
l. $x_1 = 63{,}4°$ o $x_2 = 153{,}4°$ o $x_3 = 243{,}4°$ o $x_4 = 333{,}4°$
m. $x_1 = 41{,}8°$ o $x_2 = 138{,}2°$ o $x_3 = 194{,}5°$ o $x_4 = 345{,}5°$
n. $x_1 = 60°$ o $x_2 = 180°$ o $x_3 = 300°$
ñ. $x_1 = 30°$ o $x_2 = 150°$ o $x_3 = 270°$
o. N.S. p. $x_1 = 0°$ o $x_2 = 180°$ o $x_3 = 360°$ o $x = 203{,}6°$ o $x = 336{,}4°$

Generalización del concepto de ángulo. Ángulos coterminales

18. a. I b. II c. IV d. IV e. IV f. III g. I h. IV

19. a. 60° b. 75° c. 134° d. 155,6° e. 24,4° f. 78,5°
g. 325,6° h. 227° i. 203° j. 240,3° k. 312,4°

20. a. Si 215° b. Si 113° c. No d. Si 85° e. No f. Si 173°

21. a. – sen 5° = – 0,0872; – cos 5° = – 0, 9962; – tan 5° = –0,0875
b. sen 50° = 0,7660; – cos 50° = – 0, 6428; – tan 50° = –1,192
c. – sen 66° = – 0,9135; cos 66° = 0,4067; – tan 66° = – 2,246
d. – sen 2° = – 0,0349; – cos 2° = – 0,9994; tan 2° = 0,0349
e. – sen 42° = – 0,6691; cos 42° = 0,7431; – tan 42° = –0,9004

22. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\sqrt{3}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) –0,9848 f) –2 g) 2

23. a) $S = \{30° + k\ 360°;\ 150° + k\ 360°;\ 270° + k\ 360°,\ k \in \mathbb{Z}\}$
b) $S = \{k\ 180°;\ 45° + k\ 90°,\ k \in \mathbb{Z}\}$
c) $S = \{51{,}3° + k\ 360°;\ 180° + k\ 360°;\ 308{,}7° + k\ 360°,\ k \in \mathbb{Z}\}$
d) $S = \{k\ 90°,\ k \in \mathbb{Z}\}$
e) $S = \{60° + k\ 360°;\ 120° + k\ 360°;\ 240° + k\ 360°;\ 300° + k\ 360°\ k \in \mathbb{Z}\}$
f) $S = \{k\ 180°,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Epígrafe 4.3

Resolución de triángulos rectángulos

1. a. $x = 13$ u b. $x = 20{,}8$ u c. $x = 15$ u.

2. a. $\theta = 56{,}4°$ b. $\theta = 54{,}1°$ c. $\theta = 53{,}1°$.

3. a. $x = 10{,}5$ u b. $x = 63{,}7$ u.

4. a. $\gamma = 60°$ a = 5,5 u c ≈ 9,6 u b. $\alpha = 48°$ a ≈ 8,9 u b ≈ 12 u.

5. La altura de la torre es de 131 m.

6. El ancho de la entrada de la bahía es de 38 m.

7. El plano inclinado tiene una longitud de 4,3 m.

8. El radio es aproximadamente igual a 1,7 cm.

9. El papalote está a 112 m de altura y el ángulo de elevación es de 56,3°.

10. La altura original del poste era de 19,0 m.

11. Hay que situarlos a una distancia aproximada de 10,4 m.
12. La escalera tiene un ángulo de elevación de 49,8° y la longitud que ocupa en la horizontal es aproximadamente de 8,5 m.
13. La altura del edificio es aproximadamente de 24 m y el punto está a 45 m.
14. Se encuentran a 315 m.
15. El ancho del río es 273 m.
16. La distancia que separa los puntos de observación es aproximadamente igual a 14 m.
17. El barco está aproximadamente a 358 m del faro.

Cálculo de áreas utilizando la trigonometría

18. $A = 28\ cm^2$.
19. $A_{Pentágono} = 131\ cm^2$.
20. El patio tiene aproximadamente un área de $54\ m^2$.
21. Demostración.
22. a. $\overline{AF} = 7{,}8$ cm b. $A_{Paralelogramo} = 87\ cm^2$.
23. Demostración.
24. a. $A_{Paralelogramo} = 16{,}9\ m^2$ b. $A_{Sombreada} = 126\ cm^2$.
25. a. $A_{Triángulo} = 32{,}7 cm^2$ b. $A_{Sombreada} = 18{,}2\ cm^2$.

Ley de los senos y Ley de los cosenos

26. a. $\angle ABC = 26{,}3°$ b. $\overline{BC} \approx 25$ u c. $\overline{BC} \approx 43{,}3$ u.
27. d = 36,6 cm.
28. 34,8°.
29. y **30.** Demostraciones.
31. El barco se encuentra aproximadamente a 40 km de la estación A y a 36 km de la estación C.
32. $\overline{AB} = 4{,}0$ cm $\overline{BC} = 6{,}0$ cm.
33. La longitud de la circunferencia es 21 cm.
34. $A \approx 86\ dm^2$.
35. La distancia del punto *A* al B es 93,7 m.
36. El túnel tendrá 9,29 km.
37. Tiene que recorrer 8,7 km.
38. Demostración.

Polígonos regulares

39. a. R ≈ 15,2 cm a ≈ 13,7 cm A ≈ $633\ cm^2$
b. R ≈ 20 cm l ≈ 20 cm A ≈ $1{,}04 \cdot 10^3\ cm^2$
c. a ≈ 22,3 cm l ≈ 14,5 cm A ≈ $16{,}2\ dm^2$

40. R = 20 cm a ≈ 17 cm A ≈ 10 dm^2

41. R = 5,71 cm h = 8,65 cm A = 173 cm^2

42. A ≈ $1,1 \cdot 10^3$ cm^2

43. l = 2,20 m a = 2,66 m R = 2,88 m

44. R = 3, 79 dm a = 3,64 dm

45. Demostración.

Aplicaciones de la trigonometría al cálculo de cuerpos

46. V ≈ 7,8 m^3

47. V ≈ 1,2 dm^3 $A_L \approx 5,0\ dm^2$

48. V ≈ 41 cm^3 $A_T \approx 72\ cm^2$

49. $A_T = 27,5\ dm^2$; $V = 13,5\ dm^3$

50. V ≈ 0, 20 m^3 $A_T \approx 2,8\ m^2$

51. V ≈ 82 cm^3 $A_T \approx 1,2\ dm^2$

52. V ≈ 486 cm^3

Respuesta de los ejercicios del capítulo

1.1 a) F porque $\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a}$

b) V

c) F porque $\csc\alpha = \frac{b}{a}$

d) F porque $0 < \operatorname{sen}\alpha < 1$

e) V

1.2 V

1.3 F porque $\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1.4 V

1.5 a) F porque cot 0° no está definida

b) F porque csc 90° = 1

c) F porque tan 270° no está definida

d) V

e) F porque cos 360° = 1

1.6 a) V

b) F porque no se cumple si $\alpha = 90°$

c) V

d) F porque $\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

1.7 F porque la secante también es positiva en el IV cuadrante

1.8 V

1.9 F porque $\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$

1.10 a) F porque sec $(360° - \alpha) = -\sec \alpha$

b) V

c) F porque $\tan (180° - \alpha) = -\tan \alpha$

2.

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ $\cot \alpha = \frac{4}{3}$ $\sec \alpha = \frac{5}{4}$ $\csc \alpha = \frac{5}{3}$

$\operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5}$ $\cos\beta = \frac{3}{5}$ $\tan \beta = \frac{4}{3}$ $\cot \beta = \frac{3}{4}$ $\sec \beta = \frac{5}{3}$ $\csc \beta = \frac{5}{4}$

3. $\cos\gamma = \frac{1}{2}$; $\tan\gamma = \sqrt{3}$; $\cot\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sec\gamma = 2$; $\csc\gamma = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

4. a. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\tan\alpha = \frac{4}{3}$; $\sec\alpha = \frac{5}{3}$; $\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}$; $\csc\beta = \frac{5}{4}$

b. $\operatorname{sen}\beta = \frac{15}{17}$; $\cot\beta = \frac{8}{15}$; $\csc\beta = \frac{17}{15}$; $\tan\alpha = \frac{8}{15}$; $\cos\alpha = \frac{15}{17}$

5. a. $\gamma = 60°$ $a = 6{,}0$ cm $c = 6\sqrt{3}$ cm b. $a = 8{,}9$ cm $b \approx 12$ cm $\alpha = 48°$

6. $3\left(2 - \sqrt{3}\right)$

7. a. $\sqrt{3}$ b. -4 c. $6\sqrt{3}$

8. Demostración.

9. Demostración.

10. a. $-1{,}44$ b. $-0{,}8$

11. Demostración.

12. a. $S = \{x: x = 60° + k360° \text{ o } x = 120° + k360°; k \in \mathbb{Z}\}$

b. $S = \{x: x = 30° + k360° \text{ o } x = 150° + k360°; k \in \mathbb{Z}\}$

c. $S = \{x: x = k180° \text{ o } x = 45° + k360° \text{ o } x = 90° + k360° \text{ o } x = 135° + k360°; k \in \mathbb{Z}\}$

d. $S = \{x: x = 45° + k180°; k \in \mathbb{Z}\}$

e. $S = \{x: x = 120° + k360° \text{ o } x = 240° + k360°; k \in \mathbb{Z}\}$

f. $S = \{x: x = 42{,}1° + k360° \text{ o } x = 90° + k360° \text{ o } x = 137{,}9° + k360°; k \in \mathbb{Z}\}$

13.1 Puede completarse con cualquiera las 4 opciones que se dan a continuación.

Un ángulo agudo y la hipotenusa o Un ángulo agudo y un cateto o Un cateto y la hipotenusa o Los dos catetos

13.2 debajo

13.3 semiproducto seno

13.4 duplo circunscrita

13.5 un lado y los ángulos adyacentes ; dos lados y el ángulo comprendido

tres lados; dos lados y el ángulo opuesto al mayor de los lados

13.6 circunferencia iguales

13.7 inscrita

14. a. $c = 56{,}1$ cm $\alpha = 52{,}6°$ $\beta = 37{,}4°$ $A \approx 760\ cm^2$

b. $b = 16{,}8$ cm $\beta = 55{,}7°$ $\gamma = 34{,}3°$ $A \approx 96{,}6\ cm^2$

c. $b = 28{,}9$ cm $c = 25{,}8$ cm $\gamma = 59{,}7°$ $A \approx 168\ cm^2$

d. $a = 79{,}6$ cm $c = 66{,}7$ cm $\gamma = 55{,}5°$ $A \approx 18{,}6 \cdot 10^2\ cm^2$

e. $b = 5{,}8$ cm $c = 4{,}8$cm $\alpha = 99{,}5°$ $A \approx 13{,}5\ cm^2$

f. $a = 77{,}5$ cm $\beta = 57{,}1°$ $\gamma = 71{,}8°$ $A \approx 30{,}7 \cdot 10^2\ cm^2$

g. $\alpha = 49{,}6°$ $\beta = 58{,}6°$ $\gamma = 71{,}8°$ $A \approx 28{,}5\ cm^2$

15. El radio de la circunferencia es aproximadamente 52 cm.

16. La altura del monumento es aproximadamente de 49,0 m.

17. $r \approx 25{,}5$ cm $A \approx 781{,}5\ cm^2$.

18. Tiene que dar el golpe bajo un ángulo de 24,6º.

19. La longitud de sus diagonales es aproximadamente de 35,3 cm.

20. $A_{Octágono} \approx 13{,}4\ m^2$.

21. $R \approx 7{,}23$ cm.

22. Se encuentra del puerto aproximadamente a una distancia de 12,1 km.

23. Las direcciones forman un ángulo de 36,1°.

24. La amplitud de los ángulos interiores del rombo son aproximadamente 73,7° y 106,3°.

25. $V_{ABCDEFGH} \approx 0{,}20\ dm^3$.

26. $V_{ABCDEFGH} \approx 0{,}38\ dm^3$.

27. $A_{L\ Cono} \approx 159\ dm^2$.

28. $A_{T\ Prirámide} \approx 36\ dm^2$.

29. El área de la superficie de la pieza que es necesario pintar es aproximadamente de 257 m^2.

Tabla de senos y cosenos

Seno												
Grad.	**,0**	**,1**	**,2**	**,3**	**,4**	**,5**	**,6**	**,7**	**,8**	**,9**	**(1,0)**	
0	0,0000	0,0017	0,0035	0,0052	0,0070	0,0087	0,0105	0,0122	0,0140	0,0157	0,0175	89
1	0,0175	0,0192	0,0209	0,0227	0,0244	0,0262	0,0279	0,0297	0,0314	0,0332	0,0349	88
2	0,0349	0,0366	0,0384	0,0401	0,0419	0,0346	0,0454	0,0471	0,0488	0,0506	0,0523	87
3	0,0523	0,0541	0,0558	0,0576	0,0593	0,0610	0,0628	0,0645	0,0663	0,0680	0,0698	86
4	0,0698	0,0715	0,0732	0,0750	0,0767	0,0785	0,0802	0,0819	0,0837	0,0854	0,0872	85
5	0,0872	0,0889	0,0906	0,0924	0,0941	0,0958	0,0976	0,0993	0,1011	0,1028	0,1045	84
6	0,1045	0,1063	0,1080	0,1097	0,1115	0,1132	0,1149	0,1167	0,1184	0,1201	0,1219	83
7	0,1219	0,1236	0,1253	0,1271	0,1288	0,1305	0,1323	0,1340	0,1357	0,1374	0,1392	82
8	0,1392	0,1409	0,1426	0,1444	0,1461	0,1478	0,1495	0,1513	0,1530	0,1547	0,1564	81
9	0,1564	0,1582	0,1599	0,1616	0,1633	0,1650	0,1668	0,1685	0,1702	0,1719	0,1736	80
10	0,1736	0,1754	0,1771	0,1788	0,1805	0,1822	0,1840	0,1857	0,1874	0,1891	0,1908	79
11	0,1908	0,1925	0,1942	0,1959	0,1977	0,1994	0,2011	0,2028	0,2045	0,2062	0,2079	78
12	0,2079	0,2096	0,2113	0,2130	0,2147	0,2164	0,2181	0,2198	0,2215	0,2233	0,2250	77
13	0,2250	0,2267	0,2284	0,2300	0,2317	0,2334	0,2351	0,2368	0,2385	0,2402	0,2419	76
14	0,2419	0,2436	0,2453	0,2470	0,2487	0,2504	0,2521	0,2538	0,2554	0,2571	0,2588	75
15	0,5288	0,2605	0,2622	0,2639	0,2656	0,2672	0,2689	0,2706	0,2723	0,2740	0,2756	74
16	0,2756	0,2773	0,2790	0,2807	0,2823	0,2840	0,2857	0,2874	0,2890	0,2907	0,2924	73
17	0,2924	0,2940	0,2957	0,2974	0,2990	0,3007	0,3024	0,3040	0,3057	0,3074	0,3090	72
18	0,3090	0,3107	0,3123	0,3140	0,3156	0,3173	0,3190	0,3206	0,3223	0,3239	0,3256	71
19	0,3256	0,3272	0,3289	0,3305	0,3322	0,3338	0,3355	0,3371	0,3387	0,3404	0,3420	70
20	0,3420	0,3437	0,3453	0,3469	0,3486	0,3502	0,3518	0,3535	0,3551	0,3567	0,3584	69
21	0,3584	0,3600	0,3616	0,3633	0,3649	0,3665	0,3681	0,3697	0,3714	0,3730	0,3746	68
22	0,3746	0,3762	0,3778	0,3795	0,3811	0,3827	0,3843	0,3859	0,3875	0,3891	0,3907	67
23	0,3907	0,3923	0,3939	0,3955	0,3971	0,3987	0,4003	0,4019	0,4035	0,4051	0,4067	66
24	0,4067	0,4083	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4163	0,4179	0,4195	0,4210	0,4226	65
25	0,4226	0,4242	0,4258	0,4274	0,4289	0,4305	0,4321	0,4337	0,4352	0,4368	0,4384	64
26	0,4384	0,4399	0,4415	0,4431	0,4446	0,4462	0,4478	0,4493	0,4509	0,4524	0,4540	63
27	0,4540	0,4555	0,4571	0,4586	0,4602	0,4617	0,4633	0,4648	0,4664	0,4679	0,4695	62
28	0,4695	0,4710	0,4726	0,4741	0,4756	0,4772	0,4787	0,4802	0,4818	0,4833	0,4848	61
29	0,4848	0,4863	0,4879	0,4894	0,4909	0,4924	0,4939	0,4955	0,4970	0,4985	0,5000	60
30	0,5000	0,5015	0,5030	0,5045	0,5060	0,5075	0,5090	0,5105	0,5120	0,5135	0,5150	59
31	0,5150	0,5165	0,5180	0,5195	0,5210	0,5225	0,5240	0,5255	0,5270	0,5284	0,5299	58
32	0,5299	0,5314	0,5329	0,5344	0,5358	0,5373	0,5388	0,5402	0,5417	0,5432	0,5446	57
33	0,5446	0,5461	0,5476	0,5490	0,5505	0,5519	0,5534	0,5548	0,5563	0,5577	0,5592	56
34	0,5592	0,5306	0,5621	0,5635	0,5650	0,5664	0,5678	0,5693	0,5707	0,5721	0,5736	55
35	0,5736	0,5750	0,5764	0,5779	0,5793	0,5807	0,5821	0,5835	0,5850	0,5864	0,5878	54
36	0,5878	0,5892	0,5906	0,5920	0,5934	0,5948	0,5962	0,5976	0,5990	0,6004	0,6018	53
37	0,6018	0,6032	0,6046	0,6060	0,6074	0,6088	0,6101	0,6115	0,6129	0,6143	0,6157	52
38	0,6157	0,6170	0,6184	0,6198	0,6211	0,5225	0,6239	0,6252	0,6266	0,6280	0,6293	51
39	0,6293	0,6307	0,6320	0,6334	0,6347	0,6361	0,6374	0,6388	0,6401	0,6414	0,6428	50
40	0,6428	0,6441	0,6455	0,6468	0,6481	0,6494	0,6508	0,6521	0,6534	0,6547	0,6561	49
41	0,6561	0,6574	0,6587	0,6600	0,6613	0,6626	0,6639	0,6652	0,6665	0,6678	0,6691	48
42	0,6691	0,6704	0,6717	0,6730	0,6743	0,6756	0,6769	0,6782	0,6794	0,6807	0,6820	47
43	0,6820	0,6833	0,6845	0,6858	0,6871	0,6884	0,6896	0,6909	0,6921	0,6934	0,6947	46
44	0,6947	0,6959	0,6972	0,6984	0,6997	0,7009	0,7022	0,7034	0,7046	0,7059	0,7071	45
	(1,0)	**,9**	**,8**	**,7**	**,6**	**,5**	**,4**	**,3**	**,2**	**,1**	**,0**	**Grad.**
Coseno												

Tabla de senos y cosenos

Seno												
Grad.	**,0**	**,1**	**,2**	**,3**	**,4**	**,5**	**,6**	**,7**	**,8**	**,9**	**(1,0)**	
45	0,7071	0,7083	0,7096	0,7108	0,7120	0,7133	0,7145	0,7157	0,7169	0,7181	0,7193	44
46	0,7193	0,7206	0,7218	0,7230	0,7242	0,7254	0,7266	0,7278	0,7290	0,7302	0,7314	43
47	0,7314	0,7325	0,7337	0,7349	0,7361	0,7373	0,7385	0,7396	0,7408	0,7420	0,7431	42
48	0,7431	0,7443	0,7455	0,7466	0,7478	0,7490	0,7501	0,7513	0,7524	0,7536	0,7547	41
49	0,7547	0,7559	0,7570	0,7581	0,7593	0,7604	0,7615	0,7627	0,7638	0,7649	0,7660	40
50	0,7660	0,7672	0,7683	0,7694	0,7705	0,7716	0,7727	0,7738	0,7749	0,7760	0,7771	39
51	0,7771	0,7782	0,7793	0,7804	0,7815	0,7826	0,7837	0,7848	0,7859	0,7869	0,7880	38
52	0,7880	0,7891	0,7902	0,7912	0,7923	0,7934	0,7944	0,7955	0,7965	0,7976	0,7986	37
53	0,7986	0,7997	0,8007	0,8018	0,8028	0,8039	0,0849	0,8059	0,8070	0,8080	0,8090	36
54	0,8090	0,8100	0,8111	0,8121	0,8131	0,8141	0,8151	0,8161	0,8171	0,8181	0,8192	35
55	0,8192	0,8202	0,8211	0,8221	0,8231	0,8241	0,8251	0,8261	0,8271	0,8281	0,8290	34
56	0,8290	0,8300	0,8310	0,8320	0,8329	0,8339	0,8348	0,8358	0,8368	0,8377	0,8387	33
57	0,8387	0,8396	0,8406	0,8415	0,8425	0,8434	0,8443	0,8453	0,8462	0,8471	0,8480	32
58	0,8480	0,8490	0,8499	0,8508	0,8517	0,8526	0,8536	0,8545	0,8554	0,8563	0,8572	31
59	0,8572	0,8581	0,8590	0,8599	0,8607	0,8616	0,8625	0,8634	0,8643	0,8652	0,8660	30
60	0,8660	0,8669	0,8678	0,8686	0,8695	0,8704	0,8712	0,8721	0,8729	0,8738	0,8746	29
61	0,8746	0,8755	0,8763	0,8771	0,8780	0,8788	0,8796	0,8805	0,8813	0,8821	0,8829	28
62	0,8829	0,8838	0,8846	0,8854	0,8862	0,8870	0,8878	0,8886	0,8894	0,8902	0,8910	27
63	0,8910	0,8918	0,8926	0,8934	0,8942	0,8949	0,8957	0,8965	0,8973	0,8980	0,8988	26
64	0,8988	0,8996	0,9003	0,9011	0,9018	0,9026	0,9033	0,9041	0,9048	0,9056	0,9063	25
65	0,9063	0,9070	0,9078	0,9085	0,9092	0,9100	0,9107	0,9114	0,9121	0,9128	0,9135	24
66	0,9135	0,9143	0,9150	0,9157	0,9164	0,9171	0,9178	0,9184	0,9191	0,9198	0,9205	23
67	0,9205	0,9212	0,9219	0,9225	0,9232	0,9239	0,9245	0,9252	0,9259	0,9265	0,9272	22
68	0,9272	0,9278	0,9285	0,9291	0,9298	0,9304	0,9311	0,9317	0,9323	0,9330	0,9336	21
69	0,9336	0,9342	0,9348	0,9354	0,9361	0,9367	0,9373	0,9379	0,9385	0,9391	0,9397	20
70	0,9397	0,9403	0,9409	0,9415	0,9421	0,9426	0,9432	0,9438	0,9444	0,9449	0,9455	19
71	0,9455	0,9461	0,9466	0,9472	0,9478	0,8483	0,9489	0,9494	0,9500	0,9505	0,9511	18
72	0,9511	0,9516	0,9521	0,9527	0,9532	0,9537	0,9542	0,9548	0,9553	0,9558	0,9563	17
73	0,9563	0,9568	0,9573	0,9578	0,9583	0,9588	0,9593	0,9598	0,9603	0,9608	0,9613	16
74	0,9613	0,9617	0,9622	0,9627	0,9632	0,9636	0,9641	0,9646	0,9650	0,9655	0,9659	15
75	0,9659	0,9664	0,9668	0,9673	0,9677	0,9681	0,9686	0,9690	0,9694	0,9699	0,9703	14
76	0,9703	0,9707	0,9711	0,9715	0,9720	0,9724	0,9728	0,9732	0,9736	0,9740	0,9744	13
77	0,9744	0,9748	0,9751	0,9755	0,9759	0,9763	0,9767	0,9770	0,9774	0,9778	0,9781	12
78	0,9781	0,9785	0,9789	0,9792	0,9796	0,9799	0,9803	0,9806	0,9810	0,9813	0,9816	11
79	0,9816	0,9820	0,9823	0,9826	0,9829	0,9833	0,9836	0,9839	0,9842	0,9845	0,9848	10
80	0,9848	0,9851	0,9854	0,9857	0,9860	0,9863	0,9866	0,9869	0,9871	0,9874	0,9877	9
81	0,9877	0,9880	0,9882	0,9885	0,9888	0,9890	0,9893	0,9895	0,9898	0,9900	0,9903	8
82	0,9903	0,9905	0,9907	0,9910	0,9912	0,9914	0,9917	0,9919	0,9921	0,9923	0,9925	7
83	0,9925	0,9928	0,9930	0,9932	0,9934	0,9936	0,9938	0,9940	0,9942	0,9943	0,9945	6
84	0,9945	0,9947	0,9949	0,9951	0,9952	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9962	5
85	0,9962	0,9963	0,9965	0,9966	0,9968	0,9969	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	0,9976	4
86	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0
	(1,0)	**,9**	**,8**	**,7**	**,6**	**,5**	**,4**	**,3**	**,2**	**,1**	**,0**	**Grad.**
Coseno												

Tabla de tangentes y cotangentes

Tangente												
Grad.	**,0**	**,1**	**,2**	**,3**	**,4**	**,5**	**,6**	**,7**	**,8**	**,9**	**(1,0)**	
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89
1	0,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0,0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	87
3	0,0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	86
4	0,0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0875	85
5	0,0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	84
6	0,1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228	83
7	0,1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	82
8	0,1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	81
9	0,1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	1763	80
10	0,1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79
11	0,1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78
12	0,2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77
13	0,2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76
14	0,2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	2679	75
15	0,2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74
16	0,2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73
17	0,3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72
18	0,3249	3269	3288	33,07	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71
19	0,3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3640	70
20	0,3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69
21	0,3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68
22	0,4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67
23	0,4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66
24	0,4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4663	65
25	0,4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64
26	0,4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63
27	0,5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62
28	0,5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61
29	0,5543	5566	5589	5672	5635	5658	5681	5704	5727	5750	5774	60
30	0,5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59
31	0,6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58
32	0,6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57
33	0,6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56
34	0,6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	7002	55
35	0,7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54
36	0,7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53
37	0,7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52
38	0,7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	51
39	0,8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	8391	50
40	0,8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	8693	49
41	0,8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	48
42	0,9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	47
43	0,9395	9358	9391	9424	9457	9490	9523	3556	9590	9623	9657	46
44	0,9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1,000	45
	(1,0)	**,9**	**,8**	**,7**	**,6**	**,5**	**,4**	**,3**	**,2**	**,1**	**,0**	**Grad.**
Cotangente												

Tabla de tangentes y cotangentes

Tangente												
Grad.	**,0**	**,1**	**,2**	**,3**	**,4**	**,5**	**,6**	**,7**	**,8**	**,9**	**(1,0)**	
45	1,000	003	007	011	014	018	021	025	028	032	036	44
46	1,036	039	043	046	050	054	057	061	065	069	072	43
47	1,072	076	080	084	087	091	095	099	103	107	111	42
48	1,111	115	118	122	126	130	134	138	142	146	150	41
49	1,150	154	159	163	167	171	175	179	183	188	192	40
50	1,192	196	200	205	209	213	217	222	226	230	235	39
51	1,235	239	244	248	253	257	262	266	271	275	280	38
52	1,280	285	289	294	299	303	308	313	317	322	327	37
53	1,327	332	337	342	347	351	356	361	366	371	376	36
54	1,376	381	387	392	397	402	407	412	418	423	428	35
55	1,428	433	439	444	450	455	460	466	471	477	483	34
56	1,483	488	494	499	505	511	517	522	528	534	540	33
57	1,540	546	552	558	564	570	576	582	588	594	600	32
58	1,600	607	613	619	625	632	638	645	651	658	664	31
59	1,664	671	678	684	691	698	704	711	718	725	732	30
60	1,732	739	746	753	760	767	775	782	789	797	804	29
61	1,804	811	819	827	834	842	849	857	865	873	881	28
62	1,881	889	897	905	913	921	929	937	946	954	963	27
63	1,963	971	980	988	997	*006	*014	*023	*032	*041	*050	26
64	2,050	059	069	078	087	097	106	116	125	135	145	25
65	2,145	154	164	174	184	194	204	215	225	236	246	24
66	2,246	257	267	278	289	300	311	322	333	344	356	23
67	2,356	367	379	391	402	414	426	438	450	463	475	22
68	2,475	488	500	513	526	539	552	565	578	592	605	21
69	2,605	619	633	646	660	675	689	703	718	733	747	20
70	2,747	762	778	793	808	824	840	856	872	888	904	19
71	2,904	921	937	954	971	989	*006	*024	*042	*060	*078	18
72	3,078	096	115	133	152	172	191	211	230	251	271	17
73	3,271	291	312	333	354	376	398	420	442	465	487	16
74	3,487	511	534	558	582	606	630	655	681	706	732	15
75	3,732	758	785	812	839	867	895	923	952	981	*011	14
76	4,011	041	071	102	134	165	198	230	264	297	331	13
77	4,331	366	402	437	474	511	548	586	625	665	705	12
78	4,705	745	787	829	872	915	959	*005	*050	*097	*145	11
79	5,145	193	242	292	343	396	449	503	558	614	671	10
80	5,671	5,730	5,789	5,850	5,912	5,976	6,041	6,107	6,174	6,243	6,314	9
81	6,314	6,386	6,460	6,535	6,612	6,691	6,772	6,855	6,940	7,026	7,115	8
82	7,115	7,207	7,300	7,396	7,495	7,596	7,700	7,806	7,916	8,028	8,144	7
83	8,144	8,264	8,386	8,513	8,643	8,777	8,915	9,058	9,205	9,357	9,514	6
84	9,514	9,677	9,845	10,0	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	5
85	11,43	11,696	11,91	12,16	12,43	12,71	13,00	13,30	13,62	13,95	14,30	4
86	14,30	14,67	15,06	15,46	15,89	16,35	16,83	17,34	17,89	18,46	19,08	3
87	19,08	19,74	20,45	21,20	22,02	22,90	23,86	24,90	26,03	27,27	28,64	2
88	28,64	30,14	31,82	33,69	35,80	38,19	40,92	44,07	47,74	52,08	57,29	1
89	57,29	63,66	71,62	81,85	95,49	114,6	143,2	191,0	286,5	573,0	...	0
	(1,0)	**,9**	**,8**	**,7**	**,6**	**,5**	**,4**	**,3**	**,2**	**,1**	**,0**	**Grad.**
Cotangente												

Tabla de secantes y cosecantes

Secante												
Grad.	**,0**	**,1**	**,2**	**,3**	**,4**	**,5**	**,6**	**,7**	**,8**	**,9**	**(1,0)**	
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0001	0001	0001	0002	89
1	1,0002	0002	0002	0003	0003	0003	0004	0004	0005	0005	0006	88
2	1,0006	0007	0007	0008	0009	0010	0010	0011	0012	0013	0014	87
3	1,0014	0015	0016	0017	0018	0019	0020	0021	0022	0023	0024	86
4	1,0024	0026	0027	0028	0029	0031	0032	0034	0035	0037	0038	85
5	1,0038	0040	0041	0043	0044	0046	0048	0049	0051	0053	0055	84
6	1,0055	0057	0058	0060	0062	0064	0066	0068	0070	0073	0076	83
7	1,0076	0078	0080	0082	0084	0087	0088	0091	0094	0096	0098	82
8	1,0098	0101	0103	0106	0108	0111	0113	0116	0119	0121	0125	81
9	1,0125	0128	0131	0133	0136	0139	0142	0145	0148	0151	0154	80
10	1,0154	0157	0161	10164	0167	0170	10174	0177	0180	0183	0187	79
11	1,0187	0191	0194	0198	0201	0205	0208	0212	0216	0220	0224	78
12	1,0224	0227	0231	0235	0239	0243	0247	0251	0255	0259	0263	77
13	1,0263	0267	0271	0275	0280	0284	0288	0293	0298	0302	0306	76
14	1,0306	0310	0316	0320	0324	0330	0334	0338	0343	0348	0353	75
15	1,0353	0357	0363	0367	0372	0378	0382	0387	0393	0398	0403	74
16	1,0403	0408	0413	0419	0424	0430	0435	0441	0446	0452	0457	73
17	1,0457	0462	0468	0473	0480	0485	0491	0496	0503	0509	0514	72
18	1,0514	0521	0526	0533	0539	0545	0551	0557	0564	0570	0576	71
19	1,0576	0583	0589	0595	0602	0609	0615	0621	0628	0635	0642	70
20	1,0642	0648	0655	0662	0669	0676	0683	0691	0697	0704	0711	69
21	1,0711	0718	0726	0733	0740	0748	0755	0763	0770	0778	0785	68
22	1,0785	0793	0800	0808	0817	0824	0832	0840	0847	0855	0864	67
23	1,0864	0872	0880	0889	0896	0904	0912	0921	0929	0937	0947	66
24	1,0947	0955	0964	0972	0981	0989	0999	1007	1016	1025	1034	65
25	1,1034	1042	1052	1061	1071	1079	1089	1098	1107	1116	1126	64
26	1,1126	1136	1145	1154	1164	1174	1183	1193	1203	1213	1223	63
27	1,1223	1233	1244	1254	1264	1274	1284	1294	1305	1315	1326	62
28	1,1326	1337	1347	1357	1369	1379	1390	1401	1,1412	1422	1434	61
29	1,1434	1444	1456	1467	1478	1489	1501	1513	1523	1535	1547	60
30	1,1547	1558	1570	1582	1594	1606	1618	1629	1641	1654	1666	59
31	1,1666	1678	1690	1703	1715	1729	1741	1754	1766	1779	1792	58
32	1,1792	1805	1818	1830	1844	1857	1869	1884	1896	1910	1923	57
33	1,1923	1937	1950	1965	1979	1992	2006	2019	2034	2048	2063	56
34	1,2063	2076	2090	2105	2120	2134	2149	2164	2179	2192	2207	55
35	1,2207	2223	2238	2253	2268	2284	2299	2314	2329	2346	2361	54
36	1,2361	2376	2392	2408	2424	2439	2456	2472	2489	2505	2522	53
37	1,2522	2538	2555	2571	2588	2604	2621	2639	2655	2673	2690	52
38	1,2690	2708	2724	2742	2760	2778	2796	2814	2832	2850	2868	51
39	1,2868	2887	2905	2923	2942	2960	2979	2997	3016	3034	3055	50
40	1,3055	3074	3092	3111	3132	3151	3170	3191	3210	3229	3250	49
41	1,3250	3270	3291	3310	3332	3351	3373	3394	3414	3435	3457	48
42	1,3457	3477	3499	3521	3541	3563	3585	3607	3630	3652	3672	47
43	1,3672	3695	3717	3740	3763	3785	3808	3831	3854	3877	3902	46
44	1,3902	3926	3949	3972	3996	4019	4045	4069	4092	4118	4142	45
	(1,0)	**,9**	**,8**	**,7**	**,6**	**,5**	**,4**	**,3**	**,2**	**,1**	**,0**	**Grad.**
Cosecante												

Tabla de secantes y cosecantes

Secante												
Grad.	**,0**	**,1**	**,2**	**,3**	**,4**	**,5**	**,6**	**,7**	**,8**	**,9**	**(1,0)**	
45	1,414	417	1419	422	424	427	429	432	434	437	439	44
46	1,439	442	445	447	450	453	455	458	461	463	466	43
47	1,466	469	472	474	477	480	483	486	489	492	495	42
48	1,495	497	500	503	506	507	512	515	518	521	524	41
49	1,524	527	530	534	537	540	543	546	549	553	556	40
50	1,556	559	562	565	569	572	576	579	582	586	589	39
51	1,589	592	596	599	603	596	610	613	617	621	624	38
52	1,624	628	632	635	639	643	646	650	654	658	662	37
53	1,662	666	669	673	677	681	685	689	693	697	701	36
54	1,701	705	709	714	718	722	726	730	735	739	743	35
55	1,743	748	752	757	761	766	770	775	779	785	788	34
56	1,788	793	798	802	807	812	817	821	826	831	836	33
57	1,836	841	846	851	856	861	866	871	877	882	887	32
58	1,887	893	898	903	908	914	919	925	931	936	942	31
59	1,942	947	953	959	965	970	976	982	988	994	*000	30
60	2,000	006	012	018	025	031	037	043	050	056	063	29
61	2,063	069	076	082	089	096	103	109	116	123	130	28
62	2,130	137	144	151	158	166	173	181	188	195	203	27
63	2,203	210	218	226	233	241	249	257	265	273	281	26
64	2,281	289	298	306	314	323	332	340	349	357	366	25
65	2,366	375	384	393	402	411	421	430	440	449	459	24
66	2,459	469	478	488	498	508	518	528	539	549	560	23
67	2,560	570	581	591	602	613	624	635	647	658	670	22
68	2,670	681	693	705	717	729	740	753	765	778	790	21
69	2,790	803	816	829	843	856	869	883	896	910	924	20
70	2,924	938	952	966	981	996	*010	*026	*040	*056	*071	19
71	3,071	087	103	119	135	152	169	185	202	219	236	18
72	3,236	253	271	289	307	326	344	362	382	401	420	17
73	3,420	440	460	479	500	521	542	563	584	606	628	16
74	3,628	650	672	695	719	743	765	789	814	839	864	15
75	3,864	890	915	940	967	994	*021	*049	*077	*105	*134	14
76	4,134	163	193	223	254	284	316	348	378	411	444	13
77	4,444	478	515	550	585	621	658	695	733	771	810	12
78	4,810	850	890	931	973	015	058	105	149	195	241	11
79	5,241	288	336	385	435	488	540	593	647	701	760	10
80	5,760	817	875	935	995	*061	*124	*188	*254	*321	*394	9
81	6,394	464	536	609	689	766	845	925	*013	*097	*184	8
82	7,184	278	369	463	559	663	764	868	981	*091	*203	7
83	8,203	326	446	569	703	834	969	9,116	9,259	9,407	9,569	6
84	9,569	9,728	9,891	10,07	10,25	10,40	10,63	10,82	11,04	11,25	11,47	5
85	11,47	11,71	11,95	12,21	12,47	12,74	13,04	13,33	13,66	13,99	14,33	4
86	14,33	14,71	15,08	15,50	15,92	16,39	16,86	17,36	17,92	18,48	19,12	3
87	19,12	19,76	20,49	21,23	22,03	28,90	23,87	24,94	26,04	27,32	28,65	2
88	28, 67	30,12	31,85	33,67	35,84	38,17	40,98	44,05	47,85	52,08	57,14	1
89	57,14	63, 69	71,43	81,97	95,24	114,9	148,9	192,3	285,7	588,2	....	0
	(1,0)	**,9**	**,8**	**,7**	**,6**	**,5**	**,4**	**,3**	**,2**	**,1**	**,0**	**Grad.**

Cosecante

La función $y = x^2$; $1{,}00 \leq x \leq 5{,}49$ (Cuadrados)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,102	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,322	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,562	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,822	1,850	1,877	1,904	1,932
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,102	2,132	1,161	2,190	2,220
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,402	2,434	2,465	2,496	2,528
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,722	2,756	2,789	2,822	2,856
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,062	3,098	3,133	3,168	3,204
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,420	3,460	3,497	3,534	3,572
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,802	3,842	3,881	3,920	3,960
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,202	4,244	4,285	4,326	4,368
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,622	4,666	4,709	4,752	4,796
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,062	5,108	5,153	5,198	5,244
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,522	5,570	5,617	5,664	5,712
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,002	6,052	6,101	6,150	6,200
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,502	6,554	6,605	6,656	6,708
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,022	7,076	7,129	7,182	7,236
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,562	7,618	7,673	7,728	7,784
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,122	1,180	8,237	8,294	8,352
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,702	8,762	8,821	8,880	8,940
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,302	9,364	9,425	9,486	9,548
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,922	9,986	10,05	10,11	10,18
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	17,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91
5,1	26,01	26,11	24,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14

Si se corre la coma en x un lugar a la derecha (izquierda), se debe correr en x^2 dos lugares a la derecha (izquierda).

La función $y = x^2$; $5{,}50 \leq x \leq 9{,}99$ (Cuadrados)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,72	61,94	62,09	62,25
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08
8,2	67,24	67,00	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	7691,00	77,09	77,26
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,58	78,85	79,03
8,9	79,21	73,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,82	83,91	84,09	84,27	84,46
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80

$8{,}47^2 = 71{,}74$ $\quad 0{,}847^2 = 0{,}7174$ $\quad \sqrt{21{,}44} = 4{,}63$ $\quad \sqrt{0{,}2144} = 0{,}463$

$84{,}7^2 = 7174$ $\quad 8{,}472^2 = 71{,}77$ $\quad \sqrt{21{,}44} = 46{,}3$

La función $y = x^3$; $1{,}00 \leq x \leq 5{,}49$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,030	1,061	1,093		1,158	1,191	1,225	1,260	1,295
1,1	1,331	1,368	1,405	1,443	1,482	1,521	1,561	1,602	1,643	1,685
1,2	1,728	1,772	1,816	1,861	1,907	1,953	2,000	2,048	2,097	2,147
1,3	2,197	2,248	2,300	2,353	2,406	2,460	2,515	2,571	2,628	2,686
1,4	2,744	2,803	2,863	2,924	2,986	3,049	3,112	3,177	3,242	3,308
1,5	3,375	3,443	3,512	3,582	3,652	3,724	3,796	3,870	3,944	4,020
1,6	4,096	4,173	4,252	4,331	4,411	4,492	4,574	4,657	4,742	4,827
1,7	4,913	5,000	5,088	5,178	5,268	5,359	5,452	5,545	5,640	5,735
1,8	5,832	5,930	6,029	6,128	6,230	6,332	6,435	6,539	6,645	6,751
1,9	6,859	6,968	7,078	7,189	7,301	7,415	7,530	7,645	7,762	7,881
2,0	8,000	8,121	8,242	8,365	8,490	8,615	83,742	8,870	8,999	9,129
2,1	9,261	9,394	9,528	9,664	9,800	9,938	10,08	10,22	10,36	10,50
2,2	10,65	10,79	10,96	11,09	11,24	11,39	11,54	11,70	11,85	12,01
2,3	12,17	12,33	12,49	12,65	12,81	12,98	13,14	13,31	13,48	13,65
2,4	13,82	140,00	14,17	14,35	14,53	14,71	14,89	15,07	15,25	15,44
2,5	15,63	15,81	16,00	16,19	16,39	16,58	16,78	16,97	17,17	17,37
2,6	17,58	17,78	17,98	18,19	18,40	18,61	18,82	19,03	19,25	19,47
2,7	19,68	19,90	20,12	20,35	20,57	20,80	21,02	21,25	21,40	21,72
2,8	21,95	22,19	22,43	22,67	22,91	23,15	23,39	23,64	23,89	24,14
2,9	24,39	24,64	24,90	25,15	25,41	25,67	25,93	26,20	26,46	26,73
3,0	27,00	27,27	27,54	27,82	28,09	28,37	28,65	28,93	29,22	29,50
3,1	29,79	30,08	30,37	30,66	30,96	31,26	31,55	31,86	32,16	32,46
3,2	32,77	33,08	33,39	33,70	34,01	34,33	34,65	34,90	35,29	35,61
3,3	35,94	36,26	36,59	36,93	37,26	37,60	37,93	38,27	38,61	38,96
3,4	39,30	39,65	40,00	40,35	40,71	41,06	41,42	41,78	42,14	42,51
3,5	42,88	43,24	43,61	43,99	44,36	44,74	45,12	45,50	45,88	46,27
3,6	46,66	47,05	47,44	47,83	48,23	48,63	49,03	49,43	49,84	50,24
3,7	50,65	51,06	51,48	51,90	52,31	52,73	53,16	53,58	54,01	54,44
3,8	54,87	55,31	55,74	56,18	56,62	57,07	57,51	57,96	58,41	58,86
3,9	59,32	59,78	60,24	60,70	61,16	61,63	62,10	62,57	63,04	63,52
4,0	64,00	64,48	64,96	65,45	65,94	66,43	66,92	67,42	67,92	68,42
4,1	68,92	69,43	69,93	70,44	70,96	71,47	71,99	72,51	73,03	73,56
4,2	74,09	74,62	75,15	75,69	76,23	76,77	77,31	77,85	78,40	78,95
4,3	79,51	80,06	80,62	81,18	81,75	82,31	82,88	83,45	84,03	84,60
4,4	85,18	85,77	86,35	86,94	87,53	88,12	88,72	89,31	89,92	90,52
4,5	91,13	91,73	92,35	92,96	93,58	94,20	94,82	95,44	96,07	96,70
4,6	97,34	97,97	98,61	99,25	99,90	100,5	101,2	101,8	102,5	103,2
4,7	103,8	104,5	105,2	105,8	106,5	107,2	107,9	108,5	109,2	109,9
4,8	110,6	111,3	112,0	112,7	113,4	114,1	114,8	115,5	116,2	116,9
4,9	117,6	118,4	119,1	119,8	120,6	121,3	122,0	122,8	123,5	124,3
5,0	125,0	125,8	126,5	127,3	128,0	128,8	129,6	130,3	131,1	131,9
5,1	132,7	133,4	134,2	135,0	135,8	136,6	137,4	138,2	139,0	139,8
5,2	140,6	141,4	142,2	143,1	143,9	144,7	145,5	146,4	147,2	148,0
5,3	148,9	149,7	150,6	151,4	152,3	153,1	154,0	154,9	155,7	156,6
5,4	157,5	158,3	159,2	160,1	161,0	161,9	162,8	163,7	164,6	165,5

Si se corre la coma en x un lugar a la derecha (izquierda), se debe correr en x^3 tres lugares a la derecha (izquierda).

La función $y = x^3$; $5{,}50 \leq x \leq 9{,}99$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	166,4	167,3	168,2	169,1	170,0	171,0	171,9	172,8	173,7	174,7
5,6	175,6	176,6	177,5	178,5	179,4	180,4	181,3	182,3	183,3	184,2
5,7	185,2	186,2	187,1	188,1	189,1	190,1	191,1	192,1	193,1	194,1
5,8	195,1	196,1	197,1	198,2	199,2	200,2	201,2	202,3	203,3	204,3
5,9	205,4	206,4	207,5	208,5	209,6	210,6	211,7	212,8	213,8	214,9
6,0	216,0	217,1	218,2	219,3	220,3	221,4	222,5	223,6	224,8	225,9
6,1	227,0	228,1	229,2	230,3	231,5	232,6	233,7	234,9	236,0	237,2
6,2	238,3	239,5	240,6	241,8	243,0	244,1	245,3	246,5	247,7	248,9
6,3	250,0	251,2	252,4	253,6	254,8	256,0	257,3	258,5	259,7	260,9
6,4	262,1	263,4	264,6	265,8	267,1	268,3	269,6	270,8	272,1	273,4
6,5	274,6	275,9	277,2	278,4	279,7	281,0	282,3	283,6	284,9	286,2
6,6	287,5	288,8	290,1	291,4	292,8	294,1	295,4	296,7	298,1	299,4
6,7	300,8	302,1	303,5	304,8	306,2	307,5	308,9	310,3	311,7	313,0
6,8	314,4	315,8	317,2	318,6	320,0	321,4	322,8	324,2	325,7	327,1
6,9	328,5	329,9	331,4	332,8	334,3	335,7	337,2	338,6	340,1	341,5
7,0	343,0	344,5	345,9	347,4	348,9	350,4	351,9	353,4	354,9	356,4
7,1	357,9	359,4	360,9	362,5	364,0	365,5	367,1	368,6	370,1	371,7
7,2	373,2	374,8	376,4	377,9	379,5	381,1	382,7	384,2	385,8	387,4
7,3	389,0	390,6	392,2	393,8	395,4	397,1	398,7	400,3	401,9	403,6
7,4	405,2	406,9	408,5	410,2	411,8	413,5	415,2	416,8	418,5	420,2
7,5	421,9	423,6	425,3	427,0	428,7	430,4	432,1	433,8	435,5	437,2
7,6	439,0	440,7	442,5	444,2	445,9	447,7	449,5	451,2	453,0	454,8
7,7	456,5	458,3	460,1	461,9	463,7	465,5	467,3	469,1	470,9	472,7
7,8	474,6	476,4	478,2	480,0	481,9	483,7	485,6	487,4	489,3	491,2
7,9	493,0	494,9	496,8	498,7	500,6	502,5	504,4	506,3	508,2	510,1
8,0	512,0	513,9	515,8	517,8	519,7	521,7	523,6	525,6	527,5	529,5
8,1	531,4	533,4	535,4	537,4	539,4	541,3	543,3	545,3	547,3	549,4
8,2	551,4	553,4	555,4	557,4	559,5	561,5	563,6	565,6	567,7	569,7
8,3	571,8	573,9	575,9	578,0	580,1	582,2	584,3	586,4	588,5	590,6
8,4	592,7	594,8	596,9	599,1	601,2	603,4	605,5	607,6	609,8	612,0
8,5	614,1	616,3	618,5	620,7	622,8	625,0	627,2	629,4	631,6	633,8
8,6	636,1	638,3	640,5	642,7	645,0	647,2	649,5	651,7	654,0	656,2
8,7	658,5	660,8	663,1	665,3	667,6	669,9	672,2	674,5	676,8	679,2
8,8	681,5	683,8	686,1	688,5	690,8	693,2	695,5	697,9	700,2	702,6
8,9	705,0	707,3	709,7	712,1	714,5	716,9	719,3	721,7	724,2	726,6
9,0	729,0	731,4	733,9	736,3	738,8	741,2	743,7	746,1	748,6	751,1
9,1	753,6	756,1	758,6	761,0	763,6	766,1	768,6	771,1	773,6	776,2
9,2	778,7	781,2	783,8	786,3	788,9	791,5	794,0	796,6	799,2	801,8
9,3	804,4	807,0	809,6	812,2	814,8	817,4	820,0	822,7	825,3	827,9
9,4	830,6	833,2	835,9	838,6	841,2	843,9	846,6	849,3	852,0	854,7
9,5	857,4	860,1	862,8	865,5	868,3	871,0	873,7	876,5	879,2	882,0
9,6	884,7	887,5	890,3	893,1	895,8	898,6	901,4	904,2	907,0	909,9
9,7	912,7	915,5	918,3	921,2	924,0	926,9	929,7	932,6	935,4	938,3
9,8	941,2	944,1	947,0	949,9	952,8	955,7	958,6	961,5	964,4	967,4
9,9	970,3	973,2	976,2	979,1	982,1	985,1	988,0	991,0	994,0	997,0

$8{,}47^3 = 607{,}6$ $\quad 0{,}847^3 = 0{,}6076$ $\quad \sqrt[3]{123{,}5} = 4{,}98$ $\quad \sqrt[3]{0{,}1235} = 0{,}498$

$84{,}7^3 = 607\,600$ $\quad 8{,}472^3 = 608{,}0$ $\quad \sqrt[3]{123\,500} = 49{,}8$

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, Pérez., Almeida, M. y B. Villegas, E.: *El proceso de enseñanza de la Matemática. Documentos metodológicos.* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2014.

Álvarez Pérez, M. y otros: *Manual de ejercicios de Matemática para la Educación Media Superior,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2008.

Ballester Pedroso, S. y otros: *Metodología de la Enseñanza de la Matemática.* Tomo I. Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1992.

Ballester Pedroso, S. y otros: *Metodología de la Enseñanza de la Matemática,* t. II, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2000.

Ballester Pedroso, S. y otros: *Didáctica de la Matemática,* t. I, Ed. Universitaria Félix Varela, La Habana, 2018.

Campistrous Pérez, L. y otros: *Matemática décimo grado* (Libro de texto). Ed Pueblo y Educación, La Habana, 1989.

Che, Soler, J. y A. O. Pérez Jacinto, : *Nociones de Estadística aplicada a las investigaciones pedagógicas,* [Material digital], Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona"; La Habana, 2008.

Davidson San Juan, L. D.: *Ecuaciones y matemáticos,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2008.

Davidson San Juan, L. D.: *Ecuaciones y matemáticos, Solucionario,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2008.

Davidson San Juan, L. D. y otros: *Manual de problemas de Matemática Elemental 1.* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1987.

Davidson San Juan, L. D. y otros: *Manual de problemas de Matemática Elemental 2,* Ed. Pueblo y Educación. La Habana, 1995.

Díaz González, M: *Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Preuniversitaria I,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2004.

Díaz González, M.: *Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Preuniversitaria II,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2007.

Egaña Morales, E.: *La Estadística. Herramienta fundamental en la investigación pedagógica,* 2da. ed., Ed. Pueblo y Educación; La Habana, 2010.

GeoGebra. Software matemático interactivo que puede ser utilizado para el tratamiento del algebra, la geometría, el cálculo, la estadística.

Rodríguez Meneses, F. y otros: *Matemática Décimo Grado* (Provisional). Ed Pueblo y Educación, La Habana. 2017.

Rodríguez Meneses, F. y otros: *Orientaciones metodológicas Matemática Décimo Grado.* (Provisional), Ed. Pueblo y Educación. La Habana. 2017.

Rodríguez Meneses, F. y otros: *Programa Provisional matemática Décimo Grado.* Ed. Pueblo y Educación. La Habana. 2017.

Rodríguez Meneses, F. y otros: *Introducción a la Estadística Descriptiva,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2007.

ICCP: *Bases generales para el perfeccionamiento del sistema nacional de educación. Documento impreso,* La Habana, 2013.

Muñoz Baños, F. y L. Campistrous Pérez: *Problemas de Matemática Elemental,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1986.

Naredo Castellanos, R.: *Entrénate en Geometría.* Ed. Pueblo y Educación. La Habana, 2011.

Ochoa Rojas, R.: *Funciones y temas afines,* 3t., Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2009.

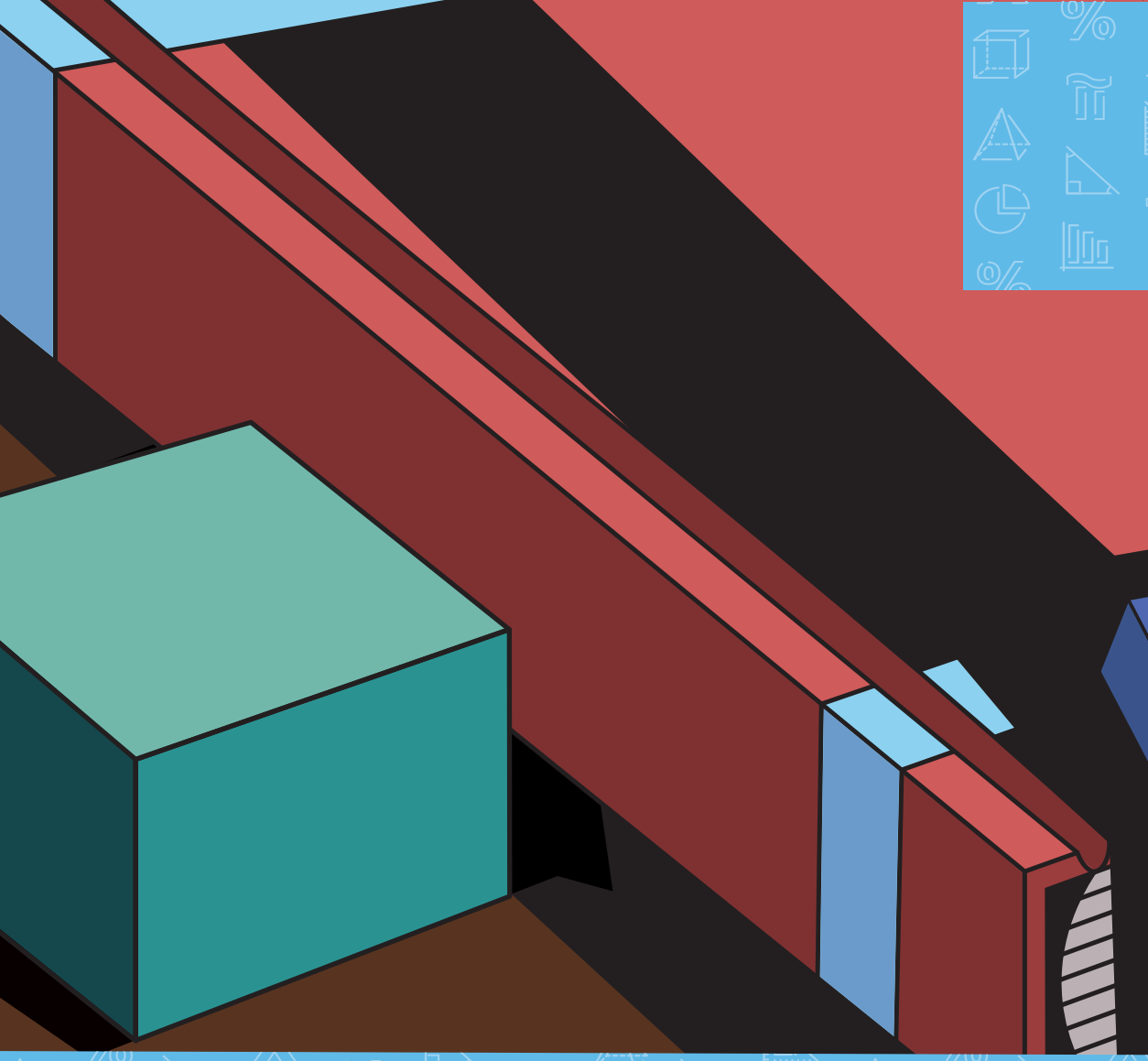
Palacio Peña, J.: *Didáctica de la Matemática: Búsqueda de relaciones y contextualización de problemas,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2007.

Polya, G.: *Cómo plantear y resolver problemas,* Ed. Trillas, México, 1989.

Ríbnikov, K.: *Historia de las Matemáticas,* 1ra. ed. en español, Ed. Mir, Moscú, 1987.

Stewart, J.: *Cálculo con trascendentes tempranas. Parte 1,* Ed. Félix Varela, La Habana, 2006.

www.cuaeduca.cu.http://matematica.cuaeduca.cu/idex.php?option-comcontent&viewarticle&id4874:-lista-de-act-de-apred-10mo&catid 528&Itemid 73



EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN